

Cvičení č. 5 z KMA-MMAN1

23. října 2009

1 Vlastnosti funkcí

1.1 Definiční obor funkce

Úloha 1.1. Určete definiční obor funkce $f : y = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x - 4}}{\sqrt{-3x^2 + 12}}$.

Řešení. Definiční obor této složené funkce je dán „průnikem“ podmínek pro definiční oborů jednotlivých skládaných funkcí (podíl a dvě druhé odmocniny):

1. Podíl (nenulový jmenovatel): $\sqrt{-3x^2 + 12x} \neq 0$, což vzhledem k vlastnostem druhé odmocniny znamená, že $-3x^2 + 12x \neq 0$.
2. Druhá odmocnina ve jmenovateli: $-3x^2 + 12x \geq 0$.
3. Druhá odmocnina v čitateli: $2x^2 - 2x - 4 \geq 0$.

Dohromady je tedy definiční obor dán:

$$\begin{aligned} D(f) &= \{x \in \mathbb{R} : -3x^2 + 12x \neq 0 \wedge -3x^2 + 12x \geq 0 \wedge 2x^2 - 2x - 4 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -3x^2 + 12x > 0 \wedge 2x^2 - 2x - 4 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Vyřešíme dvě výsledné nerovnosti:

1. $-3x^2 + 12x > 0$:

Jde o kvadratickou nerovnici, lze ji zapsat ve tvaru $-3x(x - 4)$, nulové body tedy jsou 0 a 4. Vzhledem k tomu, že koeficient u x^2 je záporný (-3), je grafem parabola „otevřená dolů“, a tak řešením bude interval

$$X_1 = (0; 4).$$

2. $2x^2 - 2x - 4 \geq 0$:

Jde opět o kvadratickou nerovnici, lze ji zapsat ve tvaru $2(x+1)(x-2)$, nulové body tedy jsou -1 a 2 . Vzhledem k tomu, že koeficient u x^2 je kladný ($+2$), je grafem parabola „otevřená nahoru“, a tak řešením bude interval

$$X_2 = (-\infty; -1) \cup \langle 2; +\infty).$$

Celkově tedy

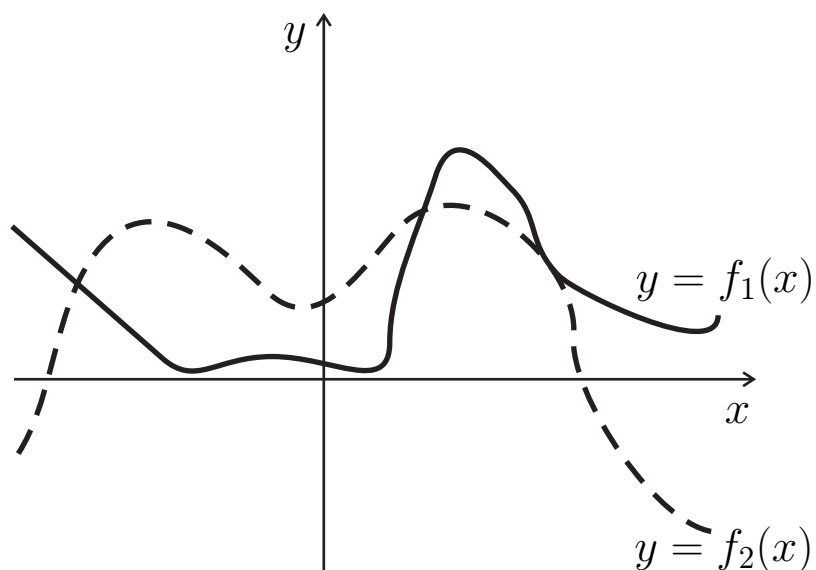
$$\underline{\underline{D(f)}} = X_1 \cap X_2 = (0; 4) \cap \left[(-\infty; -1) \cup \langle 2; +\infty \rangle \right] = \underline{\underline{\langle 2; 4 \rangle}}.$$

Definičním oborem funkce f je interval $\langle 2; 4 \rangle$.

