Cvičení č. 6 a 7 z KMA-MMAN1

19. listopadu 2009

1 Funkce

1.1 Skládání funkcí

Úloha 1.1. *Pro funkce $f : y = 3 - 2x$ a $g : z = \ln y$ určete složenou funkci $g \circ f$ a vypočtěte $(g \circ f)(1)$.*

Řešení. Nejprve určíme obory funkcí f a g:

$$D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = \mathbb{R}, \quad D(g) = (0; +\infty), \quad H(g) = \mathbb{R}.$$

Definiční obor složené funkce je dán

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f); f(x) \in D(g)\} = \{x \in \mathbb{R}; 3 - 2x \in (0, +\infty)\},$$

a tedy

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R}; 3 - 2x > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R}; x < \frac{3}{2}\right\} = (-\infty; \frac{3}{2}).$$

Složená funkce:

$$g \circ f : z = \ln(3 - 2x), \quad x \in (-\infty; \frac{3}{2}).$$

Výpočet hodnoty:

$$(g \circ f)(1) = \ln(3 - 2 \cdot 1) = \ln 1 = 0.$$

□

1.2 Inverzní funkce

Úloha 1.2. *Ověřte, že k funkci $f : y = \dfrac{x+2}{x-3}$ existuje inverzní funkce. Pokud ano, najděte ji.*

Řešení. `Definiční obor` funkce f: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

`Je funkce` f `prostá?` Máme ukázat, že pro $x_1, x_2 \in D(f)$ platí:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Tedy

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2), \\ \frac{x_1+2}{x_1-3} &= \frac{x_2+2}{x_2-3}, \\ x_1x_2+2x_2-3x_1-6 &= x_1x_2+2x_1-3x_2-6, \\ 5x_1 &= 5x_2, \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Funkce f je tedy prostá, a tak k ní existuje inverzní funkce f^{-1}

`Nalezení inverzní funkce.`

Z vlastností inverzních funkcí víme, že:

$$H(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad D(f^{-1}) = H(f) = ?.$$

tedy pro $y \in H(f)$ platí:

$$f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y.$$

Z poslední rovnosti vyjádříme x, čímž získáme předpis pro f^{-1}.

$$\frac{x+2}{x-3} = y, \quad x+2 = y(x-3), \quad x - yx = -3y - 2, \quad x = \frac{3y+2}{y-1}.$$

Po přeznačení proměnných dostáváme:

$$f^{-1} : y = \frac{3x+2}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

Je tedy $H(f) = D(f^{-1} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. □

2 „Opakování“ ze střední školy

2.1 Práce s exponenty při úpravách výrazů

Úloha 2.1. *Zjednodušte výraz* $D = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{24 \cdot a} \cdot \sqrt[4]{5 \cdot b^3}}{\sqrt{a}}} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{80 \cdot b^3}}{5 \cdot \sqrt{5 \cdot a^7}}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} D &= \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{24 \cdot a} \cdot \sqrt[4]{5 \cdot b^3}}{\sqrt{a}}} \cdot \left(\frac{\sqrt[4]{80 \cdot b^3}}{5 \cdot \sqrt{5 \cdot a^7}}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{\sqrt[3]{24 \cdot a} \cdot \sqrt[4]{5 \cdot b^3}}{\sqrt{a}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{5 \cdot \sqrt{5 \cdot a^7}}{\sqrt[4]{80 \cdot b^3}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{\sqrt[3]{24 \cdot a} \cdot \sqrt[4]{5 \cdot b^3}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{5 \cdot a^7}}{\sqrt[4]{80 \cdot b^3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{(3 \cdot 2^3 \cdot a)^{\frac{1}{3}} \cdot (5 \cdot b^3)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{5^1 \cdot (5 \cdot a^7)^{\frac{1}{2}}}{(5 \cdot 2^4 \cdot b^3)^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot (2^3)^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{5^1 \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{7}{2}}}{5^{\frac{1}{4}} \cdot (2^4)^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(2^{\left(\frac{3}{3}-\frac{4}{4}\right)} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\left(\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)} \cdot a^{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)} \cdot b^{\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^0 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{2-3+21}{6}} \cdot b^0\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{10}{3} \cdot \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{9}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{10}{9}} = \underline{\underline{\sqrt{5}\sqrt[9]{3 \cdot a^{10}}}}. \end{aligned}$$

□

2.2 Rozklad na kořenové činitele, ...

Úloha 2.2. *Zjednodušte zápis funkce*

$$f : y = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2},$$

pro $x \in \langle -4; 0 \rangle$.

Řešení. Pokusíme se zjednodušit zápis funkce, ale tak, abychom ji na intervalu $\langle -4; 0 \rangle$ nezměnili.

