



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika na PřF Univerzity Palackého
v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

KMA/DDS, DDSM

Diskrétní dynamické systémy

Úvod, (lineární) diferenční rovnice 1. řádu

Přednáška 1

1 Dynamika diferenčních rovnic 1. řádu

1.1 Úvod

Uvažujme veličinu, jejíž hodnoty nás zajímají pouze v nějakých diskrétních okamžicích. Jako ilustrační příklad budeme uvažovat stav populace králíka divokého v Austrálii. Ten se tam dostával s prvními loděmi již od roku 1788, ale zajímavější vývoj nastává až od roku 1859, kdy farmář T. A. vysazuje na svém pozemku 24 králíky. Odhaduje se, že během pouhých patnácti let jejich počet narostl na dva miliony.¹ Tyto hodnoty můžeme zapsat

$$x(1859) = 24, \quad x(1874) = 2\,000\,000.$$

Tento zápis má tu výhodu, že okamžitě víme, ke kterému roku je ten který počet vztažen. Můžeme ovšem použít i jiné označení,

$$x(0) = 24, \quad x(15) = 2\,000\,000,$$

které nám zase říká, že na počátku jich bylo 24, pak čtrnáct údajů chybí a po patnácti časových jednotkách (letech) máme stav 2 000 000. Obě značení jsou možná, ale v teorii je běžnější to druhé.

Představme si, že žijeme právě v roce 1874 a zajímá nás, jak by se mohly počty králíku do budoucna vyvíjet. Máme tedy k dispozici pouze údaje za roky 1859 a 1874 (resp. 0 a 15). O králících toho mnoho nevíme, ale to nám nebrání, čistě teoreticky, matematicky prozkoumat některé jednoduché hypotézy:

- a) Růst populace je více-méně konstantní, tedy když za patnáct let přibyly zhruba dva miliony králíků, tak za dalších patnáct let můžeme očekávat zhruba čtyři miliony ($x(30) = 4\,000\,000$). Takový model jistě není příliš důvěryhodný, ale zkuste se zamyslet, jestli jej někdy v životě (většinou mylně) nepoužíváme.

Ale berme to teď čistě modelově. Jak můžeme matematicky zapsat, že každoroční přírůstek je konstantní? Můžeme použít zápis (P je onen konstantní přírůstek)

$$x(n+1) = x(n) + P, \quad n \geq 0$$

(v našem případě máme $P = \frac{2\,000\,000 - 24}{15}$).

S rovnicí $x(n+1) = x(n) + P$ jste se již dříve mohli setkat při rekurentním zadání posloupností. My je budeme nazývat *diferenční rovnice* a posloupnostem, které jsou jimi takto rekurentně zadány říkáme *řešení diferenční rovnice*. Pokud na ta řešení nebudeme mít nějaké dodatečné požadavky, tak jich bude nekonečně mnoho, například posloupnosti:

$$1, 1 + P, 1 + 2P, 1 + 3P, \dots \quad \text{nebo} \quad 25 + P, 25 + 2P, 25 + 3P, \dots$$

V našem příkladu získáme potřebnou posloupnost tak, že k rovnici přidáme tzv. počáteční podmínku $x(0) = 24$ (hodnotu $x(15)$ jsme již použili pro výpočet P), a tak dostáváme

$$x(n+1) = x(n) + P, \quad x(0) = 24, \quad n \geq 0.$$

¹Ve dvacátém století počet králíků narostl až na neuvěřitelné čtyři miliardy.

Řešením je tedy posloupnost

$$x(n) = 24 + n \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15}, \quad n \geq 0.$$

Snadno nahlédneme, že skutečně

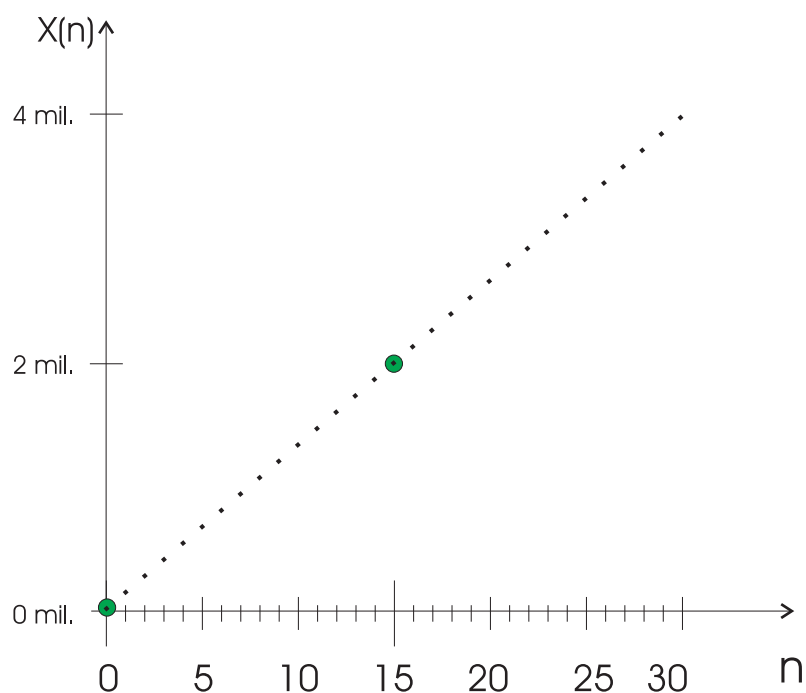
$$x(0) = 24 + 0 \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15} = 24,$$

$$x(15) = 24 + 15 \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15} = 2\,000\,000$$

a

$$x(30) = 24 + 30 \cdot \frac{2\,000\,000 - 24}{15} = 3\,999\,976.$$

Graficky znázorněno:



Obrázek 1: Model: konstantní růst

- b) Populace v následujícím roce je vždy k -násobkem populace předchozího roku, $k > 0$ ($k > 1$ znamená zvětšování počtu, $k = 1$ stagnace počtu a $k \in (0; 1)$ pokles). Dostáváme diferenční rovnici s počáteční podmínkou

$$x(n+1) = k \cdot x(n), \quad x(0) = 24, \quad n \geq 0.$$

Řešení:

$$x(0) = 24, \quad x(1) = k \cdot x(0) = 24 \cdot k,$$

$$x(2) = k \cdot x(1) = 24 \cdot k^2, \dots, x(n) = 24 \cdot k^n, \dots$$

Neznámou konstantu k vypočteme z rovnice

$$x(15) = 2\,000\,000, \quad 24 \cdot k^{15} = 2\,000\,000,$$

$$k^{15} = \frac{2\,000\,000}{24}, \quad k = \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{1}{15}} \doteq 2,13.$$

Diferenční rovnice:

$$x(n+1) = \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{1}{15}} \cdot x(n), \quad x(0) = 24, \quad n \geq 0.$$

Řešení:

$$x(n) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{n}{15}}, \quad n \geq 0.$$

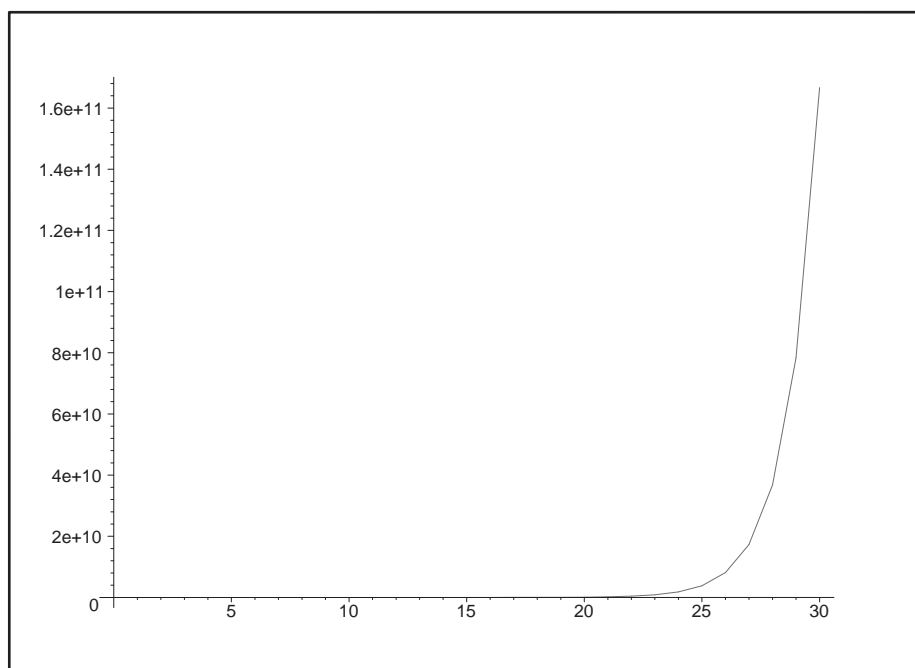
Výpočty:

$$x(0) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{0}{15}} = 24,$$

$$x(15) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{15}{15}} = 2\,000\,000,$$

$$x(30) = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^{\frac{30}{15}} = 24 \cdot \left(\frac{2\,000\,000}{24}\right)^2 \doteq 166\,666\,666\,666.$$

Graficky znázorněno:



Obrázek 2: Model: exponenciální růst

Diferenční rovnice se používají k popisu vývoje nějaké veličiny v (po sobě jdoucích) diskretních časových okamžicích. Pro jednoduchost si tyto okamžiky budeme označovat pomocí nezáporných celých čísel $n \geq n_0 \geq 0$. Hodnotu zkoumané veličiny v čase n budeme například značit $x(n)$ (nebo $y(n)$). Pokud bereme v úvahu neukončený vývoj veličiny x , potom jde vlastně o posloupnost $(x(n))_{n=n_0}^{+\infty}$

Diferenční rovnice, jestliže nějaká populace má diskrétní generace, velikost $(n + 1)$. generace $x(n + 1)$ je funkcí n -té generace $x(n)$. Tento vztah se vyjadřuje jako *diferenční rovnice*

$$x(n + 1) = f(x(n)). \quad (1)$$

Na tento problém ale můžeme nahlížet i z jiného úhlu pohledu. Řekněme, že zvolíme počáteční bod x_0 a budeme generovat posloupnost

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Pro zjednodušení přijmeme označení

$$f^2 = f(f(x_0)), f^3 = f(f(f(x_0))), \dots$$

$f(x_0)$ nazýváme *první iterací* x_0 vzhledem k f ; $f^2(x_0)$ nazýváme druhou iterací x_0 vzhledem k f ; a obecně, $f^n(x_0)$ je n -tou iterací x_0 vzhledem k f .

Množina všech (kladných) iterací

$$\{f^n(x_0) : n \geq 0\} \quad (f^0(x_0) = x_0)$$

se nazývá (*kladná*) *orbita* bodu x_0 a budeme ji označovat $O(x_0)$. Tato iterativní procedura je příkladem *diskrétního dynamického systému*. S nastavením $x(n) = f^n(x_0)$ dostáváme

$$x(n + 1) = f^{n+1}(x_0) = f[f^n(x_0)] = f(x(n)),$$

čímž opět dostáváme (1). Všimněme si, že $x(0) = f^0(x_0) = x_0$. Například, necht'

$$f(x) = x^2 \quad \text{a} \quad x_0 = 0,6.$$

Nyní, například na kalkulačce, počítáme opakovaně druhou mocninu a dostáváme posloupnost

$$0,6, 0,36, 0,1296, 0,01679616, \dots$$

Ještě pár iterací a každému je jasné, že iterace $f^n(0,6)$ směřují k nule. Dokažte, že stejnou limitu mají iterace pro $x_0 \in (-1; 1)$, zatímco pro $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ směřují k nekonečnu. Zřejmě $f^n(0) = 0$ a $f^n(1) = 1$ pro $n = 0, 1, 2, \dots$ a $f^n(-1) = 1$ pro $n = 1, 2, \dots$

Z předchozího textu je zřejmé, že diferenční rovnice a diskrétní dynamické systémy představují dvě strany jedné mince. Když matematici hovoří o diferenčních rovnicích, obvykle mají na mysli analytickou teorii předmětu, zatímco diskrétní dynamické systémy se váží k topologickým a geometrickým aspektům.

Jestliže funkci f v (1) nahradíme funkcí g dvou proměnných, $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kde \mathbb{Z}^+ je množina všech nezáporných celých čísel a \mathbb{R} je množina reálných čísel, potom dostaneme

$$x(n + 1) = g(n, x(n)). \quad (2)$$

Rovnici (2) nazýváme *neautonomní* nebo závislou na čase, zatímco (1) je *autonomní* nebo nezávislá na čase. Studium (2) je mnohem komplikovanější a nepatří úplně do teorie diskrétních dynamických systémů rovnic prvního řádu. Jestliže máme danu počáteční podmínku $x(n_0) = x_0$, potom pro $n \geq n_0$ existuje *jednoznačné* řešení $x(n) \equiv x(n, n_0, x_0)$ rovnice (2) takové, že $x(n_0, n_0, x_0) = x_0$. Toto lze snadno ukázat pomocí iterování:

$$\begin{aligned} x(n_0 + 1, n_0, x_0) &= g(n_0, x(n_0)) = g(n_0, x_0), \\ x(n_0 + 2, n_0, x_0) &= g(n_0 + 1, x(n_0 + 1)) = g(n_0 + 1, g(n_0, x_0)), \\ x(n_0 + 3, n_0, x_0) &= g(n_0 + 2, x(n_0 + 2)) = g[n_0 + 2, g(n_0 + 1, g(n_0, x_0))]. \end{aligned}$$

A indukcí dostáváme

$$x(n, n_0, x_0) = g[n - 1, x(n - 1, n_0, x_0)].$$

1.2 Lineární diferenční rovnice prvního řádu

Zde budeme studovat lineární rovnice — nejjednodušší speciální případy rovnic (1) a (2). Typická lineární *homogenní* rovnice prvního řádu má tvar

$$x(n+1) = a(n)x(n), \quad x(n_0) = x_0, \quad n \geq n_0 \geq 0 \quad (3)$$

a příslušná *nehomogenní* rovnice je dána předpisem

$$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad y(n_0) = y_0, \quad n \geq n_0 \geq 0, \quad (4)$$

kde u obou rovnic předpokládáme, že $a(n) \neq 0$ a $a(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0 \geq 0$.

Řešení homogenní rovnice (3) můžeme opět získat prostým iterováním:

$$\begin{aligned} x(n_0+1) &= a(n_0)x(n_0) = a(n_0)x_0, \\ x(n_0+2) &= a(n_0+1)x(n_0+1) = a(n_0+1)a(n_0)x_0, \\ x(n_0+3) &= a(n_0+2)x(n_0+2) = a(n_0+2)a(n_0+1)a(n_0)x_0. \end{aligned}$$

A pomocí indukce snadno nahlédneme, že²

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n_0 + n - n_0) \\ &= a(n-1)a(n-2) \cdots a(n_0)x_0 \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] x_0. \end{aligned} \quad (5)$$

Jednoznačné řešení nehomogenní rovnice (4) může být nalezeno následovně:

$$\begin{aligned} y(n_0+1) &= a(n_0)y_0 + g(n_0), \\ y(n_0+2) &= a(n_0+1)y(n_0+1) + g(n_0+1) \\ &= a(n_0+1)a(n_0)y_0 + a(n_0+1)g(n_0) + g(n_0+1). \end{aligned}$$

Nyní opět pomocí matematické indukce ukážeme, že pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$y(n) = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r). \quad (6)$$

Při důkazu matematickou indukcí předpokládáme platnost vztahu (6) pro $n = k$, a tedy:

$$y(k) = \left[\prod_{j=n_0}^{k-1} a(j) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r).$$

S použitím (4), $y(k+1) = a(k)y(k) + g(k)$, dostáváme:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= a(k) \left[\prod_{i=n_0}^{k-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[a(k) \prod_{i=r+1}^{k-1} a(i) \right] g(r) + g(k) \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{k-1} \left[\prod_{i=r+1}^k a(i) \right] g(r) + \left[\prod_{i=k+1}^k a(i) \right] g(k) \\ &= \left[\prod_{i=n_0}^k a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^k \left[\prod_{i=r+1}^k a(i) \right] g(r). \end{aligned}$$

²Připomeňme, že při zkráceném zápisu součinu a součtu prvků ve speciálních případech platí: $\prod_{i=k+1}^k a(i) = 1$ a $\sum_{i=k+1}^k a(i) = 0$.

Tudíž vztah (6) platí pro všechna $n \in \mathbb{Z}^+$.

1.2.1 Důležité speciální případy

Existují dva speciální případy rovnice (4), které jsou důležité v mnoha aplikacích. První rovnice je dána vztahem

$$y(n+1) = ay(n) + g(n), \quad y(0) = y_0. \quad (7)$$

S použitím (6) zde dostaneme řešení

$$y(n) = a^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} g(k). \quad (8)$$

Druhé, ještě větší zjednodušení,

$$y(n+1) = ay(n) + b, \quad y(0) = y_0, \quad (9)$$

má řešení (využijeme (8))

$$y(n) = \begin{cases} a^n y_0 + b \left[\frac{a^n - 1}{a - 1} \right] & \text{if } a \neq 1, \\ y_0 + bn & \text{if } a = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Na procvičení předchozích formulí uvedeme několik příkladů.

Příklad 1.1 Vyřešte rovnici

$$y(n+1) = (n+1)y(n) + 2^n(n+1)!, \quad y(0) = 1, \quad n > 0.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) \\ &= \left[\prod_{i=0}^{n-1} (i+1) \right] 1 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} (i+1) \right] 2^r (r+1)! \\ &= n! + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\frac{n!}{(r+1)!} \right] 2^r (r+1)! \\ &= n! + \sum_{r=0}^{n-1} n! 2^r \\ &= 2^n n!, \end{aligned}$$

neboť

$$n! + \sum_{r=0}^{n-1} n! 2^r = n! \left(1 + \sum_{r=0}^{n-1} 2^r \right) = n! \left(1 + 1 \frac{1 - 2^n}{1 - 2} \right) = n! (1 - 1 + 2^n) = n! 2^n.$$

□

Příklad 1.2 Řešte rovnici

$$x(n+1) = 2x(n) + 3^n, \quad x(1) = 0,5.$$

Řešení. $a(n) \equiv 2$ a $n_0 = 1$, tudíž

$$\begin{aligned}
 x(n) &= \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i) \right] y_0 + \sum_{r=n_0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i) \right] g(r) \\
 &= \left[\prod_{i=1}^{n-1} a \right] y_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a \right] g(r) \\
 &= [a^{n-1}] y_0 + \sum_{r=1}^{n-1} [a^{n-r-1}] g(r) \\
 &= [2^{n-1}] 0,5 + \sum_{r=1}^{n-1} 2^{n-r-1} 3^r \\
 &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}\right)^r \\
 &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{2}} \right) \right] \\
 &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \left[-3 \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \right) \right] \\
 &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \left[-3 + 3 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \right] \\
 &= 2^{n-2} + 2^{n-1} \left[-3 + 2 \left(\frac{3}{2}\right)^n \right] \\
 &= 2^{n-2} - 3 \cdot 2^{n-1} + 2^n \left(\frac{3}{2}\right)^n \\
 &= 2^{n-2} - 6 \cdot 2^{n-2} + 3^n \\
 &= 3^n - 5 \cdot 2^{n-2}.
 \end{aligned}$$

□

Příklad 1.3 Pacient užívá lék vždy po čtyřech hodinách. Nechť $D(n)$ je množství účinné látky v krevním systému v n -tém intervalu. Tělo během každého intervalu eliminuje p -tinu účinné látky.

Nalezněte $D(n)$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} D(n)$, jestliže užívaná dávka je D_0 .

Řešení. Nejprve musíme převést slovní zadání do rovnice, kterou potom vyřešíme. Zřejmě

$$D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0.$$

S využitím (10) dostáváme

$$D(n) = \left[D_0 - \frac{D_0}{p} \right] (1-p)^n + \frac{D_0}{p},$$

a tedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(n) = \frac{D_0}{p}. \quad (11)$$

Nechť $D_0 = 2 [cm^3]$ a $p = 0, 25$, potom původní rovnice je

$$D(n+1) = 0,75D(n) + 2, \quad D_0 = 2.$$

Tabulka 1 obsahuje hodnoty $D(n)$ pro $n \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$D(n)$	2	3.5	4.62	5.47	6.1	6.58	6.93	7.2	7.4	7.55	7.66

Tabulka 1: Hodnoty $D(n)$

Z (11) zjistíme, že rovnovážným stavem množství účinné látky v těle je

$$D^* = \lim_{n \rightarrow \infty} D(n) = 8 [cm^3].$$

□

Příklad 1.4 (Umořování) Umořování je proces, při kterém je splácen dluh (ne)pravidelnými platbami v pravidelných intervalech. Každá splátka se skládá z úroku za příslušné období a z částky snižující dluh (úmoru).

Nechť do každého období vstupujeme s dluhem $p(n)$, který je v tomto období úročen s úrokovou mírou r , vztaženou k platební periodě. Na konci n -tého období je realizována splátka $g(n)$.

Formulace našeho modelu je založena na faktu, že dluh $p(n+1)$ na počátku $(n+1)$ -ho období je roven předchozí hodnotě dluhu $p(n)$, k níž musíme přičíst úrok za poslední období, $rp(n)$ a naopak odečíst splátku $g(n)$. Tedy

$$p(n+1) = p(n) + rp(n) - g(n) = (1+r)p(n) - g(n), \quad p(0) = p_0,$$

kde p_0 značí počáteční hodnotu dluhu. Jde o případ s konstantním koeficientem u $p(n)$, takže můžeme využít (8)

$$p(n) = (1+r)^n p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} g(k).$$

Ve speciálním případě může jít o úlohu s konstantní splátkou ($g(n)$ je konstantní) nebo s konstantním úmorem ($p(n+1) - p(n)$ je konstantní). Úloha na výpočet pevného počtu n konstantních splátek T nás vede k rovnici $p(n) = 0$, konkrétně

$$p(n) = (1+r)^n p_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+r)^{n-k-1} T = (1+r)^n p_0 + \frac{(1+r)^n - 1}{r} T = 0.$$

Odtud

$$T = p_0 \left[\frac{r}{1 - (1+r)^{-n}} \right].$$

Pro $p_0 = 100\,000$, $r = 0,1$ a $n = 5$ dostaneme

$$T = 100\,000 \left[\frac{0,1}{1 - (1+0,1)^{-5}} \right] \approx 26\,380.$$

Umořovací plán naleznete v tabulce 2.

Období k	Dluh $p(k)$	Splátka $g(k)$	Úrok $rp(k)$	Úmor $g(k) - rp(k)$	Nový dluh $p(k+1)$
0	100 000	26 380	10 000	16 380	83 620
1	83 620	26 380	8 362	18 018	65 602
2	65 602	26 380	6 560	19 820	45 782
3	45 782	26 380	4 578	21 802	23 980
4	23 980	26 380	2 398	23 982	0
5	0				

Tabulka 2: Umořovací plán

Cvičení k přednášce 1

1. Nalezněte řešení následujících diferenčních rovnic:

- (a) $x(n+1) - (n+1)x(n) = 0, x(0) = c.$
- (b) $x(n+1) - 3^n x(n) = 0, x(0) = c.$
- (c) $x(n+1) - e^{2n} x(n) = 0, x(0) = c.$
- (d) $x(n+1) - \frac{n}{n+1} x(n) = 0, n \geq 1, x(1) = c.$

2. Nalezněte obecné řešení následujících diferenčních rovnic:

- (a) $y(n+1) - \frac{1}{2}y(n) = 2, y(0) = c.$
- (b) $y(n+1) - \frac{n}{n+1}y(n) = 4, y(0) = c.$

3. Nalezněte obecné řešení následujících diferenčních rovnic:

- (a) $y(n+1) - (n+1)y(n) = 2^n(n+1)!, y(0) = c.$
- (b) $y(n+1) = y(n) + e^n, y(0) = c.$

4. (a) Napište diferenční rovnici popisující počet oblastí vytvořených n přímkami v rovině, jestliže se každé dvě protnou, a to nejvýše dvě v jednom bodu.