□

1.2 Grafické řešení nerovností

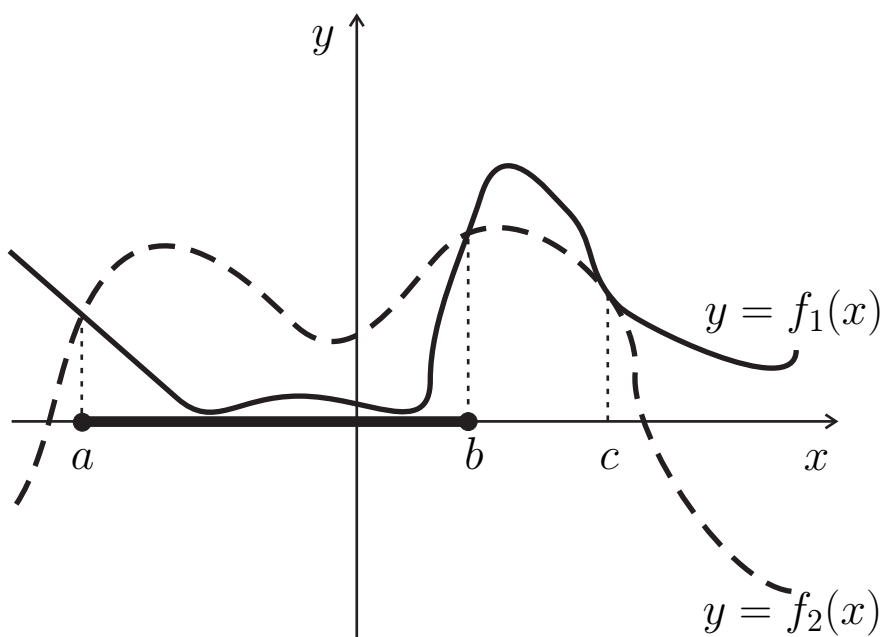
Úloha 1.2. Řešte graficky nerovnici $f_1(x) \leq f_2(x)$, kde funkce f_1 a f_2 jsou dány obrázkem:



Řešení. Na obrázku nejprve nalezneme průsečíky grafů funkcí f_1 a f_2 a promítneme je na osu x . Tím získáme body, pro které platí $f_1(x) = f_2(x)$. Označíme si je a , b , c . Tyto body nám vytvoří intervaly, ze kterých poskládáme řešení. Z obrázku je zřejmé, že řešením je

$$X = \langle a; b \rangle.$$

□



1.3 Monotónnost

Úloha 1.3. Využitím grafu funkce rozhodněte o monotonnosti funkce a o existenci, resp. velikosti globálních extrémů funkce $y = x^2 + 1$ na intervalu

a) $\langle -3, 2 \rangle$, **b)** $(-3; 2)$, **c)** $\langle 1, +\infty \rangle$.

Řešení. Z obrázku jednoduše určíme, zda daná funkce na příslušném intervalu výhradně klesá, roste, neklesá nebo neroste.

Globální extrémy funkce f na intervalu J jsou (pokud existují) nejmenší a největší prvek množiny $f(J)$.

a) $x \in \langle -3, 2 \rangle$, není monot. (nejprve klesá, potom roste),

$$f(\langle -3, 2 \rangle) = \langle 1; 10 \rangle \implies Gmin = 1, Gmax = 10.$$

b) $x \in (-3; 2)$, není monot. (nejprve klesá, potom roste),

$$f((-3, 2)) = \langle 1; 10 \rangle \implies Gmin = 1, Gmax = \text{neex.}$$

c) $x \in \langle 1, +\infty \rangle$, je monot. (roste),

$$f(\langle 1, +\infty \rangle) = \langle 2; +\infty \rangle \implies Gmin = 2, Gmax = \text{neex.}$$

□

Úloha 1.4. Užitím definice monotonnosti na množině dokažte, že funkce $y = kx^2$ je

a) na intervalu $(-\infty; 0)$ klesající pro $k > 0$ a rostoucí pro $k < 0$ a

b) na intervalu $(0; +\infty)$ rostoucí pro $k > 0$ a klesající pro $k < 0$.

Řešení. ad a) $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$:

$$\begin{array}{ll} x_1 < x_2, & x_1 < x_2, \\ x_1^2 > x_2^2 \mid \cdot k > 0, & x_1^2 > x_2^2 \mid \cdot k < 0, \\ kx_1^2 > kx_2^2, & kx_1^2 < kx_2^2, \\ f(x_1) > f(x_2), & f(x_1) < f(x_2), \\ \implies \text{klesající.} & \implies \text{klesající.} \end{array}$$

ad b) $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$:

$$\begin{array}{ll} x_1 < x_2, & x_1 < x_2, \\ x_1^2 < x_2^2 \mid \cdot k > 0, & x_1^2 < x_2^2 \mid \cdot k < 0, \\ kx_1^2 < kx_2^2, & kx_1^2 > kx_2^2, \\ f(x_1) < f(x_2), & f(x_1) > f(x_2), \\ \implies \text{rostoucí.} & \implies \text{rostoucí.} \end{array}$$

□

1.4 Omezenost

Úloha 1.5. Dokažte, že funkce $f : y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ je omezená.