`Rozklad na součin:`

$$\frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x-1)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)(x+1)},$$

neboť zkusmým dosazením jsme zjistili, že v čitateli i jmenovateli je kořen $x = 1$, čímž jsme obdrželi kořenový činitel $(x - 1)$. Další kořenové činitele jsme získali dělením:

$$(x^3-3x+1) : (x-1) = x^2-1 = (x-1)(x+1), \quad (x^3+2x^2-x-2) : (x-1) = x^2+3x+2 = (x+2)(x+1).$$

Vzhledem k tomu, že kořen $x = 1$ nepatří do intervalu $\langle -4; 0 \rangle$, příslušný kořenový činitel $(x - 1)$ je na tomto intervalu nenulový, a tak jím můžeme krátit beze změny funkce f:

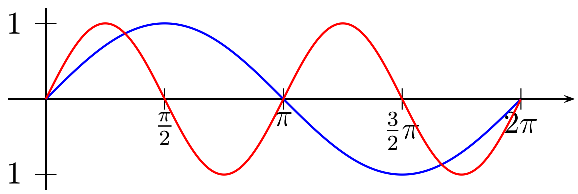
$$f : y = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \frac{(x-1)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)(x+1)} = \underline{\underline{\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)}}}.$$

□

2.3 Rovnice s goniometrickými funkcemi

Úloha 2.3. *Řešte rovnici* $\sin 2x = \sin x$ *pro* $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Řešení. Nejprve graficky.



Obrázek 1: Grafy funkcí $y = \sin x$ a $y = \sin 2x$ na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Z obrázku 1 je zřejmé, že budeme hledat pět řešení (neboť grafy se protínají pětkrát).

Tři řešení

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \pi, \quad x_3 = 2\pi$$

dokážeme odhadnout již z obrázku.

Výpočet:

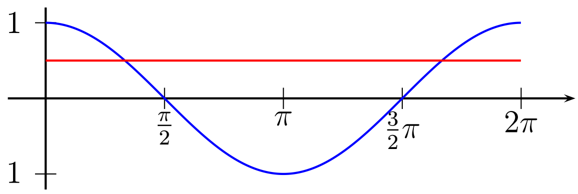
$$\begin{aligned} \sin 2x &= \sin x, \\ 2\sin x \cos x &= \sin x, \\ 2\sin x \cos x - \sin x &= 0, \\ \sin x(2\cos x - 1) &= 0, \end{aligned}$$

Z rovnice $\sin x = 0$ dostáváme tři již známá řešení x_1, x_2, x_3.

Druhou rovnici $2\cos x - 1 = 0$ prostudujeme:

$$2\cos x - 1 = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Graficky: Na obrázku 2 vidíme, že půjde o dvě řešení (jak se dalo předpokládat).



Obrázek 2: Grafy funkcí $y = \cos x$ a $y = \frac{1}{2}$ na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

První řešení rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$ je známé: $x_4 = \frac{\pi}{3}$. Druhé dopočítáme ze symetrie grafu: $x_5 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$.

`Závěr:` $\underline{\underline{X = \left\{0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5}{3}\pi; 2\pi\right\}}}.$ $\square$

Úloha 2.4 (Kvadratický typ). *Řešte rovnici* $17\sin^2 x - 3\cos^2 x = 2$ *pro* $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Řešení. Nejprve upravíme s využitím vztahu

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

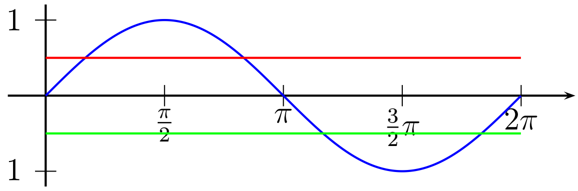
$$\begin{aligned} 17\sin^2 x - 3\cos^2 x &= 2, \\ 17\sin^2 x - 3(1 - \sin^2 x) &= 2, \\ 17\sin^2 x - 3 + 3\sin^2 x &= 2, \\ 20\sin^2 x &= 5, \\ \sin^2 x &= \frac{1}{4}, \\ \sin x &= \pm\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Graficky, z obrázku 3, zjistíme, že budeme hledat čtyři řešení.