(b) Nalezněte zmíněný počet oblastí vyřešením nalezené diferenční rovnice.

5. Gama funkce je definována jako $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0.$

- (a) Ukažte, že $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \Gamma(1) = 1.$
- (b) Ukažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\Gamma(n+1) = n!.$
- (c) Ukažte, že $x^{(n)} = x(x-1) \cdots (x-n+1) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}.$

6. Prostor (3D) je rozdělen n rovinami, ze kterých žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné čtyři nemají společný bod.

- (a) Napište diferenční rovnici popisující počet vytvořených oblastí.
- (b) Nalezněte počet těchto oblastí.

7. Ověřte (8).

8. Ověřte (10).
9. Dluh \$12.000 má být umořen stejnými splátkami o velikosti \$380 na konci každého měsíce, plus poslední splátkou, která může být menší. Sestavte splátkový kalendář při roční úrokové míře 12% s měsíčním připisováním úroků.
10. Uvažujte půjčku ve výši \$80.000, která má být splacena stejnými měsíčními splátkami. Nalezněte výši této splátky, jestliže roční úroková míra je 10%, připisování úroků je měsíční a doba splácení je 30 let.
11. Uvažujme, že na konci každé periody uložíme sumu T do banky, která ji úročí s úrokovou mírou r vztaženou k dané periodě. Nechť $A(n)$ značí naspořenou částku po n periodách.
 - (a) Napište diferenční rovnici, která popisuje $A(n)$.
 - (b) Tuto diferenční rovnici vyřešte pro $A(0) = 0$, $T = \$200$ a $r = 0,008$.
12. Bylo zjištěno, že teplota tělesa je 110°F . Dále bylo vyzorováno, že vždy po dvou hodinách je změna teploty tělesa dána jako $-0,3$ násobek rozdílu předchozí teploty tělesa a teploty v místnosti, která je stále 70°F .
 - (a) Napište diferenční rovnici, která popisuje teplotu $T(n)$ tělesa na konci n -té periody.
 - (b) Nalezněte $T(n)$.
13. Uvažujete o hypotéce na 30 let při roční úrokové míře 8%. Kolik si můžete dovolit půjčit, jestliže jste schopni splácet \$1.000 měsíčně?
14. Radium se rozpadá v míře 0,04% ročně. Jaký je jeho poločas rozpadu?
15. (Určování stáří uhlíkovou metodou) Je známo, že obsah uhlíku C_{14} v rostlinách a tělech živočichů je v době jejich života stejný jako v atmosféře. Po jejich úmrtí obsah uhlíku C_{14} v jejich tkáních klesá s mírou r .
 - (a) Nalezněte r , jestliže poločas rozpadu uhlíku C_{14} je 5.700 let.
 - (b) Jak stará je zkoumaná zvířecí kost, jestliže v ní zůstalo 70% původního množství uhlíku C_{14} ?



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika na PřF Univerzity Palackého
v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

KMA/DDS, DDSM

Diskrétní dynamické systémy

Rovnovážné body a jejich stabilita

Přednáška 2

2 Rovnovážné body

Pojem rovnovážné body (stavy) je stěžejní při studiu dynamiky fyzikálních systémů. V mnoha aplikacích v biologii, ekonomii, fyzice, technice apod. je žádoucí, aby všechny stavy (řešení) směřovaly k rovnovážným stavům (bodům). Toto je předmětem studia teorie stability, což je důležité téma pro vědce a inženýry. Nyní podáme formální definici rovnovážného bodu.

Definice 2.1 Bod x^* z definičního oboru f budeme nazývat *rovnovážný bod* diferenční rovnice (1), jestliže je pevným bodem zobrazení f , tj. $f(x^*) = x^*$.

Jinými slovy, x^* je *konstantním řešením* rovnice (1), jelikož jestliže $x(0) = x^*$ je počáteční bod, potom $x(1) = f(x^*) = x^*$, $x(2) = f(x(1)) = f(x^*) = x^*$, atd.

Graficky je rovnovážný bod x -ová souřadnice průsečíku grafu zobrazení f s diagonálou $y = x$ (viz obrázky 3 a 4). Například rovnice

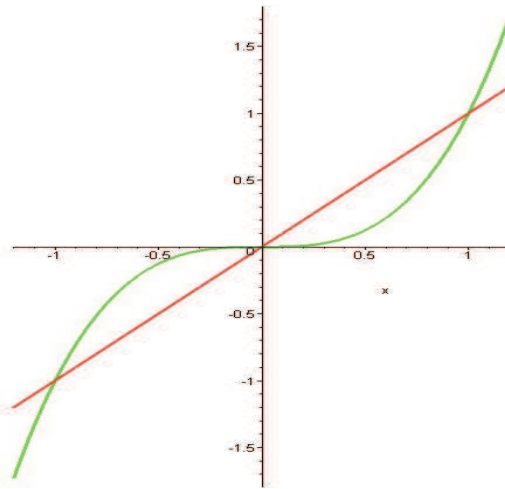
$$x(n+1) = x^3(n),$$

kde $f(x) = x^3$, má tři rovnovážné body. K nalezení těchto bodů položíme $f(x^*) = x^*$, čili $x^3 = x$, vyřešíme vzhledem k x a získáme hodnoty -1 , 0 a 1 (obr. 3).

Obrázek 4 ilustruje jiný příklad, kdy $f(x) = x^2 - x + 1$, a tedy

$$x(n+1) = x^2(n) - x(n) + 1.$$

Při $x^2 - x + 1 = x$ získáme jen jeden rovnovážný bod $x^* = 1$.

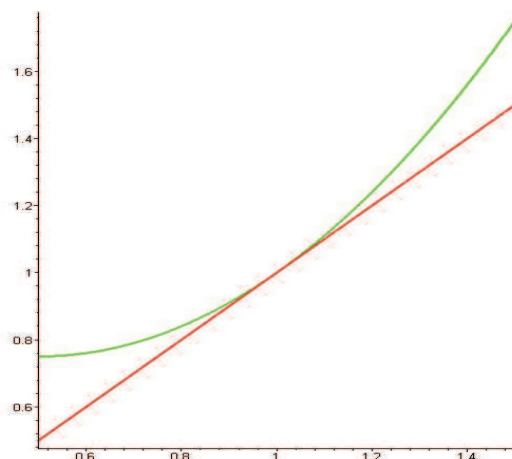


Obrázek 3: Pevné body zobrazení $f(x) = x^3$.

Existuje fenomén, který se vyskytuje jen u diferenčních rovnic a není možný u rovnic diferenciálních. U diferenčních rovnic je možné, že řešení, které není rovnovážné se může po konečném počtu iterací stát rovnovážným.

Jinými slovy, nerovnovážný stav může dosáhnout rovnovážný stav v konečném čase. To vede k následující definici.

Definice 2.2 Nechť x je bodem definičního oboru zobrazení f . Jestliže existuje kladné celé číslo r a rovnovážný bod x^* rovnice (1) takový, že $f^r(x) = x^*$, $f^{r-1}(x) \neq x^*$, potom x nazýváme *eventuálně rovnovážným bodem*.



Obrázek 4: Pevný bod zobrazení $f(x) = x^2 - x + 1$.

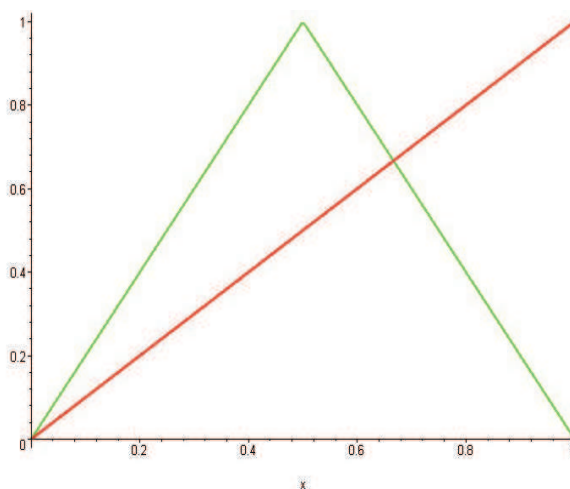
Příklad 2.5 (Stanové (Tent) zobrazení) Uvažujme rovnici (viz obr. 5)

$$x(n+1) = T(x(n)),$$

kde

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \text{pro } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Tato rovnice má dva rovnovážné body, 0 a $\frac{2}{3}$ (viz obr. 5). Hledání eventuálně rovnovážných



Obrázek 5: Rovnovážné body stanového zobrazení.

bodů není algebraicky tak jednoduché. Jestliže $x(0) = \frac{1}{4}$, potom $x(1) = \frac{1}{2}$, $x(2) = 1$ a $x(3) = 0$. Tedy $\frac{1}{4}$ je eventuálně rovnovážným bodem. Zkuste ukázat, že body dané předpisem $x = \frac{k}{2^n}$, kde k a n jsou přirozená čísla, přičemž $0 < \frac{k}{2^n} \leq 1$, jsou eventuálně rovnovážné.

Jednou z hlavních oblastí studia dynamických systémů je analýza chování řešení v blízkosti rovnovážných bodů. Toto studium zakládá teorii stability. Uvedeme základní definice stability.

Definice 2.3 (a) Rovnovázný bod x^* rovnice (1) je *stabilní*, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|x_0 - x^*| < \delta$ implikuje $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ pro všechna $n > 0$. Jestliže x^* není stabilní, potom jej nazýváme *nestabilní*.

(b) Bod x^* nazýváme *atraktivní (přitažlivý)*, jestliže existuje $\eta > 0$ takové, že

$$|x(0) - x^*| < \eta \text{ implikuje } \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*.$$

Jestliže $\eta = \infty$, potom bod x^* nazýváme *globální atraktor* nebo *globálně atraktivní (přitažlivý)*.

(c) Bod x^* je *asymptoticky stabilní rovnovážný bod*, jestliže je stabilní a přitažlivý. Jestliže $\eta = \infty$, potom bod x^* nazýváme *globálně asymptoticky stabilní*.

Určení stability rovnovážných bodů podle uvedených definic může být v mnoha případech nemožné (mission impossible). To je zapříčiněno tím, že nejsme vždy schopni nalézt řešení v uzavřeném tvaru, což se může stát již pro navenek velmi jednoduše vyhlížející rovnici (1). V této sekci předvedeme některé z nejjednodušších, ale také nejúčinnějších nástrojů k porozumění chování řešení rovnice (1) v blízkém okolí rovnovážných bodů, jmenovitě grafické postupy. Zde si vystačíme s pouhou kalkulačkou.

2.1 Schodovité (pavučinové) diagramy

Nyní si detailně ukážeme další grafickou metodu analýzy stability rovnovážných (a periodických) bodů rovnice (1). Jelikož $x(n+1) = f(x(n))$, můžeme si v rovině $(x(n), x(n+1))$ namalovat graf zobrazení f . Potom, pro dané $x(0) = x_0$ najdeme graficky $x(1) = f(x(0)) = f(x_0)$ vztyčením vertikály z x_0 ke grafu f (tím získáme bod se souřadnicemi $(x_0, x(1))$). Z tohoto bodu vedeme horizontálu až k diagonále $y = x$, čímž získáme bod $(x(1), x(1))$. Nyní opět vertikálu ke grafu (do bodu $(x(1), x(2))$), atd. Takto můžeme nalézt $x(n)$ pro všechna $n > 0$.

Příklad 2.6 (Logistická rovnice) Nechť $y(n)$ značí velikost populace v čase n . Jestliže μ je míra růstu pop ulace zjedné k následující, potom můžeme uvažovat matematický model ve tvaru

$$y(n+1) = \mu y(n), \quad \mu > 0. \quad (12)$$

Jestliže je počáteční populace dána $y(0) = y_0$, potom prostým iterováním nahlédneme, že

$$y(n) = \mu^n y_0 \quad (13)$$

je řešením rovnice (12). Jestliže je $\mu > 1$, potom $y(n)$ roste nade všechny meze, $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \infty$. Jestliže $\mu = 1$, potom $y(n) = y_0$ pro všechna $n > 0$, což znamená, že velikost populace je do budoucna konstantní. Avšak pro $\mu < 1$ dostaneme $\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = 0$, a tedy populace nakonec vymře.

Pro většinu biologických druhů však výše uvedené případy platí jen po dosažení jisté horní hranice. Potom z důvodu omezených dostupných zdrojů dochází k soutěži o ně. Tato soutěž je úměrná čtverci jejich počtu $y^2(n)$ s mírou $b > 0$:

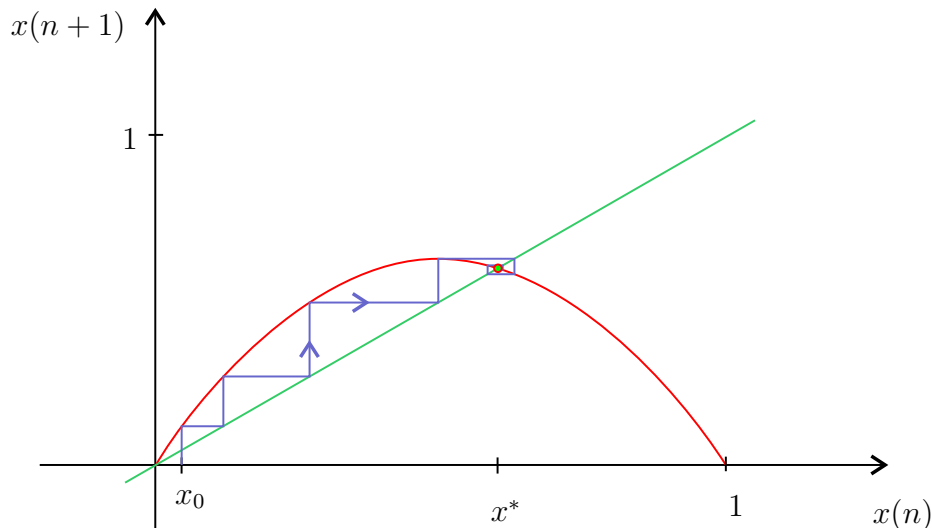
$$y(n+1) = \mu y(n) - b y^2(n). \quad (14)$$

Jestliže v (14) provedeme substituci $x(n) = \frac{b}{\mu} y(n)$, dostaneme

$$x(n+1) = \mu x(n)(1 - x(n)) = f(x(n)). \quad (15)$$

Tato rovnice je nejjednodušší nelineární diferenční rovnicí prvního řádu, o které se obecně hovoří jako o (diskrétní) logistické rovnici. Avšak explicitní tvar řešení pro tuto rovnici nelze (až na některé hodnoty μ) nalézt. Přes svou jednoduchost logistická rovnice představuje poměrně komplikovanou dynamiku. Abychom našli rovnovážné body (15), položíme $f(x^*) = \mu x^*(1 - x^*) = x^*$, čímž získáme $x^* = 0$ a $x^* = \frac{\mu-1}{\mu}$.

Obrázek 6 ukazuje schodovitý diagram logistické rovnice pro $\mu = 2,5$ a $x(0) = 0,1$. V tomto případě máme také dva rovnovážné body. Jeden, $x^* = 0$, je nestabilní a druhý, $x^* = 0,6$, je asymptoticky stabilní.



Obrázek 6: Schodovitý diagram pro $\mu = 2,5$.

Cvičení k přednášce 2

1. (Newtonova metoda výpočtu druhé odmocniny kladného čísla)

Rovnice $x^2 = a$ můžeme přepsat do tvaru $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$. Tento tvar vede k Newtonově metodě

$$x(n+1) = \frac{1}{2} \left[x(n) + \frac{a}{x(n)} \right].$$

- (a) Ukažte, že tato diferenční rovnice má dva rovnovážné body, $-\sqrt{a}$ a \sqrt{a} .
 - (b) Načrtněte schodovitý diagram pro $a = 3$, $x(0) = 1$ a $x(0) = -1$.
 - (c) Jaký závěr můžete získat z bodu (1b)?
2. (Pielouova logistická rovnice)

E. C. Pielou [4] nazval následující rovnici diskretní logistická rovnice:

$$x(n+1) = \frac{\alpha x(n)}{1 + \beta x(n)}, \quad \alpha > 1, \quad \beta > 0.$$

- (a) Nalezněte kladný rovnovážný bod.
- (b) Demonstrujte pomocí schodovitého diagramu, že nalezený kladný rovnovážný bod je asymptoticky stabilní při $\alpha = 2$ a $\beta = 1$.

3. Nalezněte rovnovážné body a určete jejich stabilitu pro rovnici

$$x(n+1) = 5 - \frac{6}{x(n)}.$$

4. (a) Namalujte schodovitý diagram pro (15) pro $\mu = 0, 5, 3$ a $3, 3$. Co vyčtete z těchto diagramů?

(b) Určete, které hodnoty μ vedou k periodickému řešení s periodou 2.

5. Uvažujte Bakerovo zobrazení dané vztahem

$$B(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 & \text{pro } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Namalujte funkci $B(x)$ na intervalu $[0, 1]$.

(b) Ukažte, že $x \in [0, 1]$ je eventuálním pevným bodem tehdy a jen tehdy, jestliže je tvaru $x = \frac{k}{2^n}$, kde k a n jsou kladná celá čísla³, přičemž $0 \leq k \leq 2^{n-1}$

6. Nalezněte pevné body a eventuální pevné body rovnice $x(n+1) = f(x(n))$, kde $f(x) = x^2$.

7. Nalezněte eventuální pevné body stanového zobrazení z příkladu 2.5, které mají jiný tvar než $\frac{k}{2^n}$.

8. Uvažujte stanové zobrazení z příkladu 2.5. Ukažte, že jestliže $x = \frac{k}{2^n}$, kde k a n jsou kladná celá čísla a $0 \leq \frac{k}{2^n} \leq 1$, potom x je eventuální pevný bod.

V úlohách 9 až 11:

(a) Nalezněte příslušnou diferenční rovnici.

(b) Namalujte $(n, x(n))$ diagram.

(c) Nalezněte, jestliže je to možné, exaktní řešení diferenční rovnice a namalujte jeho graf do stejného obrázku jako v předchozím bodu (b).

9. $y' = -y^2$, $y(0) = 1$, $0 \leq t \leq 1$, $h = \frac{2}{10}$ a $\frac{1}{10}$.

10. $y' = -y + \frac{4}{y}$, $y(0) = 1$, $0 \leq t \leq 1$, $h = \frac{25}{100}$.

11. $y' = -y + 1$, $y(0) = 1$, $0 \leq t \leq 1$, $h = \frac{25}{100}$.

³Číslo $x \in [0, 1]$ je dyadické racionální číslo, jestliže je tvaru $\frac{k}{2^n}$ pro nějaká nezáporná celá čísla k a n , přičemž $0 \leq k \leq 2^{n-1}$.

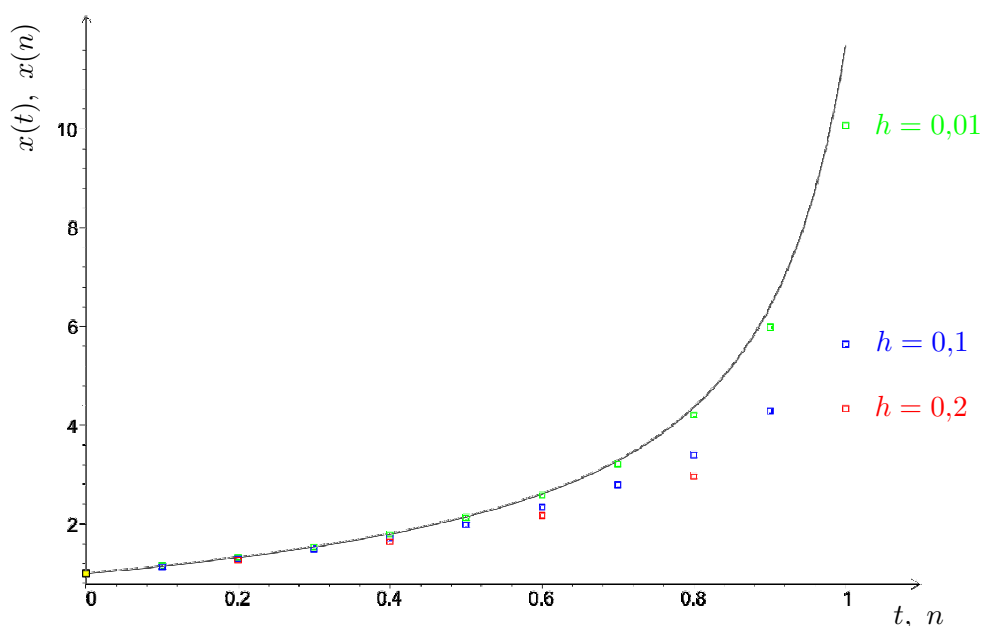
⁴V knize [2] je na tomto místě uvedeno $0 \leq k \leq 2^n - 1$, tak zjistěte, co je správně.

Doplňěk k přednášce 2

D1 Eulerova metoda řešení diferenciálních rovnic

n	t	(ΔR) -Euler ($h = 0,2$) $x(n)$	(ΔR) -Euler ($h = 0,1$) $x(n)$	(DR) -přesně $x(t)$
0	0	1	1	1
1	0,1		1,14	1,150
2	0,2	1,28	1,301	1,328
3	0,3		1,489	1,542
4	0,4	1,649	1,715	1,807
5	0,5		1,991	2,150
6	0,6	2,170	2,338	2,614
7	0,7		2,791	3,286
8	0,8	2,969	3,406	4,361
9	0,9		4,288	6,383
10	1	4,343	5,645	11,681

Tabulka 3: Eulerovy aproximace pro $h = 0,2$ a $0,1$ společně s přesnými hodnotami.



Obrázek 7: Srovnání přesného řešení a numerického řešení diferenciální rovnice (DR) pro různé velikosti kroků h .

Příklad 2.7 (Numerická řešení diferenciálních rovnic) Při numerickém řešení (aproximaci) diferenciálních rovnic ve skutečnosti používáme příslušnou diferenční rovnici, ať už si to uvědomujeme nebo ne. Ukažme si to na *Eulerově metodě*, jedné z nejjednodušších technik aproximace řešení diferenciální rovnice.

Uvažujme diferenciální rovnici prvního řádu

$$x'(t) = g(x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t. \quad (16)$$

Interval $[t_0, b]$ rozdělíme na N stejných podintervalů. Velikost podintervalu nazýváme *velikostí kroku* metody a označujeme ji $h = \frac{b-t_0}{N}$. Velikost tohoto kroku definuje uzly $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$, kde $t_j = t_0 + jh$. Eulerova metoda aproximuje $x'(t)$ pomocí $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$.

Dosazením do (16) dostaneme

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = g(x(t)),$$

a tedy

$$x(t+h) = x(t) + hg(x(t)).$$

Pro $t = t_0 + nh$ máme

$$x[t_0 + (n+1)h] = x(t_0 + nh) + hg[x(t_0 + nh)], \quad (17)$$

pro $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Při upraveném označení $x(n) = x(t_0 + nh)$ získáme

$$x(n+1) = x(n) + hg[x(n)]. \quad (18)$$

Rovnice (18) definuje *Eulerův algoritmus*, který aproximuje řešení diferenciální rovnice (16) v uzlových bodech.

