

Cvičení č. 2 z KMA-MMAN1

2. října 2009

1 Číselné množiny, omezenost, supremum a infimum

1.1 Racionální čísla

Úloha 1.1. *Převeďte na zlomek (oběma způsoby) číslo $a = 0, \overline{311}$.*

Řešení. První způsob (převodem na geometrickou řadu):

$$a = 0, \overline{311} = 0,311 + 0,311 \cdot 10^{-3} + 0,311 \cdot 10^{-6} + 0,311 \cdot 10^{-9} + \dots$$

Parametry geometrické řady:

$$a_1 = 0,311, \quad q = 10^{-3}.$$

Součet geometrické řady:

$$a = s = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0,311}{1 - 10^{-3}} = \frac{311}{1000 - 1} = \frac{311}{999}.$$

Druhý způsob (využití periody):

$$999a = 1000a - a = 311, \overline{311} - 0, \overline{311} = 311 \implies a = \frac{311}{999}.$$

□

1.2 Omezenost množin

Úloha 1.2. *Vyšetřete (ne)omezenost následujících množin:*

$$M_1 = \left\{ 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots \right\},$$

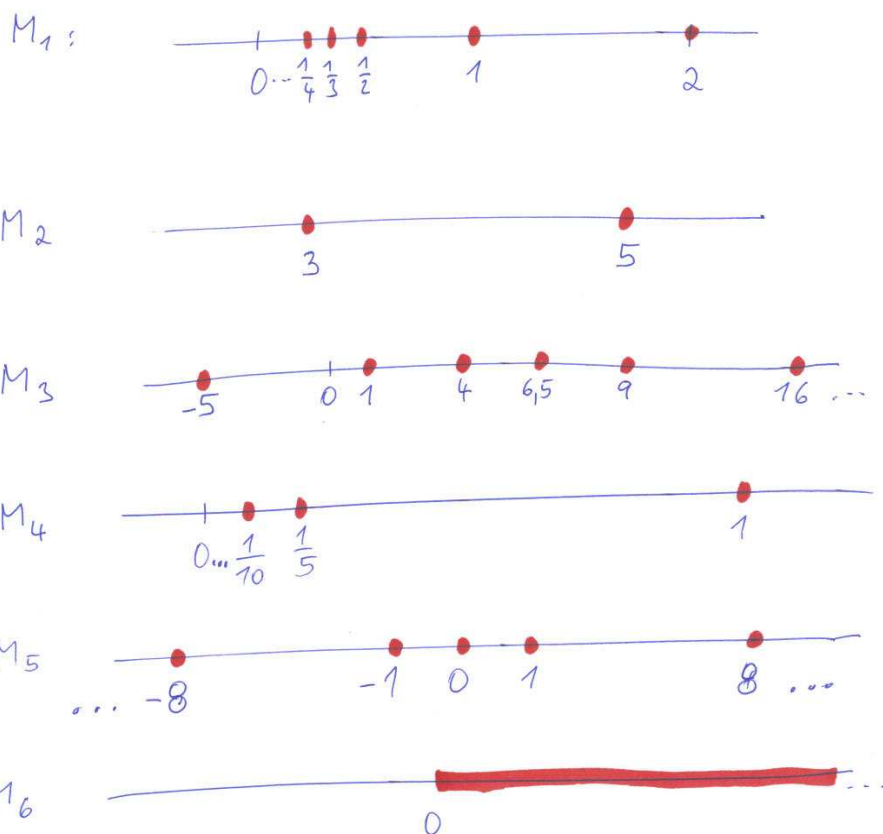
$$M_2 = \{3; 5\},$$

$$M_3 = \{6, 5; -5; 1; 4; 9; 16; \dots\},$$

$$M_4 = \left\{ \frac{1}{z^2 + 1}; z \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$M_5 = \{z^3; z \in \mathbb{Z}\}$$

$$M_6 = \{q^2; q \in \mathbb{Q}\}.$$



Řešení.

M_1 : Omezená, $M_1 \subset \langle 0; 2 \rangle$.

M_2 : Omezená (jako každá konečná mna): $M_2 \subset \langle 3; 5 \rangle$.

M_3 : Neomezená (zdola i shora).

M_4 : Omezená, $M_4 \subset \langle 0; 1 \rangle$.

M_5 : Neomezená (zdola i shora).

M_6 : Neomezená (shora).