První získáme ze známé hodnoty, ostatní ze symetrie grafu:

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}, \quad x_3 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}, \quad x_4 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

`Závěr:` $\underline{\underline{X = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}}}.$ $\square$

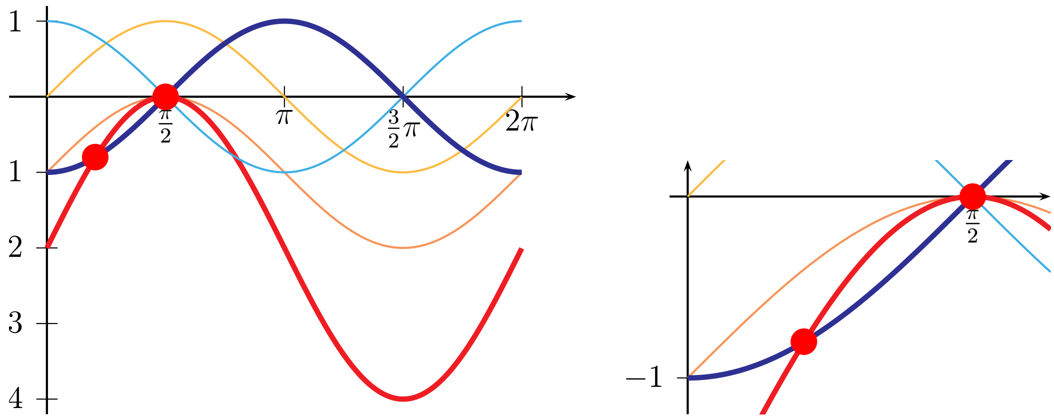


Obrázek 3: Grafy funkcí $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$ a $y = -\frac{1}{2}$ na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Úloha 2.5 (Přibližné vyčíslení)**.** *Řešte rovnici* $2 \sin x + \cos x = 2$ *pro* $x \in \langle 0; 2\pi \rangle$.

Řešení. Před grafickým vyšetřením drobně upravíme:

$$2 \sin x + \cos x = 2, \quad 2 \sin x - 2 = -\cos x, \quad 2(\sin x - 1) = -\cos x\,.$$



Obrázek 4: Grafy funkcí $y = \sin x$, $y = \sin x - 1$, $y = 2(\sin x - 1)$, $y = \cos x$ a $y = -\cos x$ na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Na obrázku 4 (i v detailu) vidíme dvě řešení (jedno z nich je $\frac{\pi}{2}$). Pokusíme se je vypočítat.

Rovnici umocníme na druhou (Pozor, tím nám mohou přibýt „falešná“ řešení.):

$$\begin{aligned}
2(\sin x - 1) &= -\cos x, \ |^2 \\
4\sin^2 x - 8 \sin x + 4 &= \cos^2 x, \\
4\sin^2 x - 8 \sin x + 4 &= 1 - \sin^2 x, \\
5\sin^2 x - 8 \sin x + 3 &= 0,
\end{aligned}$$

což je kvadratická rovnice v proměnné $z = \sin x$.

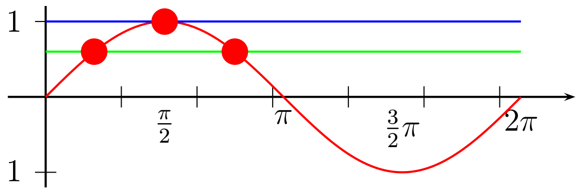
$$5z^2 - 8z + 3 = 0, \quad D = 64 - 60 = 4 = 2^2, \quad z_{1,2} = \frac{8 \pm 2}{10}, \quad z_1 = 1, \ z_2 = \frac{3}{5}.$$

Po dosazení zpět dostaneme dvě rovnice,

$$\sin x = 1 \quad \text{a} \quad \sin x = \frac{3}{5},$$

které opět znázorníme graficky.

Na obrázku 5 vidíme jedno řešení $x_1 = \frac{\pi}{2}$ první rovnice a dvě řešení druhé rovnice.



Obrázek 5: Grafy funkcí $y = \sin x$, $y \equiv= 1$, a $y \equiv \frac{3}{5}$ na intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$.

Konkrétní hodnoty získáme použitím inverzní funkce $\arcsin : \langle -1; 1 \rangle \to \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, tedy $x_2 = \arcsin \frac{3}{5} \doteq 0{,}64$. Poslední řešení získáme ze symetrie: $x_3 = \pi - \arcsin \frac{3}{5} \doteq 2{,}5$.

Provedením zkoušky zjistíme, že x_3 není řešením původní rovnice.

Závěr: $\underline{\underline{X = \left\{ \arcsin \frac{3}{5}; \frac{\pi}{2} \right\}}} \approx \{0{,}64; 1{,}57\}$. □

2.4 Grafy goniometrických funkcí

Úloha 2.6. *Načrtněte grafy následujících funkcí:* $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ *a* $2\cos x$.