Poznamenejme, že x^* je rovnovážným bodem diferenční rovnice (18) tedy a jen tehdy když $g(x^*) = 0$. To znamená, že diferenciální rovnice (16) a diferenční rovnice (18) mají stejné rovnovážné body.

Nyní aplikujeme Eulerovu metodu na diferenciální rovnici (DR):

$$x'(t) = 0,7x^2(t) + 0,7, \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 1]. \quad (DR)$$

Přesné řešení (pro kontrolu přesnosti metody) je $x(t) = \tan(0,7t + \frac{\pi}{4})$.

Příslušná diferenční rovnice (ΔR) s použitím Eulerovy metody je

$$x(n+1) = x(n) + 0,7h(x^2(n) + 1), \quad x(0) = 1. \quad (\Delta R)$$

Tabulka 3 ukazuje Eulerovy aproximace pro $h = 0,2$ a $0,1$ společně s přesnými hodnotami. Obrázek 7 obsahuje $(n, x(n))$ -diagram. Všimněte si, že čím menší je krok, tím přesnější jsou aproximace.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika na PřF Univerzity Palackého
v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

KMA/DDS, DDSM

Diskrétní dynamické systémy

Kritéria asymptotické stability a nestability

Přednáška 3

3 Kritéria asymptotické stability rovnovážných bodů

V této kapitole uvedeme jednoduché, avšak silné, kritérium asymptotické stability rovnovážných bodů. Následující věta bude naším hlavním nástrojem.

Věta 3.1 *Nechť x^* je rovnovážným bodem diferenční rovnice*

$$x(n+1) = f(x(n)), \quad (19)$$

kde f je spojitě diferencovatelná v x^ . Potom jsou pravdivé následující výroky:*

(i) *Jestliže $|f'(x^*)| < M < 1$, potom x^* je asymptoticky stabilní.*

(ii) *Jestliže $|f'(x^*)| > 1$, potom je x^* nestabilní.*

Důkaz. (i) Předpokládejme, že $|f'(x^*)| < M < 1$. Potom existuje interval $J = (x^* - \gamma, x^* + \gamma)$ obsahující x^* takový, že $|f'(x)| \leq M < 1$ pro všechna $x \in J$. (Proč? Cvičení 3, úloha 9.) Pro $x(0) \in J$ máme

$$|x(1) - x^*| = |f(x(0)) - f(x^*)|.$$

Podle věty o střední hodnotě existuje ξ mezi $x(0)$ a x^* takové, že

$$|f(x(0)) - f(x^*)| = |f'(\xi)| |x(0) - x^*|.$$

A tedy

$$|f(x(0)) - f(x^*)| \leq M |x(0) - x^*|,$$

a tedy

$$|x(1) - x^*| \leq M |x(0) - x^*|. \quad (20)$$

Jelikož je $M < 1$, nerovnost (20) ukazuje, že $x(1)$ je blíže k x^* než $x(0)$, současně také máme $x(1) \in J$.

Indukcí získáme

$$|x(n) - x^*| \leq M^n |x(0) - x^*|.$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ stačí vzít $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Takto totiž nerovnost $|x(0) - x^*| < \delta$ implikuje $|x(n) - x^*| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq 1$, neboť

$$|x(n) - x^*| \leq M^n |x(0) - x^*| < M^n \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{M^{n-1}}{2} \varepsilon < \varepsilon, \quad n \geq 1.$$

Tento závěr ukazuje stabilitu. Dále, jelikož $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(n) - x^*| = 0$, a tak $\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x^*$, dostáváme asymptotickou stabilitu.

(ii) Tento důkaz ponecháme jako úlohu 11 ve cvičeních 3. □

Poznámka 3.1 V literatuře zabývající se dynamickými systémy se rovnovážný bod x^* nazývá *hyperbolický*, jestliže $|f'(x^*)| \neq 1$.

Příklad 3.8 (Newtonova metoda) Newtonova metoda je jednou z neznámějších numerických metod pro nalezení kořenů rovnice $g(x) = 0$.

Newtonův algoritmus hledání nulového bodu x^* funkce $g(x)$ je dán diferenční rovnicí

$$x(n+1) = x(n) - \frac{g(x(n))}{g'(x(n))}, \quad (21)$$

kde $x(0) = x_0$ je naším počátečním odhadem kořene x^* . Pro tuto diferenční rovnici máme $f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$.

Nejprve poznamenejme, že nulové body funkce $g(x)$ jsou současně rovnovážnými body diferenční rovnice (21). Pokusíme se zjistit, zda nám Newtonův algoritmus dává posloupnost $x(n)$ konvergující k řešení x^* . K tomu použijeme Větu 3.1:

$$|f'(x)| = \left| 1 - \frac{[g'(x)]^2 - g(x)g''(x)}{[g'(x)]^2} \right|,$$

a tedy pro $x = x^*$ máme (neboť $g(x^*) = 0$)

$$|f'(x^*)| = \left| 1 - \frac{[g'(x^*)]^2 - 0 \cdot g''(x^*)}{[g'(x^*)]^2} \right| = |1 - 1| = 0 < 1,$$

a tedy je bod x^* asymptoticky stabilní. Jestliže tedy máme x_0 dostatečně blízko hledaného x^* a $g'(x^*) \neq 0$, dostáváme posloupnost bodů $x(n)$, která konverguje k x^* ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$).

Věta 3.1 neříká nic o nehyperbolických rovnovážných bodech, kdy

$$|f'(x^*)| = 1.$$

V těchto případech je potřeba další analýza. Následující Věta 3.2 je věnována případu $f'(x^*) = 1$.

Věta 3.2 Předpokládejme, že rovnovážný bod x^* diferenční rovnice (19) má $f'(x^*) = 1$. Potom platí následující tvrzení:

- (i) Jestliže $f''(x^*) \neq 0$, potom je x^* nestabilní.
- (ii) Jestliže $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) > 0$, potom je x^* nestabilní.
- (iii) Jestliže $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) < 0$, potom je x^* asymptoticky stabilní.

Důkaz. (i) Jestliže $f''(x^*) \neq 0$, potom je f v okolí x^* buď konvexní

$$f''(x^*) > 0$$

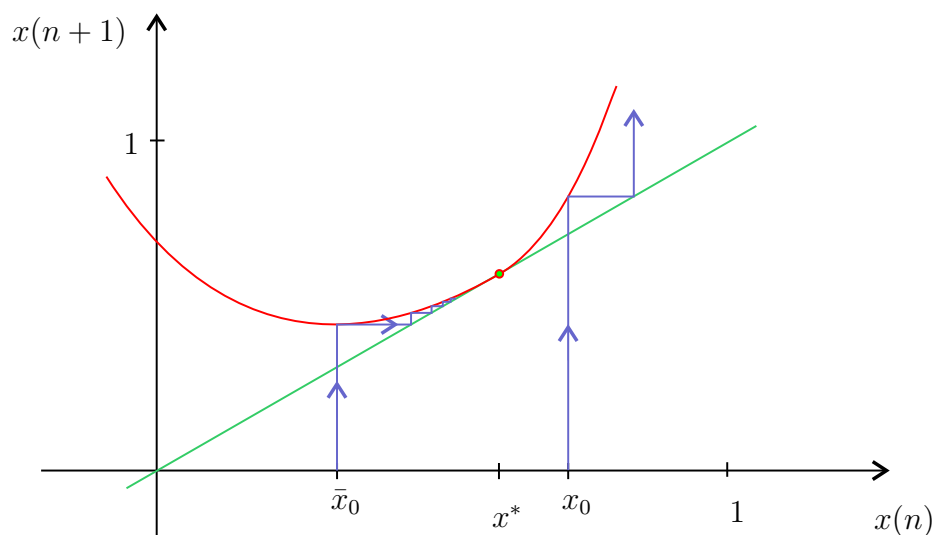
nebo konkávní

$$f''(x^*) < 0.$$

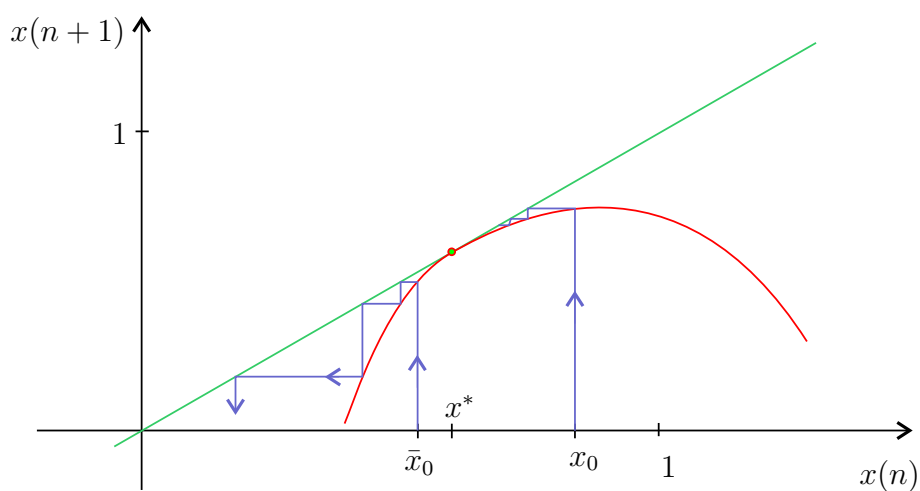
Tyto případy jsou ilustrovány na obrázcích 8–11. Jestliže $f''(x^*) > 0$, potom $f'(x) > 1$ pro všechna x z dostatečně malého intervalu $I = (x^*, x^* + \varepsilon)$. S využitím stejného postupu jako v důkazu Věty 3.1 je poměrně snadné ukázat, že x^* je nestabilní. Na druhou stranu, když $f''(x^*) < 0$, potom $f'(x) > 1$ pro všechna x z dostatečně malého intervalu $I = (x^* - \varepsilon, x^*)$, a tudíž x^* je opět nestabilní.

Důkazy částí (ii) a (iii) jsou ponechány jako cvičení.

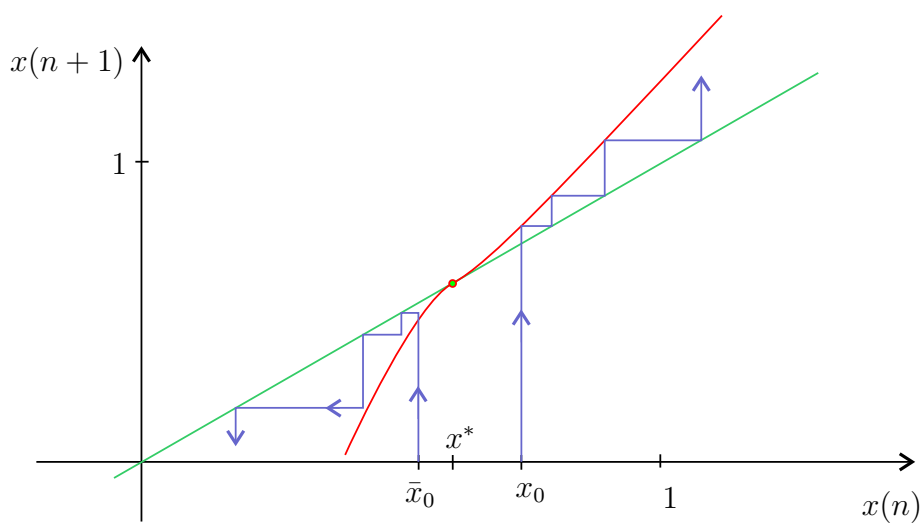
□



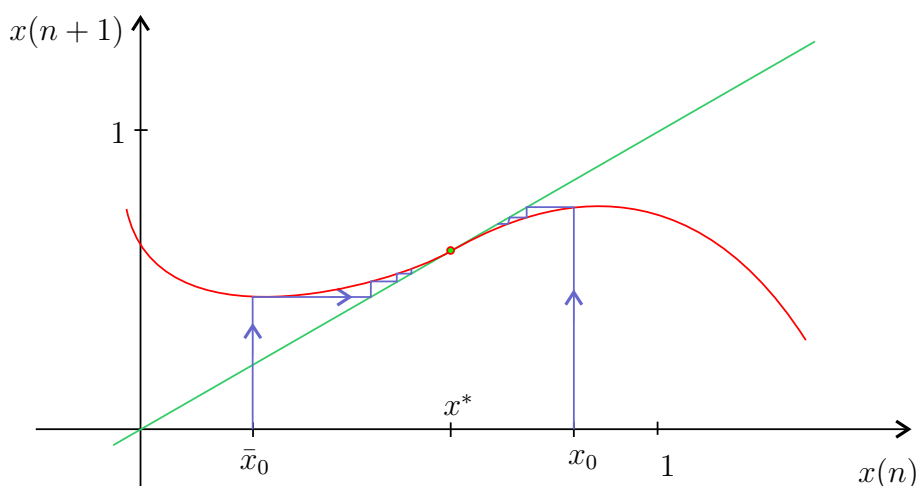
Obrázek 8: Nestabilní. $f''(x^*) > 0$ (semistabilní zleva).



Obrázek 9: Nestabilní. $f''(x^*) < 0$ (semistabilní zprava).



Obrázek 10: Nestabilní. $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) > 0$.



Obrázek 11: Asymptoticky stabilní. $f'(x^*) = 1$, $f''(x^*) = 0$ a $f'''(x^*) < 0$.

Předchozí výsledek použijeme při následujícím studiu případu $f'(x^*) = -1$. Před tím ale ještě představíme schwarzovskou derivaci funkce f :

$$S f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

Všimněte si, že pro $f'(x) = -1$ (naš studovaný případ) dostaneme

$$S f(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2} [f''(x)]^2.$$

Věta 3.3 Předpokládejme, že rovnovážný bod x^* diferenciální rovnice (19) má $f'(x^*) = -1$. Potom platí následující tvrzení:

- (i) Jestliže $S f(x^*) < 0$, potom je x^* asymptoticky stabilní.
- (ii) Jestliže $S f(x^*) > 0$, potom je x^* nestabilní.

Důkaz. Promyslíme si rovnici

$$y(n+1) = g(y(n)), \quad \text{kde } g(y) = f^2(y). \quad (22)$$

Zjistíme, že rovnovážné body původní rovnice (19) jsou také rovnovážnými body (22). Dále také platí: jestliže x^* je asymptoticky stabilní (nestabilní) pro (22), potom je tomu také pro (19). (Proč?) Nyní vypočteme derivaci g

$$\frac{d}{dy} g(y) = \frac{d}{dy} f(f(y)) = f'(f(y))f'(y).$$

Máme tedy

$$\frac{d}{dy} g(x^*) = [f'(x^*)]^2 = 1,$$

což nám umožňuje na tento případ použít Větu 3.2.

Potřebujeme vyčíslit druhou derivaci:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2} g(y) &= \frac{d^2}{dy^2} f(f(y)) = [f'(f(y))f'(y)]' \\ &= [f'(y)]^2 f''(f(y)) + f'(f(y))f''(y). \end{aligned}$$

Tudíž

$$\frac{d^2}{dy^2}g(x^*) = 0.$$

Takto nám Věta 3.2 říká (části (ii) a (iii)), že asymptotická stabilita x^* je určena znaménkem třetí derivace, která je v tomto případě

$$[g(x^*)]''' = -2f'''(x^*) - 3[f''(x^*)]^2. \quad (23)$$

Tímto jsme (s pomocí Věty 3.2) obdrželi části (i), (ii) a důkaz je hotov. \square

Příklad 3.9 Uvažujme diferenční rovnici $x(n+1) = x^2(n) + 3x(n)$. Nalezneme její rovnovážné body a určíme jejich stabilitu.

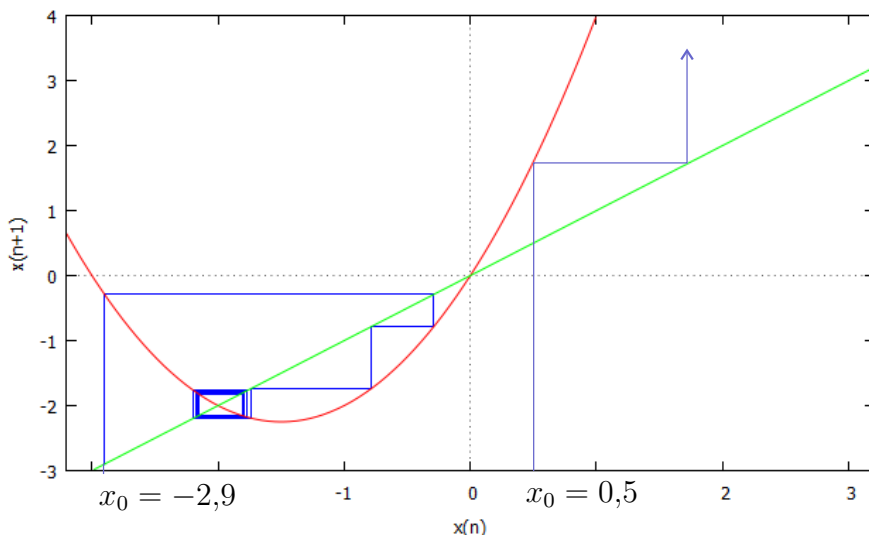
Řešení: Rovnovážné body jsou 0 a -2 , první derivace $f'(x) = 2x + 3$.

Jelikož $f'(0) = 3$, podle Věty 3.1 je nestabilní.

Pro druhý rovnovážný bod máme $f'(-2) = -1$, takže využijeme Větu 3.3. S využitím (23) dostaneme

$$-2f'''(-2) - 3[f''(-2)]^2 = -12 < 0,$$

tudíž podle Věty 3.3 je rovnovážný bod -2 asymptoticky stabilní. Obrázek 12 ilustruje schodový diagram zkoumané rovnice.



Obrázek 12: Schodový diagram pro $x(n+1) = x^2(n) + 3x(n)$.

Výsledek v předchozím příkladu lze zobecnit na obecné kvadratické zobrazení

$$Q(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Nechť x^* je rovnovážný bod tohoto zobrazení, tj. $Q(x^*) = x^*$. Potom platí následující dvě tvrzení.

- (i) Jestliže $Q'(x^*) = -1$, potom podle Věty 3.3 je rovnovážný bod x^* asymptoticky stabilní. Ve skutečnosti má $Q(x)$ dva rovnovážné body

$$x_{1,2}^* = \frac{(1-b) \mp \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}}{2a}.$$

Je snadné nahlédnout, že pro $Q'(x_1^*) = -1$ musí platit $(b-1)^2 = 4ac + 4$, zatímco $Q'(x_2^*) \neq -1$. Takže x_1^* je při $(b-1)^2 = 4ac + 4$ asymptoticky stabilní (cvičení 8).

- (ii) Jestliže $Q'(x^*) = 1$, potom podle Věty 3.2 je rovnovážný bod x^* nestabilní. V tomto případě máme pouze jeden rovnovážný bod $x^* = (1 - b)/2a$. x^* je tedy při $(b - 1)^2 = 4ac + 4$ nestabilní.

Cvičení k přednášce 3

U problémů 1–7 nalezněte rovnovážné body a určete jejich stabilitu s využitím Vět 3.1, 3.2 a 3.3.

1. $x(n + 1) = \frac{1}{2} [x^2(n) + x(n)]$.
2. $x(n + 1) = x^2(n) + \frac{1}{8}$.
3. $x(n + 1) = x \arctan x(n)$.
4. $x(n + 1) = x^2(n)$.
5. $x(n + 1) = x^3(n) + x(n)$.
6. $x(n + 1) = \frac{\alpha x(n)}{1 + \beta x(n)}$, $\alpha > 1$, $\beta > 0$.
7. $x(n + 1) = -x^3(n) - x(n)$.
8. Nechť $Q(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, a x^* je pevný bod Q . Dokažte následující tvrzení:
 - (i) Jestliže $Q'(x^*) = -1$, potom je x^* asymptoticky stabilní.
 - (ii) Jestliže $Q'(x^*) = 1$, potom je x^* nestabilní.
9. Ukažte, že nerovnost $|f'(x^*)| < 1$ implikuje existenci intervalu $J = (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, na kterém platí $|f'(x^*)| \leq M < 1$ pro všechna $x \in J$ a pro nějakou konstantu M .
10. Předpokládejte, že v (21) je $g(x^*) = g'(x^*) = 0$ a $g''(x^*) \neq 0$. Dokažte, že x^* je rovnovážným bodem (21).
11. Dokažte část (ii) Věty 3.1.
12. Dokažte, že každý rovnovážný bod (19) je také rovnovážným bodem (22). Také ukažte, že v opačném směru to tak nefunguje.
13. Dokažte, že rovnovážné body (19), které jsou asymptoticky stabilní (nestabilní) pro (22), jsou takové i pro (19). Asymptotickou stabilitu a nestabilitu rovnovážných bodů (19) tedy můžeme vyšetřovat přes (22).
14. Ověřte formuli (23).
15. Dokažte části (ii) a (iii) Věty 3.2.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika na PřF Univerzity Palackého
v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

KMA/DDS, DDSM

Diskrétní dynamické systémy

Periodické body, cykly a jejich stabilita

Přednáška 4

4 Periodické body a cykly

Druhým nejvýznamnějším prvkem při studiu dynamického systému je pojem periodicity. Například pohyb kyvadla je periodický.

Definice 4.4 Nechť b leží v definičním oboru zobrazení f . Potom:

- (i) b nazýváme *periodický bod* zobrazení f (nebo (19)), jestliže pro nějaké přirozené k je $f^k(b) = b$ a $f^i(b) \neq b$ pro $i = 1, 2, \dots, k - 1$. To znamená, že bod je *k-periodický*, jestliže je pevným bodem f^k , tj., jestliže je rovnovážným bodem diferenční rovnice

$$x(n + 1) = g(x(n)), \quad (24)$$

kde $g = f^k$.

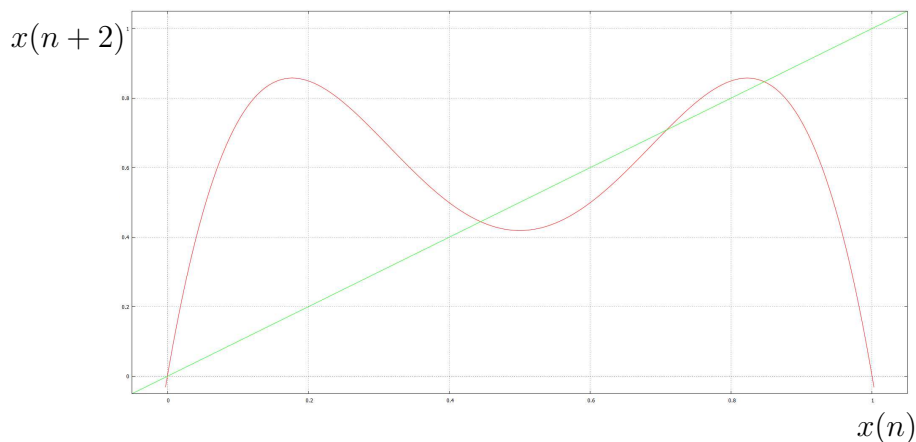
Periodická orbita bodu b ,

$$O(b) = \{b, f(b), f^2(b), \dots, f^{k-1}(b)\},$$

je často nazývána *k-cykl*.

