

Cvičení č. 11 z KMA-MMAN1

1 Derivace funkce

1.1 Derivování podle definice

Definice 1.1. Říkáme, že **funkce** f **má v bodě** x_0 **derivaci**, právě když je f definována na nějakém okolí bodu x_0 a existuje (vlastní) limita

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tuto limitu nazýváme **derivace funkce** f **v bodě** x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Máme tedy

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

podobně jednostranné derivace (zleva a zprava):

$$f'(x_0-) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$f'(x_0+) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Úloha 1.2. Vypočtěte (pokud existuje) derivaci funkce v bodě 0:

$$f : y = \begin{cases} x|x|, & \text{pro } x \in Q \\ 0, & \text{pro } x \in Q' \end{cases}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{\Delta x|\Delta x|}{\Delta x}, & \text{pro } \Delta x \in Q \\ \frac{0}{\Delta x}, & \text{pro } \Delta x \in Q' \end{cases} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \begin{cases} |\Delta x|, & \text{pro } \Delta x \in Q \\ 0, & \text{pro } \Delta x \in Q' \end{cases} = 0. \end{aligned}$$

□

Úloha 1.3. Vypočtěte (pokud existuje) derivaci funkce v bodě 0:

$$f : y = \begin{cases} x, & \text{pro } x \in Q \\ x^2, & \text{pro } x \in Q' \end{cases}.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{\Delta x}{\Delta x}, & \text{pro } \Delta x \in Q \\ \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}, & \text{pro } \Delta x \in Q' \end{cases} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \begin{cases} 1, & \text{pro } \Delta x \in Q \rightarrow 1 \\ \Delta x, & \text{pro } \Delta x \in Q' \rightarrow 0 \end{cases} \neq \implies \text{Limita neexistuje!} \end{aligned}$$

□

Úloha 1.4. Vypočtěte (stále podle definice) derivaci funkce $f : y = 3x^2 - 2x + 5$ v bodě 1.

Řešení.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(3(1 + \Delta x)^2 - 2(1 + \Delta x) + 5) - (3(1)^2 - 2(1) + 5)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(3 + 6\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 2 - 2\Delta x + 5) - (6)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + 3\Delta x) = 4. \end{aligned}$$

□

Úloha 1.5 (Návod k řešení domácí úlohy 3a). Vypočtěte (stále podle definice) derivaci funkce $f : y = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2$ v bodě 1.

Řešení.

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{2 - x^2}{2}\right)^2 = \frac{4 - 4x^2 + x^4}{4}.$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{4 - 4(1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x)^4}{4} - \frac{4 - 4 \cdot 1^2 + 1^4}{4}}{\Delta x} = \dots = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 4(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4}{4\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4 + 2(\Delta x) + 4(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{4\Delta x} = -1. \end{aligned}$$

□

1.2 Derivace součinu a podílu funkcí

Úloha 1.6. Vypočtete derivaci funkce $f : y = x \operatorname{tg} x$.

Řešení.

$$(x \operatorname{tg} x)' = 1 \cdot \operatorname{tg} x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \cos x + x}{\cos^2 x}.$$

□

Úloha 1.7. Vypočtete derivaci funkce $f : y = \operatorname{cotg} x$.

Řešení.

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

□

1.3 Derivace složené funkce

Úloha 1.8. Vypočtete derivaci funkce $f : y = \log_6 \frac{a+x}{a-x}$.

Řešení.

$$\left(\log_6 \frac{a+x}{a-x} \right)' = \frac{1}{\frac{a+x}{a-x} \cdot \ln 6} \cdot \frac{1 \cdot (a-x) - (a+x) \cdot (-1)}{(a-x)^2} = \frac{2a}{\ln 6 \cdot (a^2 - x^2)}.$$

□

Úloha 1.9. Vypočtete derivaci funkce $f : y = \sin[\cos(\ln x^2)]$.

Řešení.

$$\{\sin[\cos(\ln x^2)]\}' = \cos[\cos(\ln x^2)] \cdot [-\sin(\ln x^2)] \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x.$$

□

Úloha 1.10. Vypočtete derivaci funkce $f : y = \ln \frac{2^x}{x^2}$.

