

Cvičení č. 1 z KMA-MMAN1

25. září 2009

1 Opakování

Úloha 1.1. Vyjádřete výrazem bez absolutní hodnoty $\left(|-3x| - |2x^{-1}|\right)^2 - \frac{4}{x^2}$.

Řešení. $\left(|-3x| - |2x^{-1}|\right)^2 - \frac{4}{x^2} = 9x^2 - 12\left|\frac{x}{x}\right| + \frac{4}{x^2} - \frac{4}{x^2} = 9x^2 - 12.$ $\square$

Úloha 1.2. Zjednodušte výraz A a určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ má smysl:

$$A = \frac{(a+2)^2 - a^2}{4a^2 - 4} - \frac{1}{a^2 - 1}.$$

Řešení. $a \neq \pm 1,$

$$\begin{aligned} A &= \frac{(a+2)^2 - a^2}{4a^2 - 4} - \frac{1}{a^2 - 1} = \frac{a^2 + 4a + 4 - a^2}{4a^2 - 4} - \frac{4}{4a^2 - 4} = \\ &= \frac{a^2 + 4a + 4 - a^2 - 4}{4a^2 - 4} = \frac{a}{a^2 - 1}. \end{aligned}$$

$\square$

Úloha 1.3. Součet dvou čísel je 11, součet jejich dekadických logaritmů je 1. Určete tato čísla.

Řešení. Dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých a a b :

$$a + b = 11,$$

$$\log_{10} a + \log_{10} b = 1,$$

$$a + b = 11,$$

$$\log_{10}(a \cdot b) = \log_{10} 10,$$

$$a + b = 11,$$

$$a \cdot b = 10,$$

a tedy $a = 1$ a $b = 10$ (nebo $a = 10$ a $b = 1$).

$\square$

Úloha 1.4. Pro která $a \in \mathbb{R}$ má rovnice $2x^2 + 3ax + 2 = 0$ jeden dvojnásobný kořen?

Řešení. Jde o kvadratickou rovnici s parametrem a . Záleží tedy na diskriminantu

$$D = (3a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9a^2 - 16,$$

který musíme položit roven 0 ($D > 0$ dva reálné kořeny, $D = 0$ jeden dvojnásobný reálný kořen, $D < 0$ dva komplexně sdružené kořeny):

$$D = 9a^2 - 16 = 0 \implies a = \pm \frac{4}{3}.$$

Úloha má tedy dvě řešení, $a = \pm \frac{4}{3}$, což obnáší dvě možné kvadratické rovnice:

$$2x^2 + 4x + 2 = 0 \quad \text{a} \quad 2x^2 - 4x + 2 = 0.$$

□

Úloha 1.5. Vypočítejte $\log_{\frac{1}{2}}(\log_5 25)$.

Řešení. $\log_{\frac{1}{2}}(\log_5 25) = \log_{\frac{1}{2}}(2) = -1$.

□

Úloha 1.6. Zjednodušte výraz $\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{a^3\sqrt{a^2}}}$, kde $a \geq 0$.

Řešení. $\sqrt{\frac{1}{a}\sqrt{a^3\sqrt{a^2}}} = \left(\frac{1}{a}\left(a(a^2)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{a}\left(a^{1+\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{-1}\left(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{5}{6}-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{-\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}} = a^{-\frac{1}{12}}.$

□

Úloha 1.7. Které z následujících tvrzení je pravdivé pro každé $x \in \mathbb{R}$?

$$a) \sqrt[3]{x^3} = |x|, \quad b) -\ln x < 0, \quad c) e^{-x} \geq 1, \quad d) \sqrt{x^2} = |x|, \quad e) x^2 > x.$$

Řešení. Platnost tvrzení „pro každé $x \in \mathbb{R}$ “ lze popřít protipříkladem:

ad a) Protipříklad: pro $x = -1$ dostaneme $-1 \neq 1$.

ad b) Protipříklad: pro $x = \frac{1}{e}$ dostaneme $1 < 0$.

ad c) Protipříklad: pro $x = 1$ dostaneme $\frac{1}{e} < 1$.

ad d) Platí.

ad e) Protipříklad: pro $x = 0$ dostaneme $0 > 0$.

□

Úloha 1.8. V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici $|x - 1| \leq |2x - 3|$.