- (ii) b nazveme *eventuálně k-periodickým*, jestliže pro nějaké přirozené m je $f^m(b)$ *k-periodickým* bodem. Jinými slovy, b je *eventuálně k-periodické*, jestliže

$$f^{m+k}(b) = f^m(b).$$

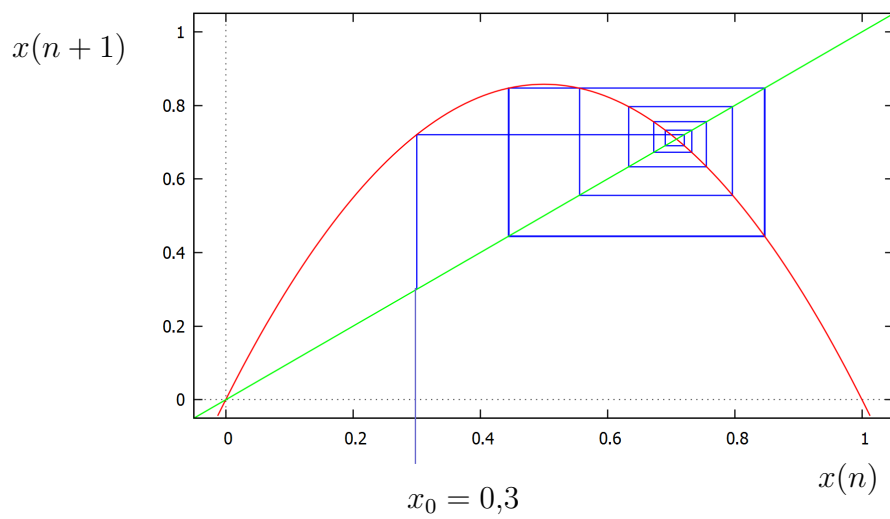


Obrázek 13: Graf f^2 se čtyřmi pevnými body. $f(x) = 3,43x(1 - x)$.

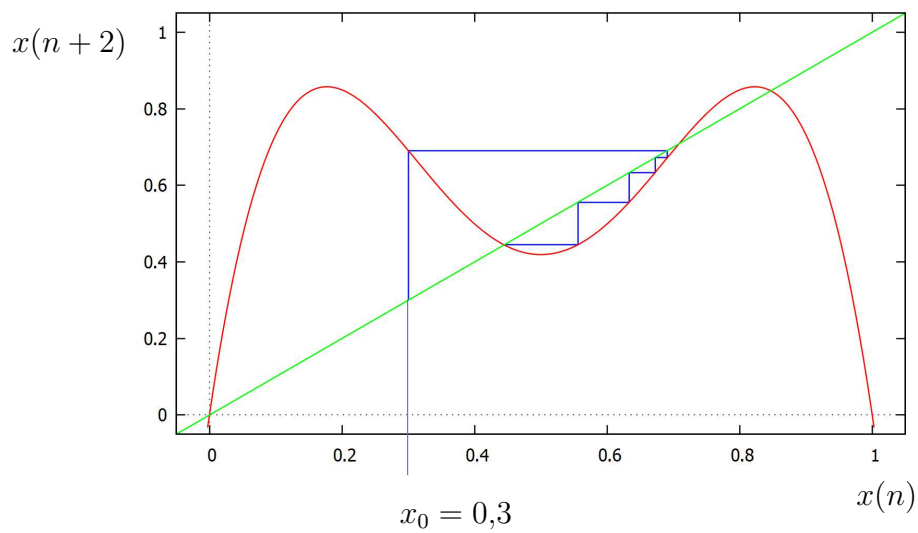
Graficky je *k-periodický* bod x -ovou souřadnicí průsečíku grafu f^k s osou prvního kvadrantu (diagonálou $y = x$). Obrázek 13 obsahuje graf f^2 , kde f je logistické zobrazení. Je vidět, že má čtyři pevné body, z nichž dva jsou pevnými body f (viz obrázek 14) a dva zbývající tvoří 2-cykl. Poznamenejme, že bod $x_0 = 0,3$ (na obrázku 14) přechází po několika iteracích na 2-cykl, a tak jde o eventuálně 2-periodický bod. Navíc je bod $x^* \approx 0,445$ asymptoticky stabilní vzhledem k f^2 (obrázek 15).

Příklad 4.10 Uvažujme znova diferenční rovnici generovanou stanovým zobrazením

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \text{pro } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$



Obrázek 14: x_0 přechází na 2-cykl. $f(x) = 3,43x(1 - x)$.



Obrázek 15: $x^* \approx 0,445$ je asymptoticky stabilní vzhledem k f^2 .

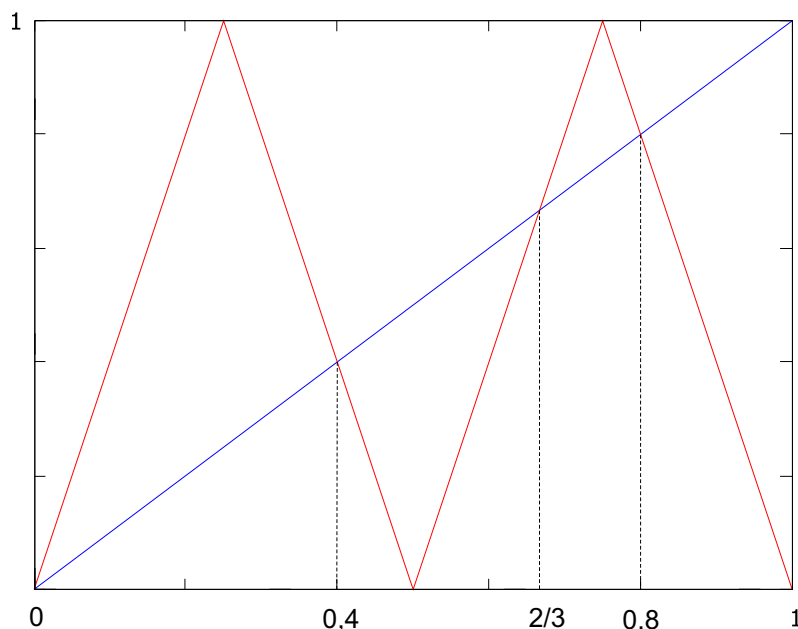
které také můžeme zapsat v úspornějším tvaru

$$T(x) = 1 - 2 \left| x - \frac{1}{2} \right|.$$

Pevné body T^2 , a tedy 2-periodické body T , budeme hledat pomocí předpisu pro T^2 :

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x & \text{pro } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ 2(1 - 2x) & \text{pro } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 4\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{pro } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ 4(1 - x) & \text{pro } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Můžeme nalézt čtyři pevné body (obrázek 16): 0 , $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{5}$. Dva z nich (0 a $\frac{2}{3}$) jsou pevnými body T , takže $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ je jediným 2-cyklem zobrazení T . Prohlédněte si obrázek 17 a zjistíte, že bod $x^* = 0,8$ je nestabilní vzhledem k T^2 .



Obrázek 16: Pevné body T^2 .

Obrázek 18 popisuje graf T^3 . Dá se ukázat, že $\left\{\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}\right\}$ je 3-cykl:

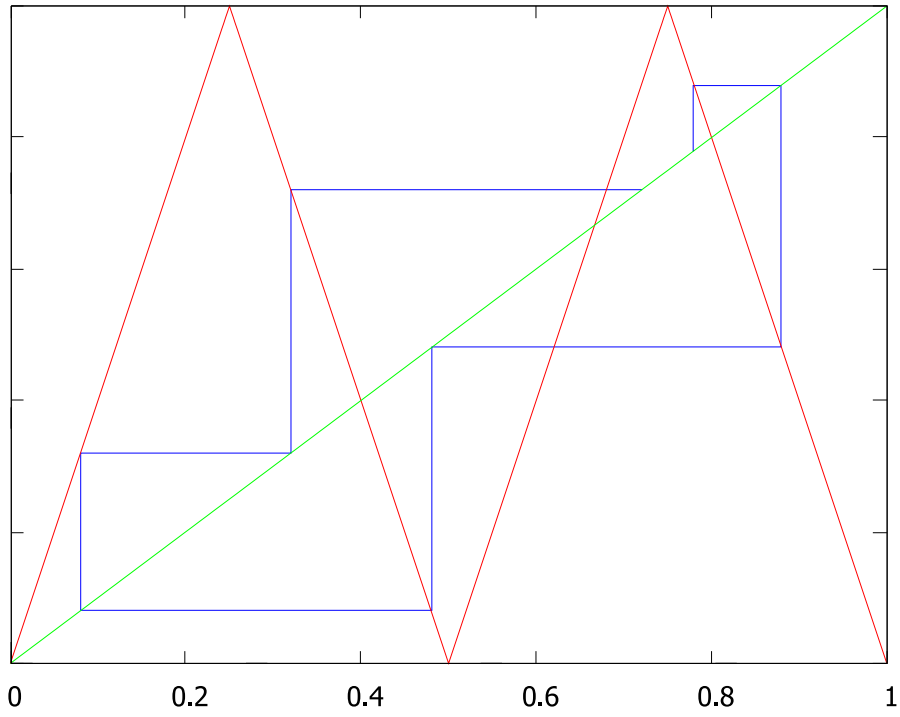
$$T\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7}, \quad T\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{6}{7}, \quad T\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{2}{7}.$$

Je známo, že stanové zobrazení T má periodické body (cykly) všech period. Toto je vlastnost, kterou společně sdílí všechna spojitá zobrazení s 3-cyklem. Tento fenomén byl objeven v [3] a dříve v [7].

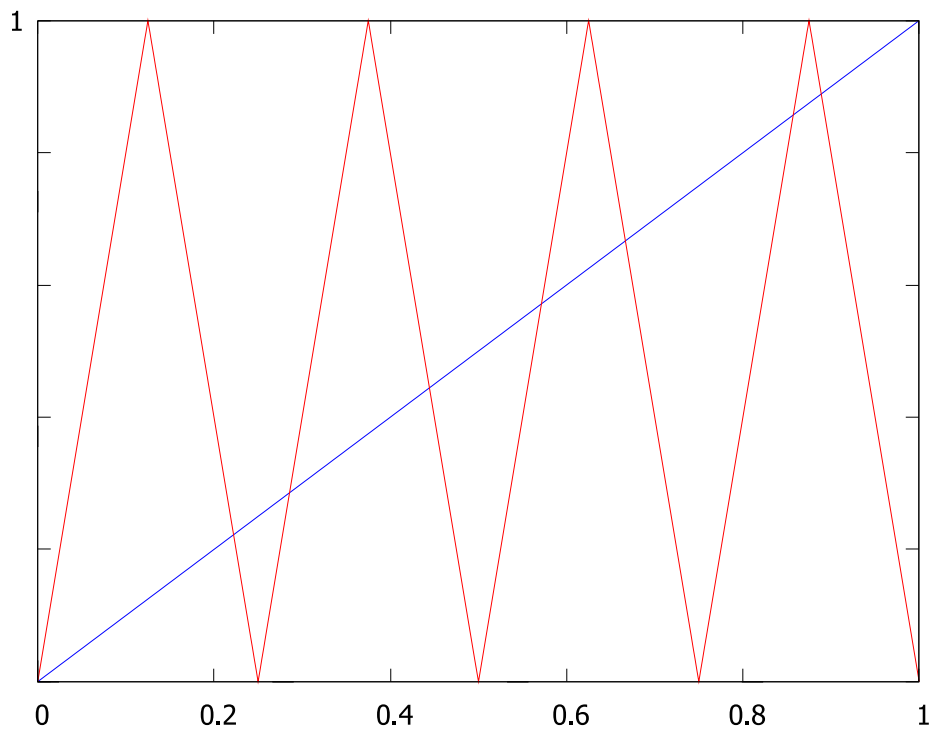
A jak je to se stabilitou periodických bodů?

Definice 4.5 Nechť b je k -periodický bod zobrazení f . Potom b je:

- (i) stabilní, jestliže je stabilním pevným bodem f^k ,
- (ii) asymptoticky stabilní, jestliže je asymptoticky stabilním pevným bodem f^k ,



Obrázek 17: $x^* = 0,8$ je nestabilní vzhledem k T^2 .



Obrázek 18: Pevné body T^3 .

(iii) nestabilní, jestliže je nestabilním pevným bodem f^k .

Je nasnadě, že při (ne)stabilitě jednoho bodu k -cyklu jsou ostatní body tohoto k -cyklu také (ne)stabilní. Můžeme tedy hovořit o stabilitě celého k -cyklu nebo periodické orbity. Obrázek 17 naznačuje, že 2-cykl stanového zobrazení není stabilní, neboť $x^* = 0,8$ není stabilní jako pevný bod T^2 . Příklad asymptoticky stabilního 2-cyklu logistického zobrazení je na obrázku 15.

Zúžením na zkoumání stability pevných bodů zobrazení f^k máme k dispozici všechny předchozí věty o stabilitě pevných bodů zobrazení f . Například věta 3.1 se dá přepsat následovně:

Věta 4.4 *Nechť $O(b) = \{b = x(0), x(1), \dots, x(k-1)\}$ je k -cykl spojitě diferencovatelné funkce f . Potom jsou pravdivé následující výroky:*

(i) k -cykl $O(b)$ je asymptoticky stabilní, jestliže

$$|f'(x(0))f'(x(1)) \cdots f'(x(k-1))| < 1.$$

(ii) k -cykl $O(b)$ je nestabilní, jestliže

$$|f'(x(0))f'(x(1)) \cdots f'(x(k-1))| > 1.$$

Důkaz. Na (24) aplikujeme větu 3.1. S použitím pravidla řetězení můžeme ukázat, že

$$[f^k(x(r))]' = f'(x(0))f'(x(1)) \cdots f'(x(k-1)).$$

(Viz Cvičení 4, úloha 12). □

Na příkladu si ukážeme důsledek této věty.

Příklad 4.11 Uvažujme zobrazení $Q(x) = x^2 - 0,85$ definované na intervalu $[-2, 2]$. Najdeme 2-cykly a určíme jejich stabilitu.

Řešení Všimněme si, že $Q^2(x) = (x^2 - 0,85)^2 - 0,85$. 2-periodické body dostaneme vyřešením rovnice

$$Q^2(x) = x, \text{ nebo } x^4 - 1,7x^2 - x - 0,1275 = 0. \quad (25)$$

Tato rovnice má čtyři kořeny, z nichž dva jsou pevnými body zobrazení $Q(x)$. Tyto dva pevné body jsou kořeny rovnice

$$x^2 - x - 0,85 = 0. \quad (26)$$

Abychom tyto pevné body vyloučili z (25), vydělíme levou stranu (25) levou stranou (26). Dostaneme rovnici

$$x^2 + x + 0,15 = 0. \quad (27)$$

2-periodické body jsou tedy řešeními této rovnice (27), konkrétně

$$a = \frac{-1 + \sqrt{0,4}}{2}, \quad b = \frac{-1 - \sqrt{0,4}}{2}.$$

Nyní na 2-cykl $\{a, b\}$ aplikujeme větu 4.4:

$$|Q'(a)Q'(b)| = |(-1 + \sqrt{0,4})(-1 - \sqrt{0,4})| = 0,6 < 1.$$

Takže podle věty 4.4, části (i), je tento 2-cykl asymptoticky stabilní.

Cvičení k přednášce 4

1. Předpokládejme, že diferenční rovnice $x(n+1) = f(x(n))$ má 2-cykl s orbitou $\{a, b\}$. Dokažte, že
 - (i) tento 2-cykl je asymptoticky stabilní, jestliže $|f'(a)f'(b)| < 1$,
 - (ii) tento 2-cykl je nestabilní, jestliže $|f'(a)f'(b)| > 1$.
2. Nechť T je stanové zobrazení z příkladu 3.9 na straně 25. Ukažte, že $\left\{\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right\}$ je pro T odpuzující 3-cykl.
3. Nechť $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$. Ukažte, že 1 je pro f přitažlivý 2-periodický bod.

U problémů 4 až 6 nalezněte 2-cykly a určete jejich stabilitu.

4. $x(n+1) = 2,5x(n)[1 - x(n)]$.
5. $x(n+1) = 1 - x^2$.
6. $x(n+1) = 5 - \frac{6}{x(n)}$.
7. Nechť $f(x) = ax^3 - bx + 1$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Nalezněte všechny hodnoty a a b takové, že $\{0, 1\}$ je přitažlivý 2-cykl.

Uvažujte Bakerovo zobrazení, které je definováno následujícím předpisem:

$$B(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 & \text{pro } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Problémy 8 až 10 jsou pro Bakerovo zobrazení na $[0, 1]$.

8. Namalujte Bakerovu funkci $B(x)$. Potom pro B nalezněte počet n -periodických bodů.
9. Načrtněte graf B^2 a potom nalezněte 2-cykly.
10. Ukažte, že platí následující implikace: jestliže je m liché kladné celé číslo, potom $\bar{x} = \frac{k}{m}$ jsou periodické pro $k = 1, 2, \dots, m - 1$.
11. Uvažujte kvadratické zobrazení

$$Q(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

- (a) $\{d, e\}$ je 2-cykl, pro který je $Q'(d)Q'(e) = -1$. Dokažte, že je asymptoticky stabilní.
 - (b) $\{d, e\}$ je 2-cykl, pro který je $Q'(d)Q'(e) = 1$. Co můžete říci o jeho stabilitě?
12. (Zobecnění problému 1) Nechť $\{x(0), x(1), \dots, x(k-1)\}$ je k -cykl (3). Dokažte, že
 - (i) jestliže $|f'(x(0))f'(x(1)) \cdots f'(x(k-1))| < 1$, potom je tento k -cykl asymptoticky stabilní,

(ii) jestliže $|f'(x(0))f'(x(1)) \cdots f'(x(k-1))| > 1$, potom je tento k -cykl nestabilní.

13. Uveďte příklad klesající funkce, která má pevný bod a 2-cykl.

14. (i) Může mít klesající funkce k -cykl pro $k > 1$?

(ii) Může mít rostoucí funkce k -cykl pro $k > 1$?



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika na PřF Univerzity Palackého
v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

KMA/DDS, DDSM

Diskrétní dynamické systémy

Logistická rovnice a bifurkace

Přednáška 5

5 Logistická rovnice a bifurkace

Nyní se vrátíme k nejvýznamnějšímu příkladu v této kapitole, logistické diferenční rovnici

$$x(n+1) = \mu x(n)[1 - x(n)], \quad (28)$$

která se váže k iterování funkce

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x), \quad x \in [0, 1], \quad \mu > 0. \quad (29)$$

5.1 Rovnovážné body

Pro nalezení rovnovážných bodů (28) řešíme rovnici

$$F_\mu(x^*) = x^*.$$

Nalezenými body jsou 0 a $\frac{\mu-1}{\mu}$. Dále budeme zkoumat stabilitu těchto bodů v závislosti na hodnotách parametru μ .

(a) Rovnovážný bod 0. (Viz obrázky 19–21). Jelikož je $F'_\mu(0) = \mu$, podle vět 3.1 a 3.2 dostáváme přímo:

- (i) 0 je asymptoticky stabilní rovnovážný bod pro $0 < \mu < 1$,
- (ii) 0 je nestabilní pro $\mu > 1$.

Případ $\mu = 1$ vyžaduje speciální pozornost. Již víme, že $F'_1(0) = 1$. Dále $F''_1(0) = -2 \neq 0$. Podle věty 3.2 jde tedy 0 nestabilní. To je jistě pravda, když uvažujeme levé (záporné) i pravé (kladné) okolí nuly. Jelikož je zde stabilita porušena jen zleva, zatímco zprava se bod 0 chová jako asymptoticky stabilní, můžeme zde hovořit o asymptotické polostabilitě zprava. Zde však levé okolí nepatří do definičního oboru F_μ , a tak bod nula je pro naši rovnici asymptoticky stabilní na celém intervalu $[0, 1]$.

(b) Rovnovážný bod $x^* = \frac{\mu-1}{\mu}$, $\mu \neq 1$. (Viz obrázky 22–23).

Abychom měli $x^* \in (0, 1]$, musí být $\mu > 1$. Hodnota první derivace: $F'_\mu\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right) = 2 - \mu$. S využitím vět 3.1 a 3.3 dostáváme:

- (i) x^* je asymptoticky stabilní pro $1 < \mu \leq 3$ (obrázek 22).
- (ii) x^* je nestabilní pro $\mu > 3$ (obrázek 23).