Řešení.

$$\left(\ln \frac{2^x}{x^2} \right)' = \frac{1}{\frac{2^x}{x^2}} \cdot \frac{2^x \ln 2 \cdot x^2 - 2^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2}{2^x} \cdot \frac{x 2^x (x \ln 2 - 2)}{x^4} = \frac{x \ln 2 - 2}{x}.$$

□

1.4 Derivace funkcí tvaru $(f(x))^{g(x)}$

$$\left[(f(x))^{g(x)} \right]' = \left[e^{\ln(f(x))^{g(x)}} \right]' = [e^{g(x) \ln f(x)}]' = [e^{g(x) \ln f(x)}] \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \right].$$

Úloha 1.11. Vypočtete derivaci funkce $f : y = x^x$.

Řešení.

$$(x^x)' = [e^{x \ln x}] \cdot \left[1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \cdot 1 \right] = x^x (\ln x + 1).$$

□

Úloha 1.12. Vypočtete derivaci funkce $f : y = (\sin x^2)^{\cos x}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} [(\sin x^2)^{\cos x}]' &= \left[e^{\cos x \ln \sin x^2} \right] \cdot \left[(-\sin x) \cdot \ln \sin x^2 + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x^2} \cdot (\cos x^2) \cdot 2x \right] \\ &= (\sin x^2)^{\cos x} \left[\frac{2x \cos x \cos x^2}{\sin x^2} - \sin x \cdot \ln \sin x^2 \right]. \end{aligned}$$

□

1.5 Přibližný výpočet funkčních hodnot pomocí diferenciálu

$$f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h.$$

Úloha 1.13. Vypočtete pomocí diferenciálu přibližnou hodnotu výrazu $\sqrt{a^2 + x}$, kde $a > 0$, pro $x = 0,01$.

Řešení.

$$x_0 = 0, \quad h = 0,01, \quad df(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + 0}} \cdot h = \frac{h}{2a}.$$

$$f(0,01) = f(0 + 0,01) \doteq f(0) + df(0) = a + \frac{0,01}{2a} = a + \frac{1}{200a}.$$

Například pro $a = 2$ dostáváme

$$\sqrt{2^2 + 0,01} = \sqrt{4,01} \doteq 2 + \frac{1}{400} = \frac{801}{400} = 2,0025,$$

přičemž $\sqrt{4,01} = 2,002498439 \dots$

□

1.6 Derivace vyšších řádů

$$f'' = (f')', \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Úloha 1.14. Vypočtete druhou derivaci funkce $f : y = x \ln x$.

Řešení.

$$(x \ln x)'' = \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

□

1.6.1 Použití Leibnizova vzorce pro n -tou derivaci součinu funkcí

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} \cdot v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} \cdot v'' + \dots + \binom{n}{n-1} u' \cdot v^{(n-1)} + u \cdot v^{(n)}.$$

Úloha 1.15. Vypočtete desátou derivaci funkce $f : y = x^2 \sin x$.

Řešení.

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & v = \sin x \\ u' = 2x & v' = \cos x \\ u'' = 2 & v'' = -\sin x \\ u''' = 0 & v''' = -\cos x \\ u^4 = 0 & v^4 = \sin x \\ u^5 = 0 & v^5 = \cos x \\ u^6 = 0 & v^6 = -\sin x \\ u^7 = 0 & v^7 = -\cos x \\ u^8 = 0 & v^8 = \sin x \\ u^9 = 0 & v^9 = \cos x \\ u^{10} = 0 & v^{10} = -\sin x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{(x \ln x)^{(10)}}} &= (x^2)^{(10)} \cdot \sin x + \binom{10}{1} (x^2)^{(9)} \cdot (\sin x)' + \binom{10}{2} (x^2)^{(8)} \cdot (\sin x)'' + \dots \\ &\quad + \binom{10}{7} (x^2)^{(7)} \cdot (\sin x)^{(7)} + \binom{10}{8} (x^2)^{(8)} \cdot (\sin x)^{(8)} \\ &\quad + \binom{10}{9} (x^2)^{(9)} \cdot (\sin x)^{(9)} + x^2 \cdot (\sin x)^{(10)} \\ &= 0 \cdot \sin x + \binom{10}{1} 0 \cdot \cos x + \binom{10}{2} 0 \cdot (-\sin x) + \dots \\ &\quad + \binom{10}{7} 0 \cdot (-\cos x) + \binom{10}{8} 2 \cdot \sin x \\ &\quad + \binom{10}{9} 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot (-\sin x) \\ &= \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot 2 \cdot \sin x + 10 \cdot 2x \cdot \cos x - x^2 \sin x \\ &= \underline{\underline{90 \sin x + 20x \cos x - x^2 \sin x}}. \end{aligned}$$

□