

Cvičení č. 4 z KMA-MMAN1

11. listopadu 2009

1 Limity posloupností

Úloha 1.1. Určete, jakým způsobem se chová pro libovolné $k, l \in \mathbb{N}$ následující limita:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0}.$$

Řešení. Nejprve provedeme výpočet pro tři typické příklady ($k < l$, $k = l$, $k > l$):

$k < l$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{5x^4 - 2x + 1} &= \left[\frac{+\infty - \infty + 5}{+\infty - \infty + 1} \right]_{\text{nedef.}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2})}{x^4(5 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}{x^2(5 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4})} = \left[\frac{2 - 0 + 0}{+\infty(5 - 0 + 0)} \right] = 0. \end{aligned}$$

$k = l$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 5}{5x^2 - 2x + 1} &= \left[\frac{+\infty - \infty + 5}{+\infty - \infty + 1} \right]_{\text{nedef.}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2})}{x^2(5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \left[\frac{2 - 0 + 0}{5 - 0 + 0} \right] = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$k > l$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - x + 5}{5x^2 - 2x + 1} &= \left[\frac{+\infty - \infty + 5}{+\infty - \infty + 1} \right]_{\text{nedef.}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^4(2 - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4})}{x^2(5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^2(2 - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4})}{5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \left[\frac{+\infty(2 - 0 + 0)}{5 - 0 + 0} \right] \\ &= \left[\frac{2}{5}(+\infty) \right] = \operatorname{sgn} \frac{2}{5}(+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Obecně tedy můžeme zapsat, že:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{pro } k < l, \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{pro } k = l, \\ \left(\operatorname{sgn} \frac{a_k}{b_l} \right) (+\infty), & \text{pro } k > l. \end{cases}$$

□

Úloha 1.2. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 9^{n+3} - 3 \cdot 3^{14} + 3^{n+5}}{3^{2n-5} + 6 \cdot 3^{n+1} + 3^n}.$

Řešení.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 9^{n+3} - 3 \cdot 3^{14} + 3^{n+5}}{3^{2n-5} + 6 \cdot 3^{n+1} + 3^n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2(n+3)} (2 - 3^{(1+14)-(2n+6)} + 3^{(n+5)-(2n+6)})}{3^{2n-5} (1 + 2 \cdot 3^{1+(n+1)-(2n-5)} + 3^{n-(2n-5)})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^8 (2 - 3^{-2n+9} + 3^{-n-1})}{1 \cdot (1 + 2 \cdot 3^{-n+7} + 3^{-n+5})} \\ &= \left[\frac{3^8 (2 - 0 + 0)}{1 + 0 + 0} \right] = 2 \cdot 3^8 = 13\,122. \end{aligned}$$

□

Úloha 1.3. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|n - (-1)^n 10| (n + 1)}{n^2 + 5}.$

Řešení. Pro dostatečně velká n je výraz v absolutní hodnotě kladný, a tak při výpočtu limity pro $n \rightarrow +\infty$ nebude mít aplikace absolutní hodnoty žádný vliv. Nemusíme s ní tedy počítat:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|n - (-1)^n 10| (n + 1)}{n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n - (-1)^n 10)(n + 1)}{n^2 + 5}.$$

Člen $(-1)^n$ způsobuje jistou oscilaci. My si s ní poradíme využitím věty o třech limitech následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} b_n &\leq a_n \leq c_n, \\ \frac{(n-10)(n+1)}{n^2+5} &\leq \frac{(n-(-1)^n 10)(n+1)}{n^2+5} \leq \frac{(n+10)(n+1)}{n^2+5}, \end{aligned}$$

kde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 9n - 10}{n^2 + 5} = 1,$$

a zároveň

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 11n + 10}{n^2 + 5} = 1,$$

a tak i

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n - (-1)^n 10)(n + 1)}{n^2 + 5} = \frac{|n - (-1)^n 10| (n + 1)}{n^2 + 5} = 1.$$