Řešení. Najdeme nulové body výrazů v absolutní hodnotě: jsou to $x_1 = 1$ (pro $x - 1 = 0$) a $x_2 = \frac{3}{2}$ (pro $2x - 3 = 0$). Vyplníme následující tabulku:

	$x \in (-\infty; 1)$	$x \in \langle 1; \frac{3}{2} \rangle$	$x \in \langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle$
$ x - 1 $	$1 - x$	$x - 1$	$x - 1$
$ 2x - 3 $	$3 - 2x$	$3 - 2x$	$2x - 3$

a) $x \in (-\infty; 1)$:

$$1 - x \leq 3 - 2x, \quad x \leq 2, \quad x \in (-\infty; 2) \cap (-\infty; 1) = (-\infty; 1);$$

b) $x \in \langle 1; \frac{3}{2} \rangle$:

$$x - 1 \leq 3 - 2x, \quad 3x \leq 4, \quad x \leq \frac{4}{3}, \quad x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cap \left\langle 1; \frac{3}{2} \right\rangle = \left\langle 1; \frac{4}{3} \right\rangle;$$

c) $x \in \langle \frac{3}{2}, +\infty \rangle$:

$$x - 1 \leq 2x - 3, \quad -x \leq -2, \quad x \geq 2, \quad x \in \langle 2; \infty \rangle \cap \left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle = \langle 2; \infty \rangle.$$

Celkově tedy:

$$X = (-\infty; 1) \cup \left\langle 1; \frac{4}{3} \right\rangle \cup \langle 2; \infty \rangle = \left(-\infty; \frac{4}{3}\right) \cup \langle 2; \infty \rangle.$$

□

Úloha 1.9. Řešte $\frac{(2^x)^{x+1}}{4} = \frac{\sqrt{32^x}}{16} \cdot (\sqrt{8})^x$.

Řešení. Využijeme toho, že v rovnici se vyskytují mocniny 2:

$$\frac{(2^x)^{x+1}}{4} = \frac{\sqrt{32^x}}{16} \cdot (\sqrt{8})^x,$$

$$\frac{2^{x \cdot (x+1)}}{2^2} = \frac{\sqrt{2^{5 \cdot x}}}{2^4} \cdot \left(2^{3 \cdot \frac{1}{2}}\right)^x,$$

$$2^{x^2+x-2} = 2^{5x \cdot \frac{1}{2} - 4} \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x},$$

$$2^{x^2+x-2} = 2^{\frac{5}{2}x - 4 + \frac{3}{2}x},$$

$$2^{x^2+x-2} = 2^{4x-4}.$$

Porovnáme exponenty a dostaneme:

$$x^2 + x - 2 = 4x - 4, \quad x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Vyřešením této kvadratické rovnice získáme dvě řešení $X = \{1, 2\}$.

□

Úloha 1.10. Řešte rovnici

$$\frac{2}{3} - \frac{x+2c}{6} = \frac{x}{6} + \frac{1-3c}{4}, \quad c \in \mathbb{R},$$

a pak určete, pro které hodnoty parametru c je řešení nezáporné.

Řešení.

$$\frac{2}{3} - \frac{x+2c}{6} = \frac{x}{6} + \frac{1-3c}{4}, \quad | \cdot 12,$$

$$8 - 2x - 4c = 2x + 3 - 9c,$$

$$x = \frac{5+5c}{4}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Nezáporné řešení: $x \geq 0$, a tedy $\frac{5+5c}{4} \geq 0$, $5+5c \geq 0$, $c \geq -1$. □

Úloha 1.11. Řešte $\frac{5x+1}{3} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \dots$.

Řešení. Pravou stranu tvoří součet geometrické řady ($a_1 = 1$, $q = \frac{x}{2}$), která konverguje pro $|q| < 1$, tedy $x \in (-2; 2)$ (pro $x \notin (-2; 2)$ pravá strana nemá součet, a tak rovnici nelze řešit, omezením na interval $x \in (-2; 2)$ tedy nepřijdeme o žádné řešení).

Součet geometrické řady je

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}, \quad \text{pro } x \in (-2; 2),$$

což nás na intervalu $(-2; 2)$ vede k upravené rovnici

$$\frac{5x+1}{3} = \frac{2}{2-x}, \quad (5x+1)(2-x) = 6, \quad -5x^2 + 9x - 4 = 0.$$

Vyřešíme získanou kvadratickou rovnici:

$$D = 81 - 4 \cdot (-5) \cdot (-4) = 1, \quad x_1 = \frac{4}{5}, \quad x_2 = 1.$$

Obě řešení patří do intervalu $(-2; 2)$, a tak řeší i původní rovnici. □