Řešení. Omezená funkce $f \iff$ omezený obor hodnot $H(f)$, a tedy musí platit:

$$\exists L, K \in \mathbb{R}, \forall x \in D(f) : \quad L \leq f(x) \leq K.$$

Konkrétně pro naši funkci:

$$\exists L, K \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \quad L \leq \frac{x^2-1}{x^2+1} \leq K,$$

neboť $D(f) = \mathbb{R}$.

Nejprve přepíšeme zlomek do vhodnějšího tvaru: $\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$.

Dále provedeme dolní a horní odhad zlomku $\frac{2}{x^2+1}$:

$$0 < \frac{2}{x^2+1} \leq \frac{2}{1} = 2 \quad | \cdot (-1),$$

$$0 > -\frac{2}{x^2+1} \geq -2 \quad | +1,$$

$$1 > 1 - \frac{2}{x^2+1} \geq -1.$$

Je tedy $L = -1$ a $K = 1$. V původním tvaru dostáváme

$$-1 \leq 1 - \frac{2}{x^2+1} < 1.$$

Funkce f je omezená. □

1.5 Parita

Úloha 1.6. Rozhodněte o paritě funkce

$$\textbf{a)} \quad y = \frac{x}{1+x^2}, \quad \textbf{b)} \quad y = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \textbf{c)} \quad y = \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Řešení. ad a) $f(-x) = \frac{(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x) \implies$ lichá.

ad b) $f(-x) = \frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} = f(x) \implies$ sudá.

ad c) $f(-x) = \frac{1+(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{1-x}{1+x^2} \neq \pm f(x) \implies$ ani sudá, ani lichá. □

1.6 Periodicita

Úloha 1.7. Určete, zda daná funkce je periodická; v kladném případě zjistěte její základní periodu (pokud existuje): $f : y = \sin\left(\frac{3x+1}{2}\right)$.

Řešení. 1) $D(f) = \mathbb{R}$, a tak je pro každé $p > 0$ a každé $x \in D(f)$ automaticky splněna podmínka $x \pm p \in D(f)$.

2) Nyní můžeme prověřit periodické opakování funkčních hodnot, což se dá vyjádřit dvěma způsoby:

a)

$$\begin{aligned}f(x+p) &= f(x), \\ \sin\left(\frac{3(x+p)+1}{2}\right) &= \sin\left(\frac{3x+1}{2}\right), \\ \sin\left(\frac{3x+1+3p}{2}\right) &= \sin\left(\frac{3x+1}{2}\right), \\ \sin\left(\frac{3x+1}{2} + \frac{3p}{2}\right) &= \sin\left(\frac{3x+1}{2}\right).\end{aligned}$$

Můžeme vyjít z 2π -periodičnosti funkce sinus, takže při p -periodičnosti naší funkce musí platit, že

$$\begin{aligned}\sin(z+2k\pi) &= \sin(z), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{3x+1}{2} + \frac{3p}{2} &= \frac{3x+1}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{3p}{2} &= 2k\pi, \\ p &= \frac{4}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Základní perioda p_0 (nejmenší kladné p):

$$\underline{\underline{p_0}} = \frac{4}{3} \cdot 1 \cdot \pi = \underline{\underline{\frac{4}{3}\pi}}.$$

b)

$$\begin{aligned}f(x+p) &= f(x), \\ f(x+p) - f(x) &= 0, \\ \sin\left(\frac{3(x+p)+1}{2}\right) - \sin\left(\frac{3x+1}{2}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Použijeme součtový vzorec: $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$:

$$2 \cos \left(\frac{\left(\frac{3(x+p)+1}{2} \right) + \left(\frac{3x+1}{2} \right)}{2} \right) \sin \left(\frac{\left(\frac{3(x+p)+1}{2} \right) - \left(\frac{3x+1}{2} \right)}{2} \right) = 0,$$

$$2 \cos \left(\frac{6x + 2 + p}{4} \right) \sin \left(\frac{3p}{4} \right) = 0.$$

Pro splnění poslední rovnosti pro každé $x \in D(f) = \mathbb{R}$, musí nutně platit:

$$\sin \left(\frac{3p}{4} \right) = 0,$$

a tedy opět

$$\frac{3p}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad p = \frac{4}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \underline{\underline{p_0 = \frac{4}{3}\pi.}}$$

□