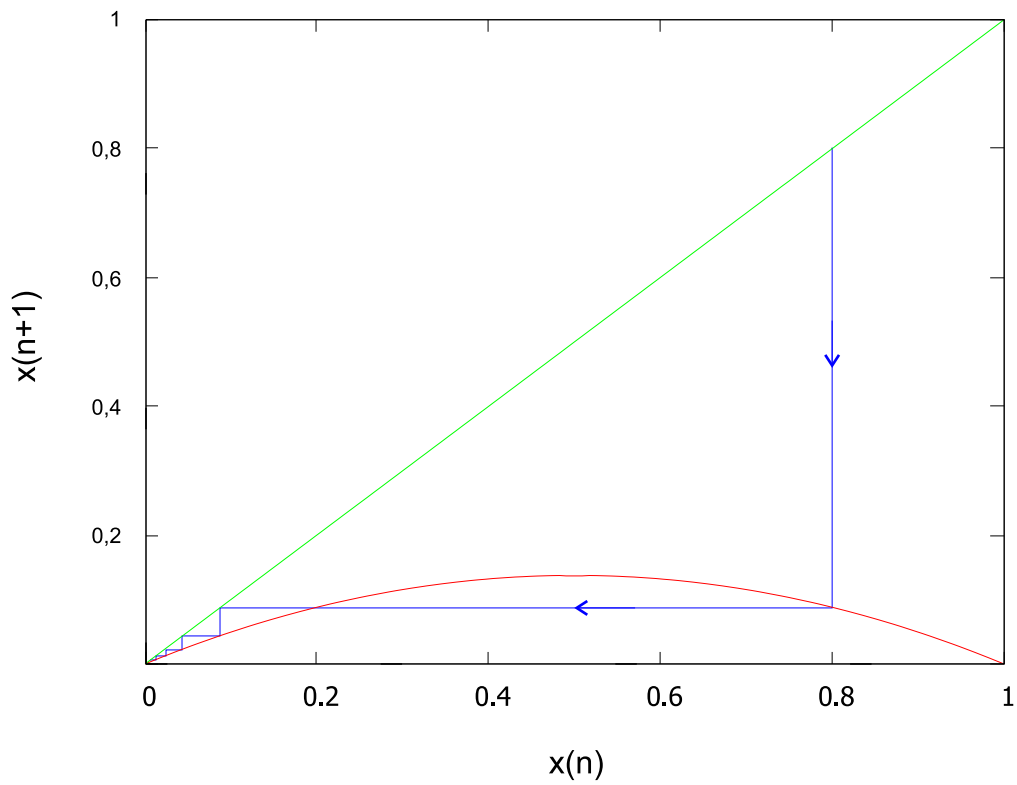
5.2 2-cykly

Hledáme-li 2-cykly, řešíme rovnici $F_\mu^2(x) = x$, tedy

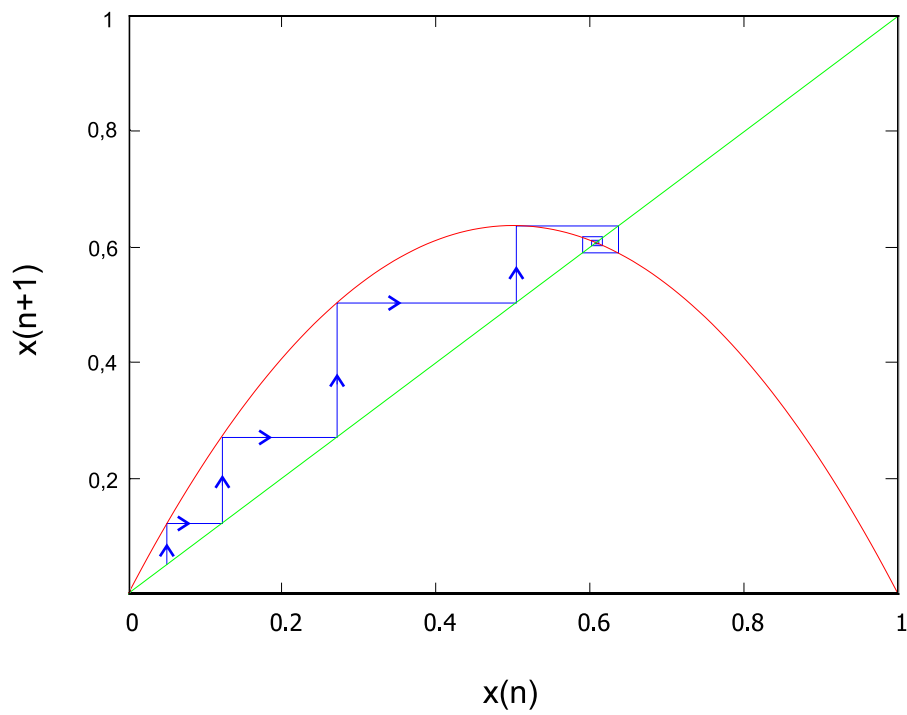
$$\mu^2 x(1-x)[1 - \mu x(1-x)] - x = 0. \quad (30)$$

Když chceme z řešení vyloučit pevné body 0 a $\frac{\mu-1}{\mu}$, vydělíme rovnici (30) polynomem $x(x - \frac{\mu-1}{\mu})$. Obdržíme kvadratickou rovnici

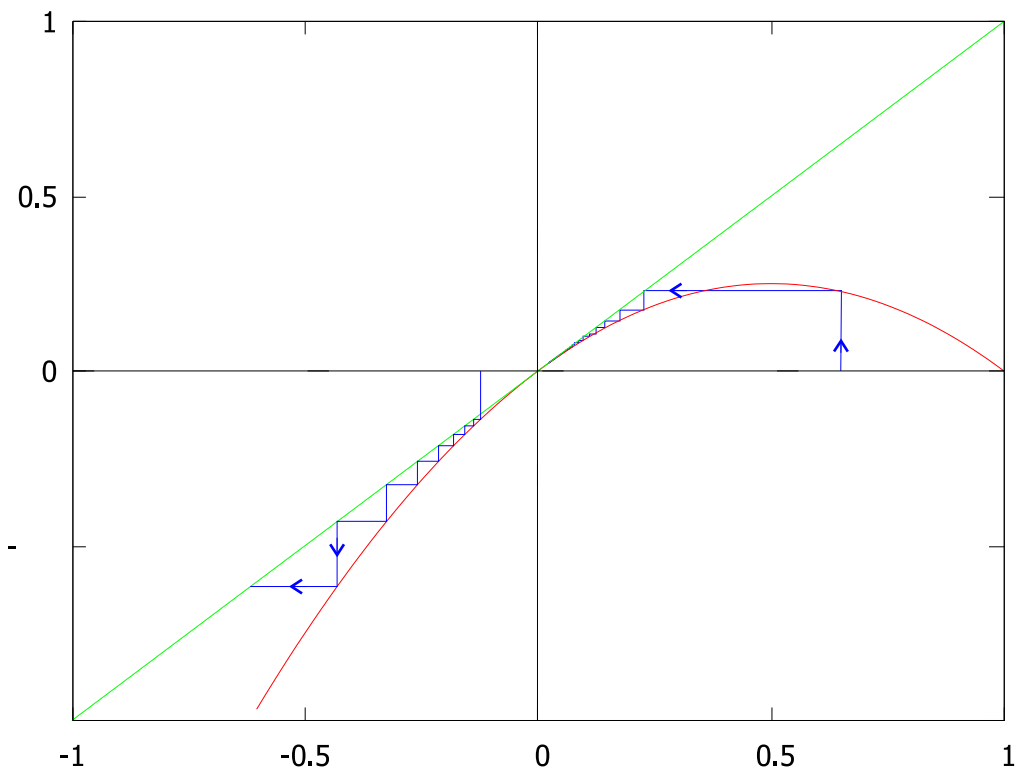
$$\mu^2 x^2 - \mu(\mu+1)x + \mu + 1 = 0.$$



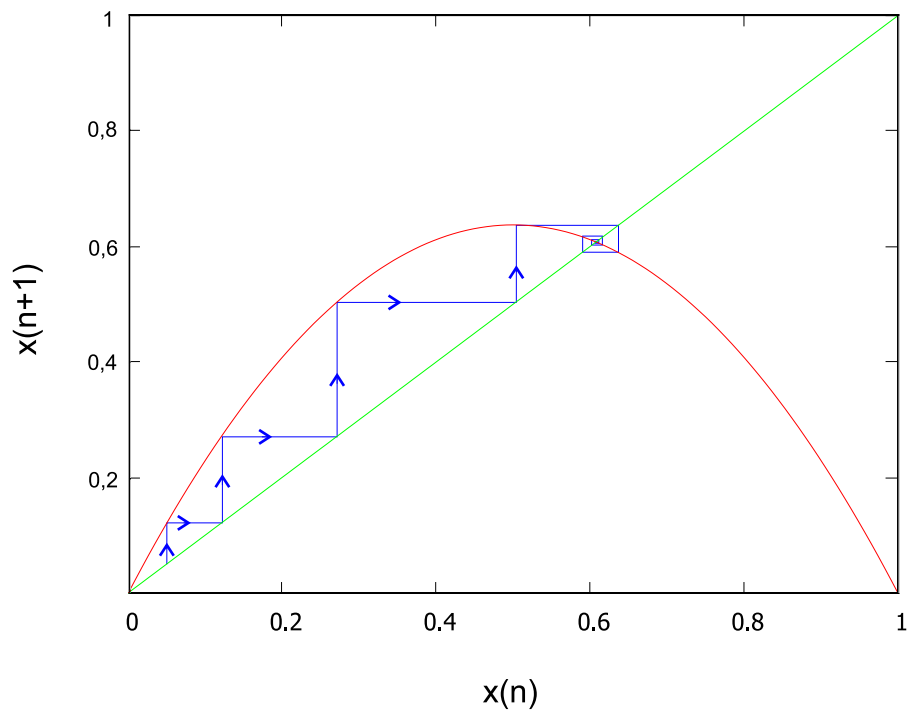
Obrázek 19: Pro $0 < \mu < 1$ je 0 asymptoticky stabilní pevný bod.



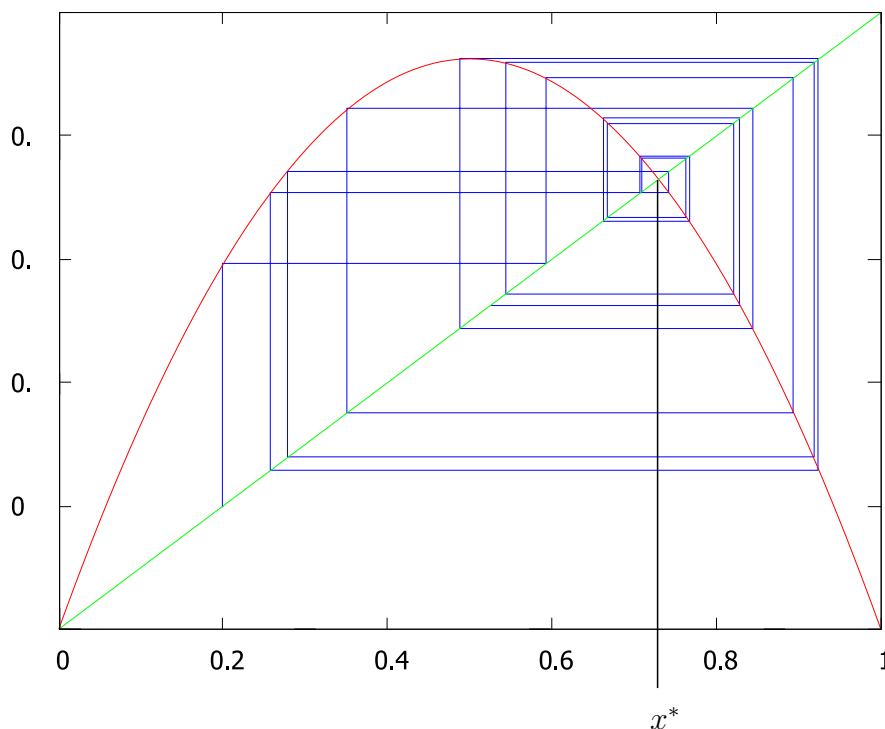
Obrázek 20: Pro $\mu > 1$ je 0 nestabilní pevný bod.



Obrázek 21: Pro $\mu = 1$ je 0 asymptoticky stabilní pevný bod (uvažujeme jen její pravé okolí).



Obrázek 22: Pro $1 < \mu \leq 3$ je $x^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ asymptoticky stabilní pevný bod.



Obrázek 23: Pro $\mu > 3$ je $x^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ nestabilní pevný bod.

Řešeními jsou body 2-cyklu

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu}, \\ x(1) &= \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu - 3)(\mu + 1)}}{2\mu}. \end{aligned} \quad (31)$$

Z definičního oboru těchto řešení je zřejmé, že takový 2-cyklus existuje pouze pro $\mu > 3$ (pro $\mu = 3$ obě řešení splynou). Označme tuto hraniční hodnotu parametru μ jako $\mu_0 (= 3)$.

Podle věty 4.4 je 2-cykl asymptoticky stabilní, když

$$|F'_\mu(x(0))F'_\mu(x(1))| < 1,$$

tedy konkrétně

$$-1 < \mu^2(1 - 2x(0))(1 - 2x(1)) < 1. \quad (32)$$

Dosazením za $x(0)$ a $x(1)$ a po úpravách dostaneme:

$$-1 < \mu^2 \left(1 - 2 \frac{\mu+1-\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2\mu} \right) \left(1 - 2 \frac{\mu+1+\sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2\mu} \right) < 1,$$

$$-1 < 1 - (\mu - 3)(\mu + 1) < 1.$$

To je splněno pro

$$\mu < 1 + \sqrt{6} \approx 3,44949.$$

Závěr Zkoumaný 2-cyklus je asymptoticky stabilní pro $3 < \mu < 3,44949 \dots$

Otázka Co se stane, když $\mu = \mu_1 = 1 + \sqrt{6}$?

V tomto případě je

$$\left[F_{\mu_1}^2(x(0)) \right]' = F_{\mu_1}'(x(0)) F_{\mu_1}'(x(1)) = -1. \quad (33)$$

(Viz Cvičení 5, úloha 7).

Tudíž můžeme použít větu 3.3, kde podle části (i) zjistíme, že náš 2-cykl je pro μ_1 také asymptoticky stabilní, zatímco pro $\mu > \mu_1$ je již nestabilní.

5.3 4-cykly

I nadále budeme značit $\mu_1 = 1 + \sqrt{6}$.

Při hledání 4-cyklů řešíme rovnici $F_{\mu}^4(x) = x$. To už by bylo poměrně složité, a tak výpočet necháme na počítači. Vychází nám, že 2²-cykl pro $\mu > \mu_1$ existuje a je asymptoticky stabilní pro $\mu_1 = 1 + \sqrt{6} < \mu \leq 3.544090 \dots = \mu_2$, zatímco pro $\mu > \mu_2$ je již nestabilní.

Při $\mu = \mu_2$ 2²-cykl bifurkuje na 2³-cykl. Tento je asymptoticky stabilní pro $\mu_2 < \mu < \mu_3$, kde μ_3 je jisté číslo. Tento proces zdvojování periody pokračuje do nekonečna (∞ -cykl), takže existuje posloupnost hodnot $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde při $\mu = \mu_n$ dochází k bifurkaci z 2ⁿ-cyklu na 2ⁿ⁺¹-cykl (viz obrázky 24 a 25). Tabulka 4 zachycuje podivuhodný fenomén. Můžeme z ní vyčíst následující pozorování:

(i) Posloupnost $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ zřejmě konverguje k číslu $\mu_{\infty} = 3,57 \dots$

(ii) Podíl

$$\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$$

zřejmě konverguje k číslu

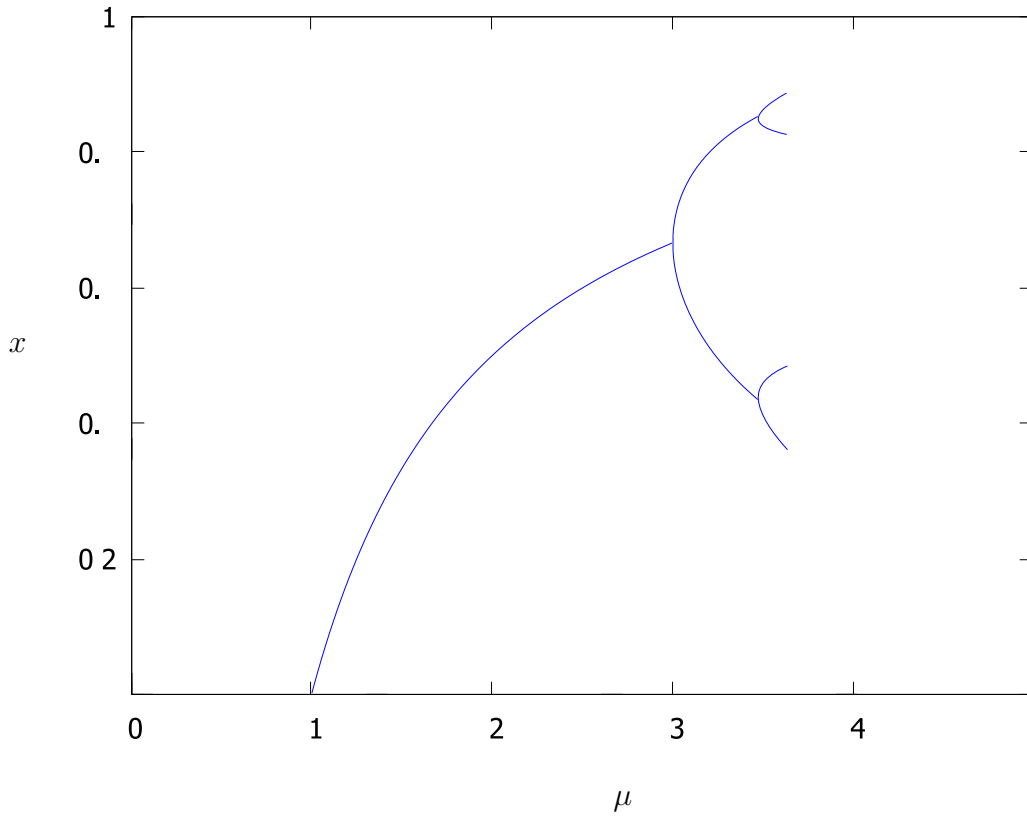
$$\delta = 4,6692016 \dots$$

Tato hodnota bývá nazývána *Feigenbaumova konstanta* (podle jejího objevitele, fyzika Mitchella Feigenbauma).

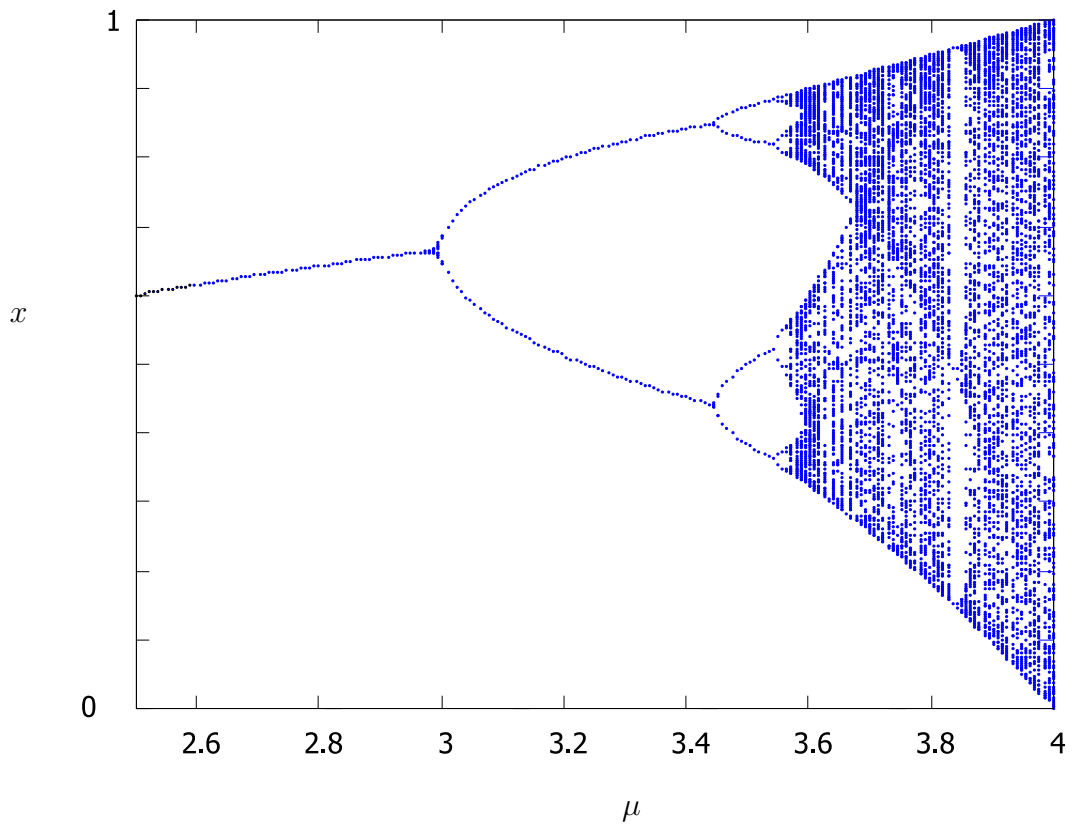
Ve skutečnosti M. Feigenbaum odhalil mnohem víc. Číslo δ (na rozdíl od hodnoty μ_{∞}) je univerzální pro hladké funkce zobrazující nějaký interval do sebe.

n	μ_n	$\mu_n - \mu_{n-1}$	$\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n}$
0	3	—	—
1	3,449499...	0,449499...	—
2	3,544090...	0,094591...	4,752027...
3	3,564407...	0,020313...	4,656673...
4	3,568759...	0,004352...	4,667509...
5	3,569692...	0,00093219...	4,668576...
6	3,569891...	0,00019964...	4,669354...

Tabulka 4: Feigenbaumova tabulka.



Obrázek 24: Částečný bifurkační diagram pro F_μ .



Obrázek 25: Bifurkační diagram pro F_μ .

5.4 Bifurkační diagram

Zde horizontální osa představuje hodnoty parametru μ , zatímco vertikální vyší iterace $F_\mu^n(x)$. Pro konkrétní x_0 diagram ukazuje asymptotické chování iterací $F_\mu^n(x_0)$.

Na obrázku 24 je naznačena část bifurkačního diagramu logistického zobrazení znázorňující dva případy zdvojování periody (pro $\mu_{1,2}$), přičemž jsou zobrazeny pouze asymptoticky stabilní cykly.

Na obrázku 25 je již numericky vygenerovaný bifurkační diagram logistického zobrazení s parametry $x_0 = \frac{1}{2}$, $\mu \in [0, 4]$ (s krokem $\frac{1}{500}$) a zobrazeny jsou všechny body $(\mu, F_\mu^n(\frac{1}{2}))$ pro $200 \leq n \leq 500$.

Otázka Co se děje při $\mu > \mu_\infty$?

Odpověď Na obrázku 25 vidíme, že pro $\mu_\infty < \mu \leq 4$ existuje velké množství malých oken, kde přitažlivou množinou je asymptoticky stabilní cykl. Největší okno je kolem $\mu = 3,828427\dots$, kde máme přitažlivý 3-cykl. Ve skutečnosti zde máme k -cykly pro všechna přirozená k , ale jejich okna jsou příliš malá na to, abychom je mohli bez příslušného zvětšení vidět. Stejně jako pro $\mu < \mu_\infty$, tyto cykly bifurkují, zdvojují periodu — vznikají asymptoticky stabilní 2^k -cykly, a sami přitom ztrácejí stabilitu. Mimo tato okna obrázek vypadá chaoticky.

Poznámka 5.2 Naše analýza logistického zobrazení může být zopakována pro libovolné kvadratické zobrazení

$$Q(x) = ax^2 + bx + c.$$

Iterování kvadratického zobrazení Q (při vhodné volbě parametrů) je totiž ekvivalentní iterování logistického zobrazení. Jinými slovy, zobrazení Q a F_μ mají stejné kvalitativní chování.

Dá se ukázat, že můžeme transformovat diferenční rovnici

$$y(n+1) = y^2(n) + c \tag{34}$$

na

$$x(n+1) = \mu x(n) [1 - x(n)], \tag{35}$$

a to pomocí substituce

$$y(n) = -\mu x(n) + \frac{\mu}{2}, \quad c = \frac{\mu}{2} - \frac{\mu^2}{4}. \tag{36}$$

Takto $\mu = 2$ odpovídá $c = 0$ a $\mu = 3$ zase $c = \frac{-3}{4} \dots$. Přirozeně očekáváme, stejné chování při odpovídajících si hodnotách parametrů μ a c .

Poznámka 5.3 Ne všechny body musí nutně konvergovat k nějaké asymptoticky stabilní periodické orbitě. Ani otázka, které body konvergují k dané periodické orbitě není triviální.

Doplňek A: Šarkovského a Li-Yorkova věta

Může současně existovat více periodických atraktorů? Tato otázka nás přivádí ke slavné větě A. N. Šarkovského.

V roce 1964 představil A. N. Šarkovskij nové uspořádání přirozených čísel

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots$$

$$\dots 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^{n+1} \cdot 3 \triangleright 2^{n+1} \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^{n+1} \triangleright 2^n \triangleright \dots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Pro takto uspořádaná přirozená čísla vyslovil v [7] následující větu (pro srovnání viz [5, V.3.1.5]).

Věta 5.5 ((A. N. Šarkovskij) *Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Jestliže f má bod o periodě n , potom má také bod o periodě k , pro každé $k \in \mathbb{N}$, $n \triangleright k$ (Šarkovského uspořádání).*

V roce 1975 T. Li a J. Yorke (nezávisle na Šarkovském) publikovali v [3] slabší verzi věty 5.5:

Věta 5.6 (T. Li–J. Yorke) *Předpokládejme, že $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a že pro ni existuje bod a a takový, že buď*

$$(i) \quad f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a) \text{ nebo}$$

$$(ii) \quad f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a).$$

Potom f má body všech period.

Vliv obou vět na rozvoj moderní teorie dynamických systémů je enormní.

Cvičení k přednášce 5

Pokud nebude řečeno jinak, všechny následující problémy se vztahují k logistické diferenční rovnici.

