

Cvičení č. 3 z KMA-MMAN1

9. října 2009

1 Počítání s nevlastními čísly $-\infty$ a $+\infty$

Úloha 1.1. Určete a zdůvodněte, zda daný výraz má smysl, resp. určete jeho hodnotu.

$$a = \frac{-5}{-\infty} + \left(-1000 + \infty + 1^{\frac{5}{-\infty}}\right).$$

Řešení.

$$a = 0 + \left(+\infty + 1^0\right) = 0 + \left(+\infty + 1\right) = +\infty.$$

□

2 Klasifikace bodů vzhledem ke množině

Úloha 2.1. Je dána množina

$$M = (-1; 0) \cup (0; 1).$$

Určete pro množinu M : vnitřek, hranici, uzávěr, derivaci, množinu jejích izolovaných bodů, supremum a infimum, největší a nejmenší prvek.

Řešení. Vnitřek $M = (-1; 0) \cup (0; 1)$, hranice $M = \{-1; 0; 1\}$, uzávěr $M = \langle -1; 1 \rangle$, derivace $M = \langle -1; 1 \rangle$, množina izolovaných bodů $M = \emptyset$, $\sup M = 1 = \max M$, $\inf M = -1$, $\min M$ neexistuje. □

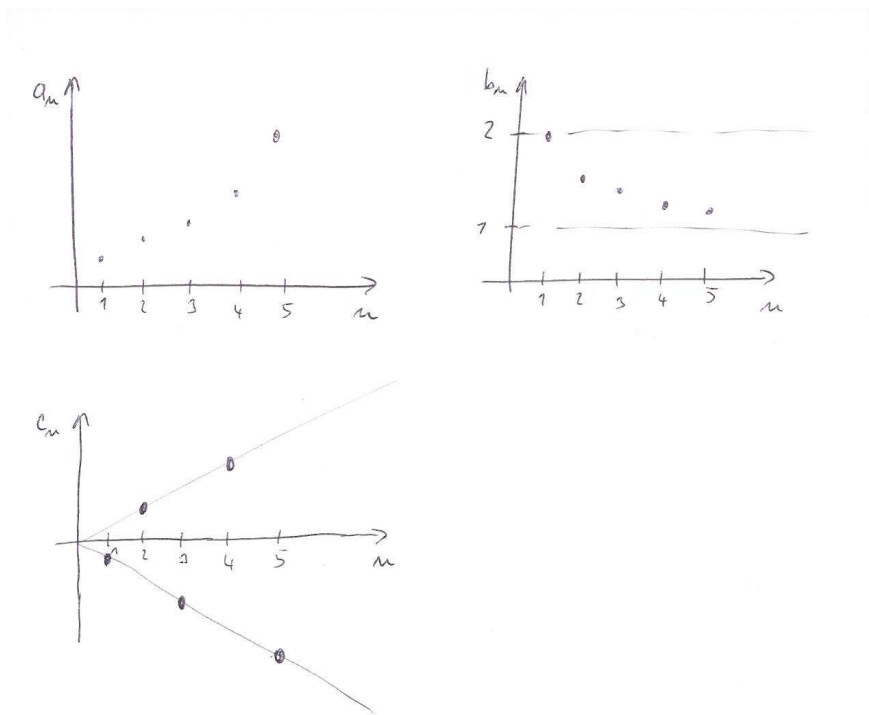
3 Číselné posloupnosti

Úloha 3.1. Znázorněte graficky prvních pět členů posloupností:

$$a_n = n^2, \quad b_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad c_n = (-1)^n n.$$

Řešení.

$$\{a_n\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}, \quad \{b_n\} = \left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots\right\}, \quad \{c_n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, \dots\}.$$



□

3.1 Omezenost posloupností

Úloha 3.2. Určete, zda jsou následující posloupnosti ohraničené:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = 3 \sin(n^2 + 1).$$

Řešení. Snažíme se omezit n -tý člen a tím i celou posloupnost:

$$|a_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq 1,$$

a tedy posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, neboť

$$-1 \leq a_n \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Podobně:

$$|b_n| = |3 \sin(n^2 + 1)| = 3 |\sin(n^2 + 1)| \leq 3 \cdot 1 = 3,$$

neboť

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{a tedy i} \quad -1 \leq \sin(n^2 + 1) \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Takto je posloupnost $\{b_n\}$ omezená, neboť

$$-3 \leq b_n \leq 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

3.2 Posloupnosti aritmetické a geometrické

Úloha 3.3. Zjistěte, zda jsou následující posloupnosti aritmetické:

$$a_n = 2 - \frac{n}{3}, \quad b_n = \frac{2n+1}{n+1}.$$

Řešení. U aritmetické posloupnosti musí být rozdíl $(n+1)$. a n -tého členu konstantní pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro $a_n = 2 - \frac{n}{3}$ máme

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \dots \right\},$$

takže z prvních několika členů bychom mohli usoudit, že jde o AP, ale pro důkaz potřebujeme konstantní diferenci dokázat obecně pro $n \in \mathbb{N}$:

$$(d=)a_{n+1} - a_n = \left(2 - \frac{n+1}{3}\right) - \left(2 - \frac{n}{3}\right) = -\frac{1}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\{2 - \frac{n}{3}\}$ lze tedy zapsat ve tvaru

$$a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{5}{3} + (n-1)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3} - (n-1)\frac{1}{3}.$$

Pro $b_n = \frac{2n+1}{n+1}$ máme

$$\{b_n\} = \left\{ \frac{2n+1}{n+1} \right\} = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots \right\}.$$

Zde již můžeme vidět problém, neboť

$$b_2 - b_1 = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{10-9}{6} = \frac{1}{6}, \quad b_3 - b_2 = \frac{7}{4} - \frac{5}{3} = \frac{21-20}{12} = \frac{1}{12},$$

a tak difference není konstantní a nejde tedy o AP. □

Úloha 3.4. Dokažte z definice, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Řešení. Definice limity posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon).$$

Upravíme pro naši situaci ($a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c = c \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \Rightarrow c \in U(c, \varepsilon).$$

Vzhledem k tomu, že podmínka $c \in U(c, \varepsilon)$, neboli $c - \varepsilon < c < c + \varepsilon$, je splněna automaticky, n_0 existuje vždy a dokonce $n_0 = 1$. c je tedy limitou konstantní posloupnosti $\{c\}$. □

Úloha 3.5. Dokažte z definice, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Řešení. Definice limity posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon),$$

neboli

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Upravíme pro naši situaci ($a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

tedy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Řešíme tedy nerovnost

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Z podstaty nerovnosti $n > \frac{1}{\varepsilon}$ lze vyvodit, že pro dané $\varepsilon > 0$ je splněna od určitého n_0 , například:

$$\varepsilon = \frac{1}{10} \text{ dostaneme } n > \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10, \text{ a tedy } n_0 = 11,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1000} \text{ dostaneme } n > \frac{1}{\frac{1}{1000}} = 1000, \text{ a tedy } n_0 = 1001.$$

Tím je dáno, že 0 je skutečně limitou posloupnosti $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$. □