□

Úloha 1.4. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + \cdots (2n - 1)}{n^2 + 1}.$

Řešení. V čitateli máme součet prvních n lichých čísel. Lichá čísla tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 1 a prvním členem také 1. Jedná se tedy o součet prvních n členů aritmetické posloupnosti:

$$s_n = \frac{1}{2}n(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + (2n - 1)) = n^2.$$

Výraz v limitě tedy můžeme přepsat a dopočítat:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 3 + 5 + \cdots (2n - 1)}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1.$$

□

1.1 Limity s n -tými odmocninami

Používáme „tabulkové“ limity (pro $a > 0$) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Úloha 1.5. Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \sqrt[n]{\frac{1}{10}} - \sqrt[n]{2n}}{\sqrt[n/2]{n} + \sqrt[2n]{n}}$.

Řešení. Nejprve vypočteme dílčí limity:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{10}} = 1$,
neboť $(a) = \frac{1}{10} > 0$.
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} = [1 \cdot 1] = 1$.
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n/2]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n/2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{2}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n})^2 = [1^2] = 1$.
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[2n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = [\sqrt{1}] = 1$.

Dohromady tedy dostáváme:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \sqrt[n]{\frac{1}{10}} - \sqrt[n]{2n}}{\sqrt[n/2]{n} + \sqrt[2n]{n}} = \left[\frac{2 \cdot 1 - 1}{1 + 1} \right] = \frac{1}{2}.$$

□

1.2 Limity a číslo e

Zde vycházíme z definitorické limity: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Úloha 1.6. Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+25}$.

Řešení.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+25} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{25} = [e \cdot 1^{25}] = e.$$

□

Úloha 1.7. Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+5}{n}\right)^n$.

Řešení.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+5}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5} \cdot 5} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5} \cdot 5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}}\right)^5 = [e^5] = e^5. \end{aligned}$$

□

Obecně platí (pro $a \in \mathbb{R}$): $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$.

1.3 Limita „složené“ posloupnosti

Úloha 1.8. Vyšetřete limitu posloupnosti $\left\{ \frac{2a^n + 1}{a^n - 1} \right\}$; diskutujte různé případy pro číslo $a \in \mathbb{R}$.

Řešení. Nejprve předvedeme dílčí limitu:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty, & \text{pro } a > 1, \\ 1, & \text{pro } a = 1, \\ 0, & \text{pro } |a| < 1, \\ \text{neexistuje pro } a = -1, & (\text{osciluje mezi } -1 \text{ a } 1) \\ \text{neexistuje pro } a < -1, & (\text{osciluje a } |a^n| \rightarrow +\infty). \end{cases}$$

S využitím těchto skutečností můžeme přejít k původní limitě:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2a^n + 1}{a^n - 1} = \begin{cases} 2, & \text{pro } a > 1, \\ \text{nedefinováno pro } a = 1, \\ -1, & \text{pro } |a| < 1, \\ \text{nedefinováno pro } a = -1, \\ 2, & \text{pro } a < -1. \end{cases} = \begin{cases} 2, & \text{pro } |a| > 1, \\ \text{nedefinováno pro } a = 1, \\ -1, & \text{pro } |a| < 1, \\ \text{nedefinováno pro } a = -1, \end{cases}$$

neboť například pro $|a| > 1$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2a^n + 1}{a^n - 1} &= \lim_{|a|^n \rightarrow +\infty} \frac{2a^n + 1}{a^n - 1} = \lim_{|a|^n \rightarrow +\infty} \frac{a^n \left(2 + \frac{1}{a^n}\right)}{a^n \left(1 - \frac{1}{a^n}\right)} \\ &= \lim_{|a|^n \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{a^n}\right)}{\left(1 - \frac{1}{a^n}\right)} = \left[\frac{2 + 0}{1 - 0} \right] = 2. \end{aligned}$$

□