1. S pomocí grafu F_4^k , $k = 1, 2, 3, \dots$, demonstруйте, že pro F_4 je součet periodických bodů s periodou k a bodů s periodou která dělí k nejméně 2^k .
2. Nalezněte řešení diferenční rovnice

$$x(n+1) = 4x(n)(1-x(n))$$

pomocí substituce $x(n) = \sin^2 \theta(n)$.

Řešení Provedeme navrhovanou substituci:

$$\sin^2 \theta(n+1) = 4 \sin^2 \theta(n)(1 - \sin^2 \theta(n)).$$

Úpravami dostaneme

$$\sin^2 \theta(n+1) = \sin^2 2\theta(n)$$

$$|\sin \theta(n+1)| = |\sin 2\theta(n)|.$$

Nyní můžeme rozlišit dva případy

- $\theta(n+1) = 2\theta(n) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\theta(n+1) = -2\theta(n) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Oba představují snadno řešitelné lineární diferenční rovnice prvního řádu, proto

•

$$\theta(n) = \theta_0 \prod_{i=0}^{n-1} 2 + \sum_{n-1}^{i=0} \left(\prod_{n-1}^{r=i+1} 2 \right) k\pi,$$

$$\theta(n) = \theta_0 2^n + k\pi(2^n - 2) = \theta_0 2^n + k\pi.$$

•

$$\theta(n) = \theta_0 \prod_{i=0}^{n-1} (-2) + \sum_{n-1}^{i=0} \left(\prod_{n-1}^{r=i+1} (-2) \right) k\pi,$$
$$\theta(n) = \theta_0 (-2)^n + k\pi \frac{(-2)^n + 2}{-3} = \theta_0 (-2)^n + k\pi.$$

Ze substituce plyne

$$\theta(0) = \arcsin \left(\sqrt{x(0)} \right).$$

Dohromady tedy

$$x(n) = \sin^2 \left(\arcsin \left(\sqrt{x(0)} \right) 2^n + k\pi \right)$$

nebo

$$x(n) = \sin^2 \left(\arcsin \left(\sqrt{x(0)} \right) (-2)^n + k\pi \right).$$

Z periodicity a lichosti funkce $\sin x$ plyne, že

$$x(n) = \sin^2 \left(\arcsin \left(\sqrt{x(0)} \right) 2^n \right).$$

3. Nechť $x^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ je rovnovážný bod (28). Ukažte, že:

(i) Pro $1 < \mu \leq 3$ je x^* přitažlivým pevným bodem.

(ii) Pro $\mu > 3$ je x^* odpuzujícím pevným bodem.

4. Dokažte, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_2^n = \frac{1}{2},$$

jestliže $0 < x < 1$.

Řešení Pro $\mu = 2$ máme

$$F_2^n = 2x(1-x).$$

V diferenční rovnici

$$x(n+1) = 2x(n)(1-x(n))$$

označme

$$d(n) = \frac{1}{2} - x(n).$$

Bude platit

$$x(n+1) = 2\left(\frac{1}{2} - d(n)\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2} - d(n)\right)\right) = \frac{1}{2} - 2d^2(n).$$

Z dosazení

$$d(n+1) = \frac{1}{2} - x(n+1)$$

plyne, že

$$d(n+1) = 2d^2(n).$$

Nyní položíme $d(1) = d$, kde podle zadání

$$-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}.$$

Pak

$$d(n) = 2^{2^{n-1}-1} d^{2^{n-1}} = \frac{1}{2} (2d)^{2^{n-1}}.$$

$\{d(n)\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje k 0, proto $x(n)$ konverguje k $\frac{1}{2}$.

5. Necht' $1 < \mu \leq 2$ a necht' $x^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ je rovnovážný bod (28). Ukažte, že pro $x^* < x < \frac{1}{2}$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mu}^n(x) = x^*$.
6. Dokažte, že 2-cykl (31) je pro $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ přitažlivý.
7. Ověřte formuli (33). Potom ukažte, že 2-cykl (31) je pro $\mu = 1 + \sqrt{6}$ přitažlivý.
8. S využitím kalkulačky nebo počítače ověřte, že $\mu_2 \approx 3,54$.
9. (Projekt) Ukažte, že zobrazení $H_{\mu}(x) = \sin \mu x$ vede ke stejné hodnotě Feigenbaumovy konstanty δ . (Opět použijte počítač).
10. Ukažte, že když $|\mu - \mu_1| < \epsilon$, potom $|F_{\mu} - F_{\mu_1}| < \epsilon$ pro každé $x \in [0, 1]$.

Řešení Můžeme psát

$$|F_{\mu} - F_{\mu_1}| = |\mu x(1-x) - \mu_1 x(1-x)| \quad \forall x \in [0, 1].$$

Odtud

$$|F_{\mu} - F_{\mu_1}| = |x(1-x)(\mu - \mu_1)| \quad \forall x \in [0, 1].$$

Protože $x(1-x) < 1 \quad \forall x \in [0, 1]$ a ze zadání $(\mu - \mu_1) < \epsilon$, tvrzení platí.

11. Ukažte, že rovnici (34) lze transformovat na logistickou rovnici (35), přičemž

$$c = \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{4},$$

pomocí substituce $y = -\mu x + \frac{1}{2}\mu$.

Řešení

$$y(n+1) = y^2(n) + c$$

Provedeme substituci $y = -\mu x + \frac{1}{2}\mu$:

$$-\mu x(n+1) + \frac{\mu}{2} = \mu^2 x(n)^2 - \mu^2 x(n) + \frac{\mu^2}{4} + c,$$

dále

$$x(n+1) = \mu x(n)(1-x(n)) - \frac{\mu}{4} + \frac{1}{2} - \frac{c}{\mu},$$

tedy tvrzení platí.

12. (a) Nalezněte rovnovážné body y_1^* a y_2^* rovnice (34).
(b) Nalezněte hodnoty c , pro které je y_1^* přitažlivý, odpuzující nebo nestabilní.
(c) Nalezněte hodnoty c , pro které je y_2^* přitažlivý, odpuzující nebo nestabilní.
13. Nalezněte hodnotu c_0 , ve které (34) zdvojuje periodu — bifurkuje — pr $c > c_0$. Zkontrolujte svou odpověď s využitím (36).

14. (Projekt) S využitím počítače si vytvořte pro (34) bifurkační diagramy, jako jsou na obrázcích 24 a 25.
15. (Projekt) Vytvořte bifurkační diagram pro kvadratické zobrazení

$$Q_\lambda(x) = 1 - \lambda x^2$$

na intervalu $[-1; 1]$, $\lambda \in (0; 2]$.

V problémech 16–19 určete stabilitu rovnovážných bodů diferenčních rovnic.

16. $x(n+0) = x(n) + \frac{1}{\pi} \sin(2\pi x(n)).$

17. $x(n+0) = \frac{1}{2} \sin(\pi x(n)).$

18. $x(n+0) = 2x(n) \exp(-x(n)).$

19. Populace ptáků je modelována diferenční rovnicí

$$x(n+0) = \begin{cases} 3, 2x(n) & \text{pro } 0 \leq x(n) \leq 1, \\ 0, 5x(n) & \text{pro } x(n) > 1, \end{cases}$$

kde $x(n)$ je počet ptáků v roce n .

Doplněk B: Globální stabilita

H. Sedaghat v [6] ukázal, že spojité zobrazení na reálné přímce nemůže mít nestabilní globálně přitažlivý pevný bod. Pokud však opustíme spojité zobrazení a nahradíme jej nespojitým, nebo jen po částech spojitým zobrazením, potom se takový (nestabilní globálně přitažlivý) pevný bod již může vyskytnout. Tento fenomén budeme demonstrovat v následujícím příkladu.

Příklad 5.12 Uvažujme zobrazení

$$G_\mu(x) = \begin{cases} -2x & \text{if } x < \mu, \\ 0 & \text{if } x \geq \mu, \end{cases}$$

kde $\mu \in \mathbb{R}^+$. Diferenční rovnice s $x(n+1) = G_\mu(x(n))$ má řešení daná předpisem

$$x(n) = G_\mu^n(x) = \begin{cases} (-2)^n x & \text{if } (-2)^{n-1} x_0 < \mu, \\ 0 & \text{if } (-2)^{n-1} x_0 \geq \mu, \end{cases}$$

kde $x(0) = x_0$.

Nyní, jestliže $x_0 \geq \mu$, potom $G_\mu^n(x_0) = 0$ pro všechna $n \geq 1$. Pokud nastane druhá možnost, $x_0 < \mu$, potom iterace $G_\mu(x_0)$ rostou v amplitudě a střídají znaménko, a tak jistě existuje $k \in \mathbb{N}$, pro které je $G_\mu^k(x_0) \geq \mu$. To ovšem znamená, že další iterace jsou již nulové, $G_\mu^n(x_0) = 0$ pro všechna $n > k$.

Takto je x^* globálně přitažlivý pevný bod, ale zároveň je nestabilní, neboť body v jeho blízkosti se od něj iterováním vzdalují (dokud nepřekročí mezní hodnotu μ).

Věta 5.7 ([6]) *Spojité zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nemůže mít globálně přitažlivý nestabilní pevný bod.*

Při důkazu této věty se využívá následující kritérium pro asymptotickou stabilitu nediferencovatelných zobrazení.

Věta 5.8 ([6]) *Pevný bod x^* spojitěho zobrazení $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je asymptoticky stabilní, právě když existuje otevřený interval $(a, b) \ni x^*$ takový, že na něm platí následující nerovnosti:*

$$f^2(x) > x, \text{ pro } a < x < x^*, \text{ a } f^2(x) < x, \text{ pro } x^* < x < b.$$

Doplněk C: Carvalhovo lemma

V [1] Carvalho podal metodu k nalezení periodických bodů dané funkce. Je založena na následujícím lemmatu.

Lemma 5.1 *Jestliže $x(n)$ je k -periodické, potom bud'*

$$x(n) = c_0 + \sum_{j=1}^m \left[c_j \cos\left(\frac{2j^n\pi}{k}\right) + d_j \sin\left(\frac{2j^n\pi}{k}\right) \right],$$

pro $k > 1$ liché a $m = \frac{k-1}{2}$, anebo

$$x(n) = c_0 + (-1)^n c_1 + \sum_{j=1}^{m-1} \left[c_j \cos\left(\frac{2j^n\pi}{k}\right) + d_j \sin\left(\frac{2j^n\pi}{k}\right) \right],$$

pro $k = 2m$ a $n \geq 1$.

Příklad 5.13 Uvažujme rovnici

$$x(n+1) = x(n) \exp(r(1-x(n))), \quad (37)$$

která popisuje populaci se sklonem k exponenciálnímu růstu při malé hustotě a naopak k poklesu při vysoké hustotě. Veličina $\lambda = \exp(r(1-x(n)))$ může být brána jako reprodukční míra závislá na hustotě. Tento model je přijatelný pro jednodruhovou populaci regulovanou epidemiemi nemocí při vysoké hustotě.

Netriviálním pevným bodem je $x^* = 1$. $f'(1) = 1 - r$, a tedy x^* je asymptoticky stabilní pro $0 < r \leq 2$ (případ $r = 2$ ověřte). Potom ztrácí svou stabilitu, zatímco vzniká asymptoticky stabilní 2-cykl. Z Carvalhova lemmatu plyne, že

$$x(n) = a + (-1)^n b.$$

Dosadíme do naší diferenční rovnice:

$$a - (-1)^n b = a + (-1)^n b \exp r(1 - a - (-1)^n b).$$

Při posunu $n \mapsto n+1$ dostaneme

$$a + (-1)^n b = a - (-1)^n b \exp r(1 - a + (-1)^n b).$$

Tudíž

$$a^2 - b^2 = (a^2 - b^2) \exp 2r(1 - a),$$

takže buď $a^2 = b^2$, což by nám dalo triviální řešení 0, nebo $a = 1$. 2-periodické řešení má tedy tvar $x(n) = 1 + (-1)^n b$. Když opět dosadíme do diferenční rovnice, máme

$$1 - (-1)^n b = (1 + (-1)^n b) \exp((-1)^{n+1} r b).$$

Nechť $y = (-1)^{n+1}b$. Potom

$$1 + y = (1 - y)e^{ry},$$
$$r = \frac{1}{y} \ln \left(\frac{1 + y}{1 - y} \right) = g(y).$$

Funkce g má minimum v 0, kde $g(0) = 2$. Takto pro $r < 2$ rovnice $g(y) = r$ nemá řešení a tudíž neexistují 2-periodické body, avšak pro $r > 2$ dostáváme hodnoty $\pm y_r$ a odpovídající koeficient $(-1)^n b$. Další analýza by ukázala, že toto zobrazení prochází bifurkacemi podobnými těm u logistického zobrazení.

Cvičení k přednášce 5 (pokračování)

Následující problémy řešte s využitím Carvalhova lemmatu.

20. Uvažujte diferenční rovnici $x(n+1) = \mu x(n)(1 - x(n))$. Nalezněte hodnoty μ , pro které má rovnice 2-periodické řešení, $1 < \mu \leq 3$.
21. (Projekt) Nalezněte hodnoty μ , pro které má rovnice z problému 12 3-periodické řešení.
22. Nalezněte 3-periodické řešení rovnice $x(n+1) = ax(n)$, $a \neq 1$.
23. Populace jistého druhu je modelována diferenční rovnicí $x(n+1) = \mu x(n)e^{-x(n)}$, $x(n) \geq 0$, $a > 0$. Pro které hodnoty μ má rovnice 2-cykl?
24. Nalezněte hodnoty c , pro něž má zobrazení

$$Q_c(x) = x^2 + c, \quad c \in [-2, 0],$$

3-cykl a potom určete jeho stabilitu.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika na PřF Univerzity Palackého
v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

KMA/DDS, DDSM

Diskrétní dynamické systémy

Lineární diferenční rovnice vyšších řádů

Přednáška 6

6 Lineární diferenční rovnice vyššího řádu

V této kapitole se budeme věnovat lineárním diferenčním rovnicím vyšších řádů s jednou nezávislou proměnnou. Využití takovýchto rovnic je velmi široké, od populačních dynamik (studium jednoho druhu), přes ekonomii (studium jedné komodity) až k fyzice. Výklad zahájíme uvedením základů diferenčního počtu.

6.1 Diferenční počet

Diferenční počet je diskretní analogii známého diferenciálního a integrálního počtu. Uvedeme některé základní vlastnosti dvou operátorů, které jsou podstatné při studiu diferenčních rovnic.

Diferenční operátor

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$$

a *šift operátor*

$$Ex(n) = x(n+1).$$

Zatímco vztah pro $E^k x(n)$ je jasný,

$$E^k x(n) = x(n+k),$$

pro $\Delta^k x(n)$ to již tak zřejmé není. Vypomůžeme si následujícím přepisem našich operátorů,

$$\Delta = E - I, \quad E = \Delta + I,$$

kde I je operátor identity, tj. $Ix = x$.

Nyní, s využitím binomického rozvoje, dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta^k x(n) &= (E - I)^k x(n) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x(n) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x(n+k-i). \end{aligned} \tag{38}$$

Podobně můžeme dostat

$$E^k x(n) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x(n). \tag{39}$$

Operátor Δ je protějškem operátoru derivování D v diferenciálním počtu. Oba operátory, Δ i E , jsou lineární:

$$\Delta[ax(n) + by(n)] = a\Delta x(n) + b\Delta y(n)$$

a

$$E[ax(n) + by(n)] = aEx(n) + bEy(n),$$

pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$. Důkaz na vás čeká ve cvičení.

Uveďme si další důležité vlastnosti⁵ (jejich důkaz je opět ponechán na cvičení):

$$\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n) - x(n_0); \tag{40}$$

⁵Můžeme nahlédnout, že se jedná o analogie vztahů $\int_a^b df(x) = f(b) - f(a)$ a $d(\int_a^x f(t)dt) = f(x)$ z diferenciálního počtu.

$$\Delta \left(\sum_{k=n_0}^{n-1} x(k) \right) = x(n). \quad (41)$$

Nyní si uvedeme třetí vlastnost operátoru Δ . Uvidíme, že ji má opět i operátor D .
Nechť

$$p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k$$

je polynom k -tého stupně. Potom

$$\begin{aligned} \Delta p(n) &= [a_0(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \dots + a_k] \\ &\quad - [a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k] \\ &= a_0 k n^{k-1} + \text{členy stupně nižšího než } (k-1). \end{aligned}$$

Podobně lze ukázat, že

$$\Delta^2 p(n) = a_0 k(k-1)n^{k-2} + \text{členy stupně nižšího než } (k-2).$$

Je zřejmé, že tento proces nás dovede ke vztahu

$$\Delta^k p(n) = a_0 k!, \quad (42)$$

a tedy

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0, \text{ pro } i \geq 1. \quad (43)$$

Mocninný šift

Zde si ukážeme, jakým způsobem působí polynom k -tého stupně operátoru E ,

$$p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \dots + a_k I, \quad (44)$$

na člen b^n , kde b je libovolná konstanta.

Dosadíme a dostaneme

$$\begin{aligned} p(E)b^n &= a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + \dots + a_k b^n \\ &= (a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + \dots + a_k) b^n \\ &= p(b) b^n. \end{aligned} \quad (45)$$

Faktoriální polynomy

Jednou z nejzajímavějších funkcí diferenčního počtu je *faktoriální polynom* $x^{(k)}$. Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme k -tý faktoriál čísla x vztahem

$$x^{(k)} = x(x-1) \cdots (x-k+1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ve speciálním případě, $x = n \in \mathbb{N}$ a $n \geq k$, máme

$$n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

a

$$n^{(n)} = n!.$$

Funkce $x^{(k)}$ zde hraje stejnou roli, jako x^k v diferenciálním počtu (viz Lemma 6.2).

Prozatím máme operátory Δ a E definovány pro posloupnosti $f(n)$. Jejich definice se však dá rozšířit i na spojité funkce $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, jednoduše tak, že položíme

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t) \text{ a } Ef(t) = f(t+1).$$

Takto pro $f(x) = x^{(k)}$ dostaneme

$$\Delta x^{(k)} = (x+1)^{(k)} - x^{(k)} \text{ a } Ex^{(k)} = (x+1)^{(k)}.$$

Tyto vztahy využijeme při formulaci následujícího lemmatu.

Lemma 6.2 *Pro pevná $k \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí následující vztahy:*

$$(i) \quad \Delta x^{(k)} = kx^{(k-1)}; \tag{46}$$

$$(ii) \quad \Delta^n x^{(k)} = k(k-1) \cdots (k-n+1)x^{(k-n)}; \tag{47}$$

$$(iii) \quad \Delta^k x^{(k)} = k!. \tag{48}$$

Důkaz. (i)

$$\begin{aligned} \Delta x^{(k)} &= (x+1)^{(k)} - x^{(k)} \\ &= (x+1)x(x-1) \cdots (x-k+2) \\ &\quad - x(x-1) \cdots (x-k+2)(x-k+1) \\ &= (x(x-1) \cdots (x-k+2)) [(x+1) - (x-k+1)] \\ &= (x(x-1) \cdots (x-k+2))k \\ &= kx^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Důkazy částí (ii) a (iii) jsou ponechány jako cvičení. □

Jestliže pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$x^{(-k)} = \frac{1}{(x+1)(x+2) \cdots (x+k)} \tag{49}$$

a $x^{(0)} = 1$, potom můžeme Lemma 6.2 rozšířit pro všechna celá čísla $k \in \mathbb{Z}$.

Dále by nás mohlo zajímat, zda vztahy pro derivaci součinu a podílu mají své analogie v diferenciálním počtu. Odpovědí jsou následující formule:

$$\Delta [x(n)y(n)] = Ex(n)\Delta y(n) + y(n)\Delta x(n); \tag{50}$$

$$\Delta \left[\frac{x(n)}{y(n)} \right] = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)Ey(n)}. \tag{51}$$

Cvičení ke kapitole 6

1. Ukažte, že operátory Δ a E jsou lineární.
2. Ukažte, že

$$E^k x(n) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^{k-i} x(n).$$

3. Ověřte formule (40) a (41).
4. Ověřte formule (47) a (48).
5. Ukažte, že Lemma 6.2 platí pro $k \in \mathbb{Z}$.
6. Ověřte pravidla (50) a (51).
7. (Abelův součtový vzorec) Dokažte, že

$$\sum_{k=1}^n x(k)y(k) = x(n+1) \sum_{k=1}^n y(k) - \sum_{k=1}^n \left(\Delta x(k) \sum_{r=1}^k y(r) \right).$$

8. (Newtonova věta) Jestliže $f(n)$ je polynom stupně k , ukažte, že

$$f(n) = f(0) + \frac{n^{(1)}}{1!} \Delta f(0) + \frac{n^{(2)}}{2!} \Delta^2 f(0) + \cdots + \frac{n^{(k)}}{k!} \Delta^k f(0).$$

(Nápověda: Zapište $f(n) = a_0 + a_1 n^{(1)} + a_2 n^{(2)} + \cdots + a_k n^{(k)}$.)

9. (Diskrétní Taylorův vzorec) Ověřte, že

$$f(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} \Delta^i f(0) + \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n-s-1}{k-1} \Delta^k f(s).$$

6.2 Obecná teorie lineárních diferenčních rovnic

Normální tvar *nehomogenní lineární diferenční rovnice k-tého řádu* je následující:

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = g(n), \quad (52)$$

kde $p_i(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0$ a $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$.
 $g(n) \equiv 0$ — homogenní rovnice.

Při $n = 0$ můžeme rovnici (52) přepsat

$$y(k) = -p_1(0)y(k-1) - \dots - p_k(0)y(0) + g(0).$$

Takto máme vyjádřeno $y(k)$ a pro $n = 1$ dostaneme

$$y(k+1) = -p_1(1)y(k) - \dots - p_k(1)y(1) + g(1).$$

Opakováním tohoto postupu můžeme vypočítat všechna $y(n)$ pro $n \geq k$. Toto ilustruje následující příklad.

Příklad 6.14 Uvažujme diferenční rovnici třetího řádu

$$y(n+3) - \frac{n}{n+1}y(n+2) + ny(n+1) - 3y(n) = n, \quad (53)$$

kde $y(1) = 0$, $y(2) = -1$ a $y(3) = 1$. Nalezněme hodnoty $y(4)$, $y(5)$, $y(6)$ a $y(7)$.

Řešení Rovnici přepíšeme do výhodnějšího tvaru

$$y(n+3) = \frac{n}{n+1}y(n+2) - ny(n+1) + 3y(n) + n. \quad (54)$$

Nyní pro $n = 1$ a po dosazení za $y(1)$, $y(2)$ a $y(3)$ dostáváme

$$y(4) = \frac{1}{2}y(3) - 1y(2) + 3y(1) + 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 - 1(-1) + 3 \cdot 0 + 1 = \frac{5}{2}.$$

Podobně pro $n = 2$

$$y(5) = \frac{2}{3}y(4) - 2y(3) + 3y(2) + 2 = -\frac{4}{3}.$$

Pro $n = 3$

$$y(6) = \frac{3}{4}y(5) - 3y(4) + 3y(3) + 3 = -\frac{5}{2}.$$

Pro $n = 4$

$$y(7) = \frac{4}{5}y(6) - 4y(5) + 3y(4) + 4 = \frac{89}{6}.$$

Řekneme, že posloupnost $\{y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ nebo jednoduše $y(n)$ je *řešením* (52), jestliže tuto rovnici splňuje (pro všechna $n \geq n_0$).

Príslušná počáteční úloha:

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = g(n), \quad (55)$$

$$y(n_0) = a_0, y(n_0+1) = a_1, \dots, y(n_0+k-1) = a_{k-1}, \quad (56)$$

kde a_i jsou reálná čísla.