□

Úloha 1.3. U následujících množin určete supremum a infimum, případně i maximum a minimum.

$$M_1 = \langle -5; 3 \rangle \cup \langle 7; 13 \rangle,$$

$$M_2 = \left\{ \frac{2n+1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \frac{2+(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$M_4 = \{x \in \mathbb{R}; |3x-1| < x < |3x+1|\},$$

$$M_5 = \{0, 5; 0, 55; 0, 555; 0, 5555; \dots\}.$$

Řešení. M_1 : $\sup M_1 = 13$, $\inf M_1 = -5 = \min M_1$, $\max M_1$ neexistuje.

$$M_2: M_1 = \left\{ \frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \dots \right\}.$$

Prvky množiny se postupně zmenšují:

$$\frac{2n+1}{n} > \frac{2(n+1)+1}{n+1}, \quad \frac{2n+1}{n} > \frac{2n+3}{n+1},$$

$$(2n+1)(n+1) > (2n+3)n, \quad 2n^2 + 3n + 1 > 2n^2 + 3n, \quad 1 > 0,$$

a tedy

$$\max M_2 = 3 = \sup M_2.$$

Dokážeme, že $\inf M_2 = 2$. Nejprve ukážeme, že 2 je dolní závora:

$$2 \leq \frac{2n+1}{n}, \quad 2n \leq 2n+1, \quad 0 \leq 1.$$

Nyní ověříme, že jde o největší dolní závora:

$$\alpha = 2, \quad \alpha' = 2 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \exists x' \in M_2; x' < \alpha',$$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}; \frac{2n_0+1}{n_0} < 2 + \varepsilon, \quad 2n_0 + 1 < 2n_0 + \varepsilon n_0,$$

$$1 < \varepsilon n_0, \quad n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Lze tedy takové n_0 nalézt pro libovolně malé kladné ε , například pro $\varepsilon = 0,001$ dostaneme pro n_0 podmínku $n_0 > \frac{1}{0,001} = 1000$, kterou splňuje již $n_0 = 1001$ (a každé větší přirozené číslo).

$\min M_2$ neexistuje, neboť $2 \notin M_2$.

$$M_3: \max M_3 = \frac{3}{2} = \sup M_3, \quad \inf M_3 = 0, \quad \min M_3 \text{ neexistuje.}$$

$$M_4: \text{Dvě nerovnosti jsou splněny pro } x \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right).$$

Tím je dáno, že $\sup M_4 = \frac{1}{2}$ a $\inf M_4 = \frac{1}{4}$. Minimum a maximum neexistují.

$$M_5: \text{Hodnoty postupně rostou, takže } \min M_5 = 0,5 = \inf M_5.$$

Dokážeme, že $0, \bar{5}$ je supremem. Horní závora:

$$0, \bar{5} - 0, \underbrace{555 \dots 5}_{n\text{-krát}} 000 \dots = 0, \underbrace{000 \dots 0}_{n\text{-krát}} 555 \dots > 0.$$

Nejmenší horní závora: nechť

$$\varepsilon_n = 0, \underbrace{000 \dots 0}_{(n-1)\text{-krát}} 5 000 \dots, \quad (\text{pro } n \rightarrow \infty \text{ je } \varepsilon_n \rightarrow 0),$$

$$\beta' = \beta - \varepsilon_n = 0, \bar{5} - 0, \underbrace{000 \dots 0}_{(n-1)\text{-krát}} 5 000 \dots = 0, \underbrace{555 \dots 5}_{(n-1)\text{-krát}} 0 555 \dots$$

Zde stačí volit

$$x' = 0, \underbrace{555 \dots 5}_{n\text{-krát}} 000 \dots,$$

neboť

$$x' - \beta' = 0, \underbrace{555 \dots 5}_{(n-1)\text{-krát}} 5 00 \dots - 0, \underbrace{555 \dots 5}_{(n-1)\text{-krát}} 0 555 \dots = 0, \underbrace{000 \dots 0}_{(n-1)\text{-krát}} 4 444 \dots > 0,$$

a tak je $x' > \beta'$ a β' není horní závorou pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Odtud: $\sup M_{\bar{5}} = 0, \bar{5}$. Zároveň platí, že $0, \bar{5} \notin M_{\bar{5}}$, a tak $\max M_{\bar{5}}$ neexistuje.

□