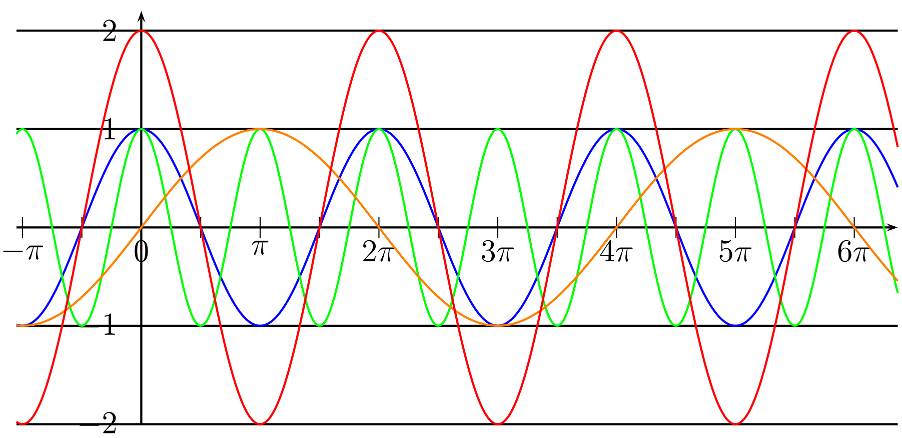
Řešení. 1. Graf funkce $y = \cos x$ vezmeme jako základ.

2. Graf funkce $y = \cos 2x$ je smrštěný na polovinu směrem k počátku (nulový bod argumentu $2x$ je opět v nule.

3. Je zřejmé, že graf funkce $y = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ bude mít dvojnásobnou periodu, jen je třeba zjistit, kam se posune nulový bod:

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi.$$

4. Graf funkce $y = 2\cos x$ má dvojnásobné funkční hodnoty oproti $y = \cos x$.



Obrázek 6: Grafy funkcí $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ a $y = 2\cos x$.

□

2.5 Rovnice s exponenciálními a logaritmickými funkcemi

Úloha 2.7. *Řešte rovnici:* $\dfrac{2^{x-2}}{2^{x+3}} = \dfrac{2^x}{8}$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\frac{2^{x-2}}{2^{x+3}} &= \frac{2^x}{8}, \\
\frac{2^{x-2}}{2^{x+3}} &= \frac{2^x}{2^3}, \\
2^{(x-2)-(x+3)} &= 2^{x-3}, \\
2^{-5} &= 2^{x-3}, \\
-5 &= x-3, \\
x &= -2.
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$L = \frac{2^{-2-2}}{2^{-2+3}} = \frac{2^{-4}}{2^1} = 2^{-5}, \qquad P = \frac{2^{-2}}{8} = 2^{-5}, \qquad L = P.$$

Závěr:

$$\underline{\underline{X = \{-2\}}}.$$

□

Úloha 2.8. *Řešte rovnici:* $\log(4x+6) - \log(2x-1) = 1$.

Řešení.

$$\begin{aligned}
\log(4x+6) - \log(2x-1) &= 1, \\
\log\frac{4x+6}{2x-1} &= \log 10, \\
\frac{4x+6}{2x-1} &= 10, \\
4x+6 &= 20x-10, \\
16x &= 16, \\
x &= 1.
\end{aligned}$$

Zkouška:

$$L = \log(4\cdot 1+6) - \log(2\cdot 1-1) = \log 10 - \log 1 = 1 - 0 = 1 = P.$$

Závěr:

$$\underline{\underline{X = \{1\}}}.$$

□

Úloha 2.9. *Řešte rovnici:* $3^{2x+1} - 9\cdot 3^{x-2} = 2$.

Řešení.

$$\begin{aligned} 3^{2x+1} - 9 \cdot 3^{x-2} &= 2, \\ 3 \cdot 3^{2x} - 3^2 \cdot 3^{x-2} &= 2, \\ 3 \cdot 3^{2x} - 3^x &= 2, \end{aligned}$$

což je vlastně kvadratickou rovnicí pro $z = 3^x$:

$$3z^2 - z - 2 = 0, \qquad D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 = 5^2, \qquad z_1 = \frac{1+5}{6} = 1, \quad z_2 = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Zpětně dosadíme:

$$1 = 3^x \quad \Longrightarrow \quad x = 0, \qquad -\frac{2}{3} = 3^x \quad \text{nemá řešení.}$$

Zkouška:

$$L = 3^{2 \cdot 0+1} - 9 \cdot 3^{0-2} = 3^1 - 9 \cdot 3^{-2} = 3 - 1 = 2 = P.$$

Závěr:

$$\underline{\underline{\underline{X = \{0\}}}}.$$

□