Věta 6.9 *Počáteční úloha (55) a (56) má právě jedno řešení $y(n)$.*

Důkaz. Důkaz vychází z postupného výpočtu jako v příkladu 6.14. Postupně pro $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ dostaneme posloupnost $\{y(n)\}_{n=n_0+k}^{\infty}$, což nám ve spojení s počátečními podmínkami (56) dává celé řešení $\{y(n)\}_{n=n_0}^{\infty}$. Z postupu vyplývá i jednoznačnost. \square

Iterativně tedy řešení počáteční úlohy můžeme získat vždy, se získkem explicitního tvaru řešení (např. $y(n) = 2ny(n_0)$) je to obecně mnohem složitější. Proto se později omezíme na úlohy s konstantními koeficienty p_i .

V dalším podrobně prostudujeme homogenní část lineární diferenční rovnice k -tého řádu, tedy

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \dots + p_k(n)y(n) = 0. \quad (57)$$

Uvedeme tři důležité definice.

Definice 6.6 Řekneme, že funkce $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ jsou *lineárně závislé* pro $n \geq n_0$, jestliže existují konstanty a_1, a_2, \dots, a_r ne všechny nulové a takové, že

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \dots + a_r f_r(n) = 0, \quad n \geq n_0.$$

Jestliže například $a_j \neq 0$, potom vydělením předchozí rovnosti zjistíme, že $f_j(x)$ se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních funkcí,

$$f_j(n) = - \sum_{i \neq j} \frac{a_i}{a_j} f_i(n). \quad (58)$$

Pro dvojici funkcí ($r = 2$) to znamená, že jedna je násobkem druhé, $f_1(n) = a f_2(n)$, $a \neq 0$.

Opakem lineární závislosti je *lineární nezávislost*:

$$(a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \dots + a_r f_r(n) = 0, \quad n \geq n_0) \implies a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0.$$

Příklad 6.15 Ukažte, že funkce 3^n , $n3^n$, a $n^2 3^n$ jsou lineárně nezávislé pro $n \geq 1$.

Řešení Rovnici

$$a_1 3^n + a_2 n 3^n + a_3 n^2 3^n = 0, \quad n \geq 1$$

podělíme 3^n a dostaneme

$$a_1 + a_2 n + a_3 n^2 = 0, \quad n \geq 1,$$

a tedy $a_1 = 0$. Rovnici

$$a_2 n + a_3 n^2 = 0, \quad n \geq 1$$

podělíme n a dostaneme

$$a_2 + a_3 n = 0, \quad n \geq 1,$$

a tedy již vidíme, že nutně také $a_2 = a_3 = 0$.

Definice 6.7 Množinu k lineárně nezávislých řešení (57) nazýváme *fundamentální množina* řešení.

V předchozím příkladu jsme si mohli uvědomit, že ověření lineární nezávislosti jen podle definice nemusí být vždy snadné. Naštěstí existuje jednodušší metoda založená na tzv. casoratiánu⁶:

⁶Diskrétní obdoba wronskiánu u diferenčních rovnic.

Definice 6.8 Casoratián $W(n)$ řešení $x_1(n), x_2(n), \dots, x_r(n)$ je dán předpisem

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \cdots & x_r(n+r-1) \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Příklad 6.16 Uvažujte diferenční rovnici

$$x(n+3) - 7x(n+1) + 6x(n) = 0.$$

(a) Ukažte, že posloupnosti 1, $(-3)^n$ a 2^n jsou její řešení.

(b) Nalezněte casoratián posloupností z bodu (a).

Řešení

ad (a) Stačí dosadit. Zjistíme, že jde skutečně o řešení dané rovnice.

ad (b) Ze vztahu (59) dostáváme:

$$\begin{aligned} W(n) &= \det \begin{pmatrix} 1 & (-3)^n & 2^n \\ 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{pmatrix} \\ &= 1 \begin{vmatrix} (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \end{vmatrix} - (-3)^n \begin{vmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{vmatrix} + 2^n \begin{vmatrix} 1 & (-3)^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} \end{vmatrix} \\ &\quad \vdots \\ &= -20 \cdot 2^n \cdot (-3)^n. \end{aligned}$$

Dá se ukázat, že množina k řešení je fundamentální (tj. lineárně nezávislá), jestliže její casoratián $W(n)$ není nikdy nulový ($n \geq n_0$). To znamená, že v předchozím příkladu, kde $W(n) = -20 \cdot 2^n \cdot (-3)^n$, o fundamentální množinu jde. Obecně ale nemusí být snadné vypočítat a vyhodnotit casoratián pro každé $n \geq n_0$. Naštěstí lze vyjádřit $W(n)$ pomocí $W(n_0)$:

Lemma 6.3 (Abelova formule) *Nechť $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ jsou řešení (57) a nechť $W(n)$ je jejich casoratián. Potom pro $n \geq n_0$ platí*

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0). \quad (60)$$

Pro úlohu s konstantními koeficienty a pro $n_0 = 0$ dostáváme

$$W(n) = (-1)^{kn} p_k^n W(0). \quad (61)$$

Abelova formule má jeden důležitý

Důsledek 6.1 *Předpokládejme, že $p_k(n) \neq 0$, pro všechna $n \geq n_0$ (my se zabýváme pouze takovými rovnicemi, viz (52)).*

Potom je casoratián $W(n) \neq 0$, pro všechna $n \geq n_0$, právě když

$$W(n_0) \neq 0.$$

Věta 6.10 Množina řešení $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ rovnice (57) je fundamentální tehdy a jen tehdy, jestliže pro nějaké $n_0 \geq 0$ platí $W(n_0) \neq 0$.

Příklad 6.17 Ověřte, že $\{n, 2^n\}$ je fundamentální množinou řešení rovnice

$$x(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}x(n+1) + \frac{2n}{n-1}x(n) = 0, \quad (n \geq 2).$$

Řešení Nejprve je samozřejmě třeba dosadit ověřovaná řešení do rovnice.

Casoratián:

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Podle věty 6.10 stačí nalézt jednu hodnotu n_0 , pro kterou $W(n_0) \neq 0$. Nejjednodušší bude vzít $n_0 = 0$, a tedy

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Podle věty 6.10 jsou řešení $n, 2^n$ lineárně nezávislá, a tak tvoří fundamentální množinu řešení.

Příklad 6.18 Uvažujte diferenční rovnici třetího řádu

$$x(n+3) + 3x(n+2) - 4x(n+1) - 12x(n) = 0.$$

Ukažte, že funkce $2^n, (-2)^n$ a $(-3)^n$ tvoří její fundamentální množinu řešení.

Věta 6.11 (O existenci fundamentální množiny řešení homogenní úlohy) *Jestliže $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$, potom (57) má fundamentální množinu řešení pro $n \geq n_0$.*

Ukažte, že lineární kombinace řešení homogenní úlohy (57) je také řešením (57). Tento fakt nás vede k následující definici obecného řešení.

Definice 6.9 (Obecné řešení homogenní úlohy)

Nechť $\{x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)\}$ je fundamentální množina řešení (57).

Potom *obecné řešení* (57) je dáno vztahem

$$x(n) = \sum_{i=1}^k a_i x_i(n), \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Každé řešení (57) lze získat z obecného řešení vhodnou volbou parametrů a_i .

Cvičení ke kapitole 6.2

1. Najděte casoratián následujících funkcí a zjistěte, zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

(a) $5^n, 3 \cdot 5^{n+2}, e^n$.

(b) $5^n, n \cdot 5^n, n^2 \cdot 5^n$.

(c) $(-2)^n, 2^n, 3$.

(d) $0, 3^n, 7^n$.

2. Najděte casoratián $W(n)$ řešení diferenčních rovnic

(a) $x(n+3) - 10x(n+2) + 31x(n+1) - 30x(n) = 0$, jestliže $W(0) = 6$.

(b) $x(n+3) - 3x(n+2) + 4x(n+1) - 12x(n) = 0$, jestliže $W(0) = 26$.

3. Pro následující diferenční rovnice a jejich řešení

(i) určete, zda jsou řešení lineárně nezávislá a

(ii) nalezněte, pokud to půjde (použijte pouze daná řešení), obecná řešení.

(a) $x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n) = 0$; $1, n, n^2$.

(b) $x(n+2) + x(n) = 0$; $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

(c) $x(n+3) + x(n+2) - 8x(n+1) - 12x(n) = 0$; $3^n, (-2)^n, (-2)^{n+3}$.

(d) $x(n+4) - 16x(n) = 0$; $2^n, n2^n, n^22^n$.

6.3 Lineární homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Uvažujeme diferenční rovnici k -tého řádu s konstantními koeficienty:

$$x(n+k) + p_1x(n+k-1) + p_2x(n+k-2) + \dots + p_kx(n) = 0, \quad (62)$$

kde p_i jsou konstanty a $p_k \neq 0$. Chceme pro ni nalézt fundamentální množinu řešení a potažmo i obecné řešení.

Postup bude poměrně jednoduchý. Budeme předpokládat, že řešení (62) mají tvar λ^n , kde λ je komplexní číslo. Dosadíme do (62) a dostaneme tzv. *charakteristickou rovnici*

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \dots + p_k = 0. \quad (63)$$

Její kořeny nazýváme *charakteristické kořeny*. Poznamenejme, že zřejmě žádný z nich není nulový, neboť $p_k \neq 0$.

Mohou nastat dva základní případy:

- (a) *Charakteristické kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou různé.* Dokážeme, že v tomto případě funkce $\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n$ tvoří fundamentální množinu řešení (62). Postačí ukázat, že $W(0) \neq 0$.

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Tento determinant se nazývá Vandermodův a dá se ukázat (pokuste se), že

$$W(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i),$$

takže $W(0) \neq 0$ a $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$ je opravdu fundamentální množinou řešení (62).

Obecné řešení (62) má tedy tvar

$$x(n) = \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i^n, \quad a_i \in \mathcal{C}. \quad (65)$$

- (b) *Násobné charakteristické kořeny $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ s odpovídajícími násobnostmi m_1, m_2, \dots, m_r .* V tomto případě můžeme (62) zapsat jako

$$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} x(n) = 0, \quad (62')$$

Zde je důležité, že řešení $\psi_1(n), \psi_2(n), \dots, \psi_{m_i}(n)$ rovnice

$$(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0$$

jsou zároveň řešeními rovnice (62').

Lemma 6.4 Množina

$$G_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^n, n^2\lambda_i^n, \dots, n^{m_i-1}\lambda_i^n\}$$

je fundamentální množinou řešení rovnice $(E - \lambda_i)^{m_i} x(n) = 0$.

Důsledek 6.2 *Množina*

$$G = \bigcup_{i=1}^r G_i$$

je fundamentální množinou řešení (62').

Důsledek 6.3 *Obecné řešení (62') je dáno vztahem*

$$x(n) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^n (a_{i0} + a_{i1}n + a_{i2}n^2 + \cdots + a_{im_i-1}n^{m_i-1}).$$

Příklad 6.19 Řešte rovnici

$$\begin{aligned} x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) &= 0, \\ x(0) = 0, x(1) = 1, x(2) &= 1. \end{aligned}$$

Řešení Charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0.$$

Charakteristické kořeny:

$$\lambda_1 = 2 = \lambda_2, \lambda_3 = 3, \left(\text{nebo } \begin{array}{l} \lambda_1 = 2, m_1 = 2, \\ \lambda_2 = 3, m_2 = 1 \end{array} \right)$$

tedy násobné.

Obecné řešení:

$$x(n) = a_0 2^n + a_1 n 2^n + b_1 3^n.$$

Po dosazení počátečních podmínek dostaneme

$$a_0 = 3, a_1 = 2, b_1 = -3,$$

a tedy řešením počáteční úlohy je

$$x(n) = 3 \cdot 2^n + 2n2^n - 3^{n+1}.$$

Příklad 6.20 (Komplexní charakteristické kořeny) Předpokládejme, že rovnice

$$x(n+2) + p_1x(n+1) + p_2x(n) = 0$$

má komplexní charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Její obecné řešení by tedy mělo tvar

$$x(n) = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n.$$

Zopakujme si, že bod (α, β) v komplexní rovině odpovídá komplexnímu bodu $\alpha + i\beta$. V polárních souřadnicích:

$$\alpha = r \cos \theta, \quad \beta = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Dá se ukázat, že

$$x_1(n) = r^n \cos(n\theta) \quad \text{a} \quad x_2(n) = r^n \sin(n\theta) \tag{66}$$

jsou dvě lineárně nezávislá řešení.

Například rovnice

$$(E^2 + 1)x(n) = 0 \tag{67}$$

má dva komplexně sdružené charakteristické kořeny

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i.$$

Tudíž

$$\alpha = 0, \beta = \pm 1, r = 1, \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

a tedy budeme ověřovat, že

$$x_1(n) = 1^n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{a} \quad x_2(n) = 1^n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice 67.

Řešení: $(E^2 + 1)x_1(n) = x_1(n+2) + x_1(n) = \cos\left((n+2)\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n\frac{\pi}{2} + \pi\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Obdobně i pro $x_2(n) = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

Nezávislost: casoratián pro $n = 0$

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} \cos(0\frac{\pi}{2}) & \sin(0\frac{\pi}{2}) \\ \cos((0+1)\frac{\pi}{2}) & \sin((0+1)\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Příklad 6.21 (Fibonacciho posloupnost (Králičí problém)) Králíci se množí, každý pár vrhne na konci každého měsíce (kromě prvního) svého života další pár. Množství párů králíků na konci n -tého měsíce označíme $F(n)$. Rozděleme si tyto páry na nedospělé (na konci následujícího měsíce ještě nevrhnou, ale stanou se dospělými) a dospělé:

$$F(n) = F_0(n) + F_1(n).$$

Na konci následujícího měsíce tedy $F_1(n)$ párů vrhne další pár a $F_0(n)$ párů dospěje (žádný králík neumírá ani neztrácí plodnost), což můžeme zapsat následovně:

$$\begin{aligned} F_0(n+1) &= F_1(n), \\ F_1(n+1) &= F_1(n) + F_0(n) = F(n), \\ F(n+1) &= F_0(n+1) + F_1(n+1) = F_1(n) + F(n). \end{aligned}$$

Podobně i v následujícím měsíci:

$$\begin{aligned} F_0(n+2) &= F_1(n+1) = F(n), \\ F_1(n+2) &= F_1(n+1) + F_0(n+1) = F(n+1), \\ F(n+2) &= F_0(n+2) + F_1(n+2) = F(n) + F(n+1). \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy (Fibonacciho) diferenční rovnici druhého řádu

$$F(n+2) = F(n) + F(n+1).$$

Její charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

má dva kořeny

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Obecné řešení:

$$F(n) = a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + a_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n \geq 1.$$

Uvažujme množení od jediného páru, který je sám vržen na konci prvního měsíce. Tomu odpovídají počáteční hodnoty $F(1) = 1$ a $F(2) = 1$. Po dosazení dostaneme

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Následně:

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n). \quad (68)$$

Zajímavé je, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \equiv 1,618,$$

což je tzv. *zlatý poměr*.

Cvičení ke kapitole 6.3

1. Nalezněte diferenční rovnice, jejichž řešení má tvar:

- (a) $2^{n-1} - 5^{n+1}$.
- (b) $3 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.
- (c) $(n+2)5^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$.

(d) $(c_1 + c_2n + c_3n^2)7^n$.

(e) $1 + 3n - 5n^2 + 6n^3$.

2. Nalezněte homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu, která generuje posloupnost 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ... Potom zjistěte její řešení.

V následujících cvičeních najděte obecné řešení uvedených diferenčních rovnic.

3. $x(n+2) - 16x(n) = 0$.

4. $x(n+2) + 16x(n) = 0$.

5. $(E-3)^2(E^2+4)x(n) = 0$.

6. $\Delta^3x(n) = 0$.

7. $(E^2+2)^2x(n)$.

8. $x(n+2) - 6x(n+1) + 14x(n) = 0$.

9. Ověřte, že $x_1(n) = r^n \cos(n\theta)$ a $x_2(n) = r^n \sin(n\theta)$ jsou dvě lineárně nezávislá řešení rovnice v příkladu 6.20.

6.4 Lineární nehomogenní rovnice: metoda neurčitých koeficientů

V posledních dvou oddílech jsme se věnovali teorii lineárních homogenních diferenčních rovnic. V případě rovnic s konstantními koeficienty umíme najít jejich řešení. Zde se vrátíme k nehomogenním lineárním diferenčním rovnicím k -tého řádu,

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = g(n), \quad (69)$$

kde $p_i(n)$ a $g(n)$ jsou reálné funkce definované pro $n \geq n_0$ a $p_k(n) \neq 0$ pro všechna $n \geq n_0$.

Na tuto rovnici můžeme pohlížet tak, že levá strana popisuje nějaký fyzikální systém a $g(n)$ se bere jako vnější činitel, přičemž studujeme, jakým způsobem $y(n)$ (výstup) reaguje na $g(n)$ (vstup).

Než přejdeme k obecným výsledkům, položme si otázku, zda množina řešení nehomogenní úlohy tvoří vektorový prostor. Jinými slovy, je lineární kombinace dvou řešení opět řešením? Odpovíme si pomocí následujícího příkladu.

Příklad 6.22 Uvažujme rovnici

$$y(n+2) - y(n+1) - 6y(n) = 5 \cdot 3^n.$$

- (a) Ukažte, že $y_1 = n \cdot 3^{n-1}$ a $y_2 = (1+n)3^{n-1}$ jsou řešeními naší rovnice.
- (b) Ukažte, že $y(n) = y_2(n) - y_1(n)$ není řešením.
- (c) Ukažte, že $\varphi(n) = cn3^{n-1}$, $c \in \mathbb{R}$, není řešením.

Řešení

ad (a) Proved'te sami.

ad (b) $y(n) = y_2(n) - y_1(n) = (1+n)3^{n-1} - n \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$. Dosazením do rovnice obdržíme

$$3^{n+1} - 3^n - 6 \cdot 3^{n-1} = 3^n [3 - 1 - 2] = 0 \neq 5 \cdot 3^n.$$

ad (c) Zde opět pomocí dosazení zjistíme, že $\varphi(n)$ není řešením.

Závěr

- (i) Z příkladu je zřejmé, že řešení nehomogenní (na rozdíl od homogenní) úlohy netvoří vektorový prostor. Ani součet, ani násobek řešení není dalším řešením.
- (ii) Bod (b) poukazuje na obecnou vlastnost řešení nehomogenní úlohy, jmenovitě rozdíl dvou řešení je řešením homogenní úlohy. Tento závěr je formulován v následující větě.

Věta 6.12 Jestliže $y_1(n)$ a $y_2(n)$ jsou řešeními nehomogenní úlohy (69), potom jejich rozdíl, $x(n) = y_1(n) - y_2(n)$, je řešením odpovídající homogenní úlohy

$$y(n+k) + p_1(n)y(n+k-1) + \cdots + p_k(n)y(n) = 0. \quad (70)$$

Důkaz. Proved'te sami. □

V dalším budeme používat následující označení. Obecné řešení homogenní úlohy budeme nazývat *komplementární* a značit $y_c(n)$, zatímco řešení nehomogenní úlohy budeme nazývat *partikulární* a značit $y_p(n)$. Následující výsledek ukazuje, jakým způsobem můžeme najít všechna řešení nehomogenní úlohy při znalosti jednoho partikulárního řešení.

Věta 6.13 *Libovolné řešení $y(n)$ nehomogenní úlohy (69) lze zapsat jako*

$$y(n) = y_p(n) + \sum_{i=1}^k a_i x_i(n),$$

kde $\{x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)\}$ je fundamentální množina řešení homogenní úlohy (70).

Důkaz. Z věty 6.12 víme, že rozdíl dvou partikulárních řešení je řešením homogenní úlohy, a tedy musí platit, že

$$y(n) - y_p(n) = \sum_{i=1}^k a_i x_i(n),$$

pro nějaké konstanty a_i . □

Nyní tedy víme, že obecné řešení nehomogenní úlohy lze zapsat jako

$$y(n) = y_p(n) + y_c(n). \quad (71)$$

Nyní obrátíme pozornost na hledání partikulárního řešení nehomogenní úlohy s konstantními koeficienty,

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = g(n). \quad (72)$$

Použijeme metodu *neurčitých koeficientů*. Tato metoda je postavena na inteligentním odhadu tvaru partikulárního řešení. Tento (trochu neurčitý) tvar dosadíme do rovnice a dohledáme (zatím neurčité) koeficienty. Pro úplně obecné $g(n)$ tato metoda není efektivní, ale ukážeme, že lze definovat pravidla postupu ve speciálním případě, kdy $g(n)$ je lineární kombinací členů

$$a^n, \quad \sin(bn), \quad \cos(bn) \quad \text{a} \quad n^k, \quad (73)$$

nebo jejich součinů, jako jsou například

$$a^n \sin(bn), \quad a^n n^k, \quad a^n n^k \cos(bn), \dots \quad (74)$$

Definice 6.10 Polynomiální operátor $N(E)$, kde E je šift operátor, je zvaný *anihilátor* $g(n)$, jestliže

$$N(E)g(n) = 0. \quad (75)$$

Jinými slovy, $N(E)$ je anihilátor $g(n)$, jestliže $g(n)$ je řešením rovnice (75).

Příklady anihilátorů:

$$g(n) = 3^n, \quad N(E) = E - 3:$$

$$N(E)g(n) = E(3^n) - 3(3^n) = 3^{n+1} - 3^{n+1} = 0.$$

$$g(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad N(E) = E^2 + 1:$$

$$\begin{aligned} N(E)g(n) &= \cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Nyní přepíšeme (72) s pomocí šift operátoru na

$$p(E)y(n) = g(n), \quad (76)$$

kde $p(E) = E^k + p_1E^{k-1} + \dots + p_kI$.

Dále předpokládejme, že $N(E)$ je anihilátorem $g(n)$ z (76). Aplikací $N(E)$ na obě strany rovnice (76) získáme homogenní rovnici

$$N(E)p(E)y(n) = 0. \quad (77)$$

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ jsou charakteristické kořeny homogenní rovnice

$$p(E)y(n) = 0, \quad (78)$$

a $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ jsou charakteristické kořeny

$$N(E)y(n) = 0. \quad (79)$$

Musíme uvažovat dva oddělené případy:

1. Žádné z λ_i se nerovná žádnému μ_j . V tomto případě zapíšeme $y_p(n)$ jako obecné řešení (79) s neurčitými koeficienty, dosadíme zpět do (72) a najdeme hodnoty koeficientů. Následující tabulka 5 obsahuje několik typů funkcí $g(n)$ a jejich příslušná partikulární řešení (s neurčitými koeficienty).

$g(n)$	$y_p(n)$
a^n	c_1a^n
n^k	$c_0 + c_1n + \dots + c_kn^k$
n^ka^n	$c_0a^n + c_1na^n + \dots + c_kn^ka^n$
$\sin(bn), \cos(bn)$	$c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn)$
$a^n \sin(bn), a^n \cos(bn)$	$(c_1 \sin(bn) + c_2 \cos(bn))a^n$
$a^nn^k \sin(bn), a^nn^k \cos(bn)$	$(c_0 + c_1n + \dots + c_kn^k)a^n \sin(bn) + (d_0 + d_1n + \dots + d_kn^k)a^n \cos(bn)$

Tabulka 5: Partikulární řešení $y_p(n)$.

2. Nechť $\lambda_i = \mu_j$, pro nějaká i, j . V tomto případě je množina charakteristických kořenů (77) rovna sjednocení množin $\{\lambda_i\}$ a $\{\mu_j\}$, a tak obsahuje kořeny vyšší násobnosti než každá zvlášť. Při určování partikulárního řešení $y_p(n)$ nejprve najdeme obecné řešení (77) a potom vynecháme všechny členy již obsažené v $y_c(n)$. Dále pokračujeme jako v předchozím případě s různými kořeny.

Příklad 6.23 Řešte diferenční rovnici

$$y(n+2) + y(n+1) - 12y(n) = n2^n. \quad (80)$$

Řešení Charakteristické kořeny homogenní rovnice jsou $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -4$, a tedy obecné řešení homogenní úlohy je

$$y_c(n) = c_13^n + c_2(-4)^n.$$

Anihilátor $g(n) = n2^n$ je $N(E) = (E - 2)^2$. Vidíme, že $\mu_1 = \mu_2 = 2$, takže jde o případ s různými charakteristickými kořeny. Podle tabulky bude mít partikulární řešení tvar

$$y_p(n) = a_1 2^n + a_2 n 2^n.$$

Dosažením zpět do (80) dostaneme

$$\begin{aligned} a_1 2^{n+2} + a_2 (n+2) 2^{n+2} + a_1 2^{n+1} + a_2 (n+1) 2^{n+1} - 12a_1 2^n - 12a_2 n 2^n &= n 2^n, \\ (10a_2 - 6a_1) 2^n - 6a_2 n 2^n &= n 2^n. \end{aligned}$$

Tudíž

$$10a_2 - 6a_1 = 0, \quad \text{a} \quad 6a_2 = 1,$$

tedy

$$a_1 = \frac{-5}{18}, \quad a_2 = \frac{-1}{6}.$$

Partikulární řešení

$$y_p(n) = \frac{-5}{18} 2^n - \frac{1}{6} n 2^n,$$

a obecné řešení

$$y(n) = y_p(n) + y_c(n) = \frac{-5}{18} 2^n - \frac{1}{6} n 2^n + c_1 3^n + c_2 (-4)^n.$$

Příklad 6.24 Řešte diferenční rovnici

$$(E - 3)(E + 2)y(n) = 5 \cdot 3^n. \quad (81)$$

Řešení Anihilátor $5 \cdot 3^n$ je $(E - 3)$, takže zde mají množiny charakteristických kořenů shodný prvek: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\mu_1 = 3$, a tudíž $\lambda_1 = \mu_1$. Budeme tedy postupovat druhým způsobem.

Obecné řešení homogenní rovnice $(E - 3)(E + 2)y(n) = 0$ je

$$y_c(n) = c_1 3^n + c_2 (-2)^n.$$

Obecné řešení rovnice

$$(E - 3)^2(E + 2)y(n) = 5 \cdot 3^n \quad (82)$$

je

$$\tilde{y}(n) = (a_1 + a_2 n) 3^n + a_3 (-2)^n.$$

Takže shodné členy v $\tilde{y}(n)$ a $y_c(n)$ jsou 3^n a $(-2)^n$, takže je vynecháme a dostaneme partikulární řešení $y_p(n) = a_2 n 3^n$. Dosadíme do původní rovnice (81) a dostaneme

$$a_2(n + 2)3^{n+2} - a_2(n + 1)3^{n+1} + 6a_2 n 3^n = 5 \cdot 3^n,$$

a tedy

$$a_2 = \frac{1}{3},$$

čímž $y_p(n) = n 3^{n-1}$ a obecné řešení (81) je

$$y(n) = n 3^{n-1} + c_1 3^n + c_2 (-2)^n$$

Příklad 6.25 Řešte diferenční rovnici

$$y(n+2) + 4y(n) = 8(2^n) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \quad (83)$$

Řešení Charakteristická rovnice a kořeny homogenní úlohy:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i.$$

Po převodu na polární souřadnice, $r = 2$, $\theta = \pi/2$, podle (66) dostaneme

$$y_c(n) = 2^n \left(c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right).$$

Všimněte si, že člen $2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ se objevuje v $y_c(n)$, takže základní tvar $y_p(n)$ z tabulky 5 pro $g(n) = 8(2^n) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ rozšíříme o n :

$$y_p(n) = 2^n \left(an \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + bn \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right). \quad (84)$$

Dosadíme z (84) do (83) a dostaneme

$$\begin{aligned} & 2^{n+2} \left[a(n+2) \cos\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + b(n+2) \sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) \right] \\ & + 4 \cdot 2^n \left[an \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + bn \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = 8 \cdot 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Odtud s úpravami

$$\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) = -\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

a

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) = -\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} & 4 \cdot 2^n \left[-a(n+2) \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - b(n+2) \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ & + 4 \cdot 2^n \left[an \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + bn \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = 8 \cdot 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

což vede k

$$8 \cdot 2^n \left[-a \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - b \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] = 8 \cdot 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

a tedy porovnáním koeficientů u \cos a \sin zjistíme, že $a = -1$ a $b = 0$. Dosadíme zpět do (84):

$$y_p(n) = -2^n n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Celkové obecné řešení nehomogenní úlohy (83):

$$y(n) = 2^n \left(c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right).$$

Cvičení ke kapitole 6.4

Pro úlohy 1–6 nalezněte partikulární řešení.

1. $y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 1 + n.$

2. $y(n+2) + 8y(n+1) + 12y(n) = e^n.$

3. $y(n+2) - 5y(n+1) + 4y(n) = 4^n - n^2.$

4. $y(n+2) + 8y(n+1) + 7y(n) = ne^n.$

5. $y(n+2) - y(n) = n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$

6. $(E^2 + 9)^2 y(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$

Pro úlohy 7–9 nalezněte řešení diferenční rovnice.

7. $\Delta^2 y(n) = 16, y(0) = 2, y(1) = 3.$

8. $\Delta^2 y(n) + 7y(n) = 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), y(0) = 0, y(1) = 1.$

9. $(E - 3)(E^2 + 1)y(n) = 3^n, y(0) = 0, y(1) = 1, y(2) = 3.$

Pro úlohy 10 a 11 nalezněte obecné řešení diferenční rovnice.

10. $y(n+2) - y(n) = n2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$

11. $y(n+2) + 8y(n+1) + 7y(n) = n2^n.$



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika na PřF Univerzity Palackého
v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

KMA/DDS, DDSM

Diskrétní dynamické systémy

Limitní chování řešení diferenčních rovnic druhého řádu

Přednáška 7

7 Limitní chování řešení

Pro zjednodušení se zde budeme zabývat pouze diferenčními rovnicemi druhého řádu:

$$y(n+2) + p_1y(n+1) + p_2y(n) = 0. \quad (85)$$

Nechť $\lambda_{1,2}$ jsou její charakteristické kořeny. Potom mohou nastat následující tři případy:

(a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Potom $y_1(n) = \lambda_1^n$ a $y_2(n) = \lambda_2^n$ jsou dvě lineárně nezávislá řešení (85). Jestliže $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, potom $y_1(n)$ nazýváme *dominantní řešení* a λ_1 *dominantní charakteristický kořen*. Ukážeme, že limitní chování obecného řešení $y(n) = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n$ je určováno dominantním řešením. Budeme tedy předpokládat (bez ztráty obecnosti), že $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. potom

$$y(n) = \lambda_1^n \left[a + b \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right].$$

Jelikož je podle předpokladu

$$\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1,$$

zřejmě platí, že

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \rightarrow 0 \text{ pro } n \rightarrow \infty.$$

To ovšem vede k závěru, že limita obecného řešení se rovná limitě dominantního řešení:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a\lambda_1^n.$$

V tomto případě existuje v závislosti na hodnotě λ_1 šest možných výsledných situací:

1. $\lambda_1 > 1$: nestabilní systém, posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ diverguje k ∞ .
2. $\lambda_1 = 1$: posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ je konstantní.
3. $0 < \lambda_1 < 1$: stabilní systém, posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ monotonně klesá k nule.
4. $-1 < \lambda_1 < 0$: stabilní systém, posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ osciluje kolem nuly (mění znaménko) a konverguje k ní.
5. $\lambda_1 = -1$: posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ osciluje mezi dvěma hodnotami, a_1 a $-a_1$.
6. $\lambda_1 < -1$: nestabilní systém, posloupnost $\{a_1\lambda_1^n\}$ osciluje a v absolutní hodnotě roste nade všechny meze.

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.

Obecné řešení (85) je dáno $y(n) = (a_1 + a_2n)\lambda^n$. Vzhledem k přítomnosti n již nenalezneme konstantní řešení jako pro $\lambda_1 = 1$ ani oscilující mezi dvěma hodnotami jako pro $\lambda_1 = -1$. Naopak zde můžeme uvažovat $\lambda = 0$, což u dominantního řešení nebylo možné. Celkové limitní chování je zřejmě určeno limitním chováním $a_2n\lambda^n$:

1. $\lambda \geq 1$: nestabilní systém, posloupnost $\{a_2n\lambda^n\}$ diverguje k ∞ .
2. $0 < \lambda < 1$: stabilní systém, posloupnost $\{a_2n\lambda^n\}$ monotonně klesá k nule (ukážete to).

3. $\lambda = 0$: přímo konstantní řešení.
4. $-1 < \lambda < 0$: stabilní systém, posloupnost $\{a_2 n \lambda^n\}$ osciluje kolem nuly (mění znaménko) a konverguje k ní.
5. $\lambda \leq -1$: nestabilní systém, posloupnost $\{a_2 n \lambda^n\}$ osciluje a v absolutní hodnotě roste nade všechny meze.

(c) Komplexní kořeny: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$.

Ze vztahu (66) víme, že v tomto případě je řešení (85) dáno vztahem

$$y(n) = ar^n \cos(n\theta) + br^n \sin(n\theta), \text{ kde } r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \theta = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Řešení zřejmě osciluje, neboť funkce \cos a \sin oscilují. Avšak při podrobnějším zkoumání zjistíme, že může oscilovat třemi různými způsoby, a to v závislosti na umístění komplexně sdružených kořenů vzhledem k jednotkové kružnici v komplexní rovině:

1. $r > 1$: komplexně sdružené kořeny leží vně jednotkové kružnice. $y(n)$ osciluje a v absolutní hodnotě roste nade všechny meze (nestabilní systém).
2. $r = 1$: komplexně sdružené kořeny leží na jednotkové kružnici. $y(n)$ osciluje v konstantní vzdálenosti od počátku.
3. $r < 1$: komplexně sdružené kořeny leží uvnitř jednotkové kružnice. $y(n)$ osciluje a v absolutní hodnotě konverguje k nule (stabilní systém).

Uvažujme nehomogenní diferenční rovnici s konstantní pravou stranou

$$y(n+2) + p_1 y(n+1) + p_2 y(n) = M, \quad (86)$$

kde $M > 0$. Zde již nulová posloupnost není řešením. Místo toho existuje rovnovážný bod (nebo řešení) $y(n) = y^*$. Dosadíme do (86) a dostaneme

$$y^* + p_1 y^* + p_2 y^* = M,$$

a tedy

$$y^* = \frac{M}{1 + p_1 + p_2}.$$

Tím jsme potvrdili, že y^* je partikulárním řešením naší rovnice. Obecné řešení tedy můžeme vyjádřit následovně:

$$y(n) = y^* + y_c(n). \quad (87)$$

Je zřejmé, že $y(n) \rightarrow y^*$ pouze v případě $y_c(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Dále $y(n)$ osciluje kolem y^* (výraz $y(n) - y^*$ střídá znaménko) pouze když $y_c(n)$ osciluje kolem nuly.

Příklad 7.26 Nalezněte podmínky, za kterých řešení rovnice

$$y(n+2) - \alpha(1+\beta)y(n+1) + \alpha\beta y(n) = 1, \quad \alpha, \beta > 0,$$

(a) konverguje k rovnovážnému bodu y^* a

(b) osciluje kolem y^* .

Řešení Nejprve nalezneme rovnovážný bod y^* , k tomu položíme $y(n) \equiv y^*$ a dosadíme do rovnice:

$$y^* - \alpha(1 + \beta)y^* + \alpha\beta y^* = 1, \quad \alpha, \beta > 0,$$

$$y^* = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad \alpha \neq 1.$$

Nyní najdeme charakteristické kořeny.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(1 + \beta) \pm \sqrt{\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$$

(a) Aby řešení konvergovala k y^* , musí λ_1 a λ_2 ležet v jednotkové kružnici (tj. v reálném případě v intervalu $(-1; 1)$).

(\mathbb{R}) V prvním případě je $\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta \geq 0$ ($\iff \alpha \geq \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$), a tedy $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ a má platit: $|\lambda_1| < 1$ a $|\lambda_2| < 1$, což můžeme přepsat a dále upravovat následujícím způsobem (nejprve pro λ_1):

$$-1 < \frac{\alpha(1 + \beta) + \sqrt{\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2} < 1,$$

$$-2 < \alpha(1 + \beta) + \sqrt{\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta} < 2,$$

$$-2 - \alpha(1 + \beta) < \sqrt{\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta} < 2 - \alpha(1 + \beta). \quad (88)$$

Obdobně pro λ_2 dostaneme nerovnosti

$$-2 - \alpha(1 + \beta) < -\sqrt{\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta} < 2 - \alpha(1 + \beta). \quad (89)$$

Máme tedy vyhodnotit celkem čtyři nerovnosti. Uvidíme, že se nám zredukuje na pouhé dvě, neboť první nerovnost v (88) je splněna automaticky (podle předpokladů je vlevo záporné číslo a uprostřed nezáporné) a druhá v (89) plyne z druhé v (88). Po umocnění druhé v (88) dostaneme:

$$\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta < 4 - 4\alpha(1 + \beta) + \alpha^2(1 + \beta)^2,$$

a tedy

$$\alpha < 1. \quad (90)$$

Podobně po umocnění první v (89)

$$4 + 4\alpha(1 + \beta) + \alpha^2(1 + \beta)^2 > \alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta,$$

$$0 < 1 + \alpha + 2\alpha\beta. \quad (91)$$

(\mathcal{C}) Ve druhém případě je $\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta < 0$ ($\iff \alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$), takže $\lambda_{1,2} \in \mathcal{C}$ jsou komplexně sdružená a mají ležet uvnitř jednotkové kružnice ($r < 1$):

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib = \frac{\alpha(1 + \beta)}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\alpha\beta - \alpha^2(1 + \beta)^2}}{2},$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{\alpha^2(1 + \beta)^2}{4} + \frac{4\alpha\beta - \alpha^2(1 + \beta)^2}{4}} < 1,$$

$$\frac{\alpha^2(1+\beta)^2 + 4\alpha\beta - \alpha^2(1+\beta)^2}{4} < 1, \\ \alpha\beta < 1. \quad (92)$$

Je zřejmé, že podmínka (91) je splněna automaticky, neboť α i β jsou kladná čísla, takže pro to, aby řešení konvergovala k y^* stačí splnění podmínek (90) nebo (92), jmenovitě

$$\alpha < 1 \wedge \alpha \geq \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}, \quad \text{nebo} \quad \alpha\beta < 1 \wedge \alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}.$$

(b) Pro oscilaci kolem y^* je nutné, aby byl v reálném případě dominantní charakteristický kořen záporný. To ale v tomto případě není možné, neboť pro reálné

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(1+\beta) \pm \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$$

je

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \text{ a } \lambda_1 > 0,$$

dominantní charakteristický kořen λ_1 je tedy kladný.

Oscilace tak může nastat pouze v případě komplexním (bez bližší specifikace). K tomu samozřejmě stačí záporný diskriminant:

$$\alpha^2(1+\beta)^2 < 4\alpha\beta, \quad \text{po úpravě} \quad \alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}.$$

Řešení jsou tedy oscilatorická, jestliže $\alpha < \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Modernizace studijního programu Matematika na PřF Univerzity Palackého
v Olomouci

CZ.1.07/2.2.00/28.0141

KMA/DDS, DDSM

Diskrétní dynamické systémy

Aplikace diferenčních rovnic

Přednáška 8

8 Aplikace

8.1 Rozmnožování jednoletých rostlin

Materiál k této úloze pochází od Charlese Darwina. Chceme odvodit matematický model, který popisuje vývoj počtu rostlin v každé generaci. Tyto rostliny na jaře vyrostou ze semen a na podzim na konci svého života dají vzniknout novým semenům pro další rozmnožování. Tato semena vzklíčí buď na jaře příštího roku, nebo toho dalšího, anebo vůbec. Pouze část přežije zimu a pouze část vzklíčí.

Nechť

$$\begin{aligned}\gamma &= \text{počet semen na jedné rostlině,} \\ \alpha &= \text{podíl jeden rok starých semen, které na jaře vzklíčí,} \\ \beta &= \text{podíl dva roky starých semen, které na jaře vzklíčí,} \\ \sigma &= \text{podíl semen, které přežijí danou zimu.}\end{aligned}$$

Jestliže $p(n)$ popisuje počet rostlin v generaci n , potom

$$p(n) = \left(\begin{array}{c} \text{rostliny vzešlé} \\ \text{z ročních semen} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{rostliny vzešlé} \\ \text{z dvouletých semen} \end{array} \right),$$
$$p(n) = \alpha s_1(n) + \beta s_2(n), \quad (93)$$

kde $s_1(n)$ (resp. $s_2(n)$) je počet ročních (dvouletých) semen přeživších danou zimu.

Dvouletá semena, která na jaře nevzešla ($(1 - \beta)s_2(n)$) již odepisujeme, se zbytkem ročních semen $\tilde{s}_1(n)$ však musíme dále počítat pro příští rok:

$$\tilde{s}_1(n) = (1 - \alpha)s_1(n). \quad (94)$$

Rostliny na podzim vyprodukují $s_0(n)$ semen (γ za každou rostlinu),

$$s_0(n) = \gamma p(n). \quad (95)$$

Následující zimu z nich přežije pouze σ -násobek, takže

$$s_1(n+1) = \sigma s_0(n) = \sigma \gamma p(n). \quad (96)$$

Podobně můžeme postupně odvodit i vztah pro $s_2(n+1)$:

$$\begin{aligned}s_2(n+1) &= \sigma \tilde{s}_1(n), \\ s_2(n+1) &= \sigma(1 - \alpha)s_1(n), \\ s_2(n+1) &= \sigma^2 \gamma (1 - \alpha) p(n-1).\end{aligned} \quad (97)$$

Po dosazení do (93) dostaneme

$$p(n+1) = \alpha \sigma \gamma p(n) + \beta \sigma^2 \gamma (1 - \alpha) p(n-1),$$

nebo

$$p(n+2) = \alpha \sigma \gamma p(n+1) + \beta \sigma^2 \gamma (1 - \alpha) p(n). \quad (98)$$

Příslušná charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - \alpha \sigma \gamma \lambda + \beta \sigma^2 \gamma (1 - \alpha) = 0.$$

Charakteristické kořeny:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)} \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)} \right].$$

Při bližším studiu zjistíme, že charakteristické kořeny jsou reálné a

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

Aby byl zajištěn neomezený růst populace jednoletých rostlin, musí být dominantní charakteristický kořen λ_1 větší jak 1:

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)} \right] > 1,$$

nebo

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)} > 1 - \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}.$$

Po umocnění a úpravách dostaneme

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}. \quad (99)$$

Pokud položíme $\beta = 0$ (z dvouletých semen již žádné nevzejde), dojdeme ještě k jednodušší podmínce

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma}. \quad (100)$$

Ta nám říká, že součin $\gamma\alpha\sigma$ musí přesáhnout jedničku.

8.2 Gamblerův krach

Gambler hraje posloupnost jednotlivých her a v každé z nich je pravděpodobnost, že vyhraje 1Kč známá hodnota q .

Naopak pravděpodobnost, že prohraje 1Kč zase $(1 - q)$, kde $0 \leq q \leq 1$.

Hru opouští ve dvou případech: buď vše prohraje, anebo vyhraje cílovou částku N Kč. První případ nazýváme krachem.

Nechť $p(n)$ značí pravděpodobnost, že gambler zkrachuje při hotovosti n Kč.

Při hotovosti n Kč může hráč pokračovat dvěma směry:

- buď (s pravděpodobností q) vyhraje 1Kč a jeho pravděpodobnost krachu se změní na $p(n + 1)$,
- nebo (s pravděpodobností $1 - q$) prohraje 1Kč a jeho pravděpodobnost krachu se změní na $p(n - 1)$.

Toto můžeme zapsat následovně:

$$p(n) = qp(n+1) + (1-q)p(n-1),$$

nebo

$$p(n+1) = qp(n+2) + (1-q)p(n).$$

Odtud již ve tvaru diferenční rovnice:

$$p(n+2) - \frac{1}{q}p(n+1) + \frac{1-q}{q}p(n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (101)$$

přičemž $p(0) = 1$ a $p(N) = 0$. Charakteristická rovnice:

$$\lambda^2 - \frac{1}{q}\lambda + \frac{1-q}{q} = 0.$$

Charakteristické kořeny:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2q} + \frac{1-2q}{2q} = \frac{1-q}{q},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2q} - \frac{1-2q}{2q} = 1.$$

Obecné řešení:

$$p(n) = c_1 + c_2 \left(\frac{1-q}{q} \right)^n, \quad \text{jestliže } q \neq \frac{1}{2}.$$

Využitím počátečních podmínek

$$c_1 + c_2 = 1,$$

$$c_1 + c_2 \left(\frac{1-q}{q} \right)^N = 0,$$

dostaneme

$$c_1 = \frac{-\left(\frac{1-q}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}, \quad c_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}.$$

Odtud

$$p(n) = \frac{\left(\frac{1-q}{q}\right)^n - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}{1 - \left(\frac{1-q}{q}\right)^N}. \quad (102)$$

Speciální případ $q = \frac{1}{2}$ (férová hra) musíme probrat zvlášť. Zde dostaneme dvojnásobný charakteristický kořen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1.$$

Obecné řešení:

$$p(n) = a_1 + a_2 n.$$

S počátečními podmínkami:

$$p(n) = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N-n}{N}. \quad (103)$$

Příklady.

1. Máme 4Kč, pravděpodobnost výhry je $q = 0,3$ a $N = 10$ Kč:

$$p(4) = \frac{\left(\frac{0,7}{0,3}\right)^4 - \left(\frac{0,7}{0,3}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{0,7}{0,3}\right)^{10}} \approx 0,994.$$

2. $q = \frac{1}{2}$, $N = 100$ Kč a $n = 20$:

$$p(20) = \frac{100 - 20}{100} = 0,8.$$

Reference

- [1] L. A. V. Carvalho. On a Method to Investigate Bifurcation of Periodic Solutions in Retarded Differential Equations. *Journal of Difference Equations and Applications*, 4(1):17–27, 1998.
- [2] S. N. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Springer, New York, 1999.
- [3] T. Li and J. Yorke. Period three implies chaos. *Amer. Math. Monthly*, 82:985–992, 1975.
- [4] E. C. Pielou. *An Introduction to Mathematical Ecology*. Wiley Interscience, New York, 1969.
- [5] C. Robinson. *Dynamical Systems (Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos)*. CRC Press, Boca Raton, FL., 1995.
- [6] H. Sedaghat. The impossibility of unstable globally attracting fixed points for continuous mappings of the line. *Amer. Math. Monthly*, 104:356–358, 19??
- [7] A. N. Sharkovskii. Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself. *Ukrainian Math. J.*, 16:61–71, 1964.