

# Cvičení č. 11 z KMA-MMAN1

17. prosince 2009

## 1 Derivace — dohra

### 1.1 Derivace funkcí zadaných parametricky

**Úloha 1.1.** Vypočtete parciální derivace  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , funkce  $z = x + y^2$ .

*Řešení.*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (1) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2y) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y) = 2.$$

□

**Úloha 1.2.** Vypočtete parciální derivace  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ , funkce  $z = \sin(x^2 + xy)$ .

*Řešení.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\cos(x^2 + xy) \cdot [2x + y]) \\ &= -\sin(x^2 + xy) \cdot (2x + y)^2 + 2 \cos(x^2 + xy), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\cos(x^2 + xy) \cdot x) \\ &= -\sin(x^2 + xy) \cdot x(2x + y) + \cos(x^2 + xy), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\cos(x^2 + xy) \cdot x) \\ &= -\sin(x^2 + xy) \cdot x^2. \end{aligned}$$

□

**Úloha 1.3.** Určete  $\frac{d^2y}{dx^2}$  pro funkci zadanou parametricky:

$$\begin{aligned}x &= t e^t (= \varphi(t)) \\ y &= t e^{-t} (= \psi(t))\end{aligned} \quad t \in (-1; +\infty).$$

*Řešení.*

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{e^{-t} - t e^{-t}}{e^t + t e^t} = \frac{e^{-t}(1-t)}{e^t(1+t)}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}\right)}{\dot{\varphi}(t) dt} = \frac{d\left(\frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}\right)}{dt} \frac{1}{\dot{\varphi}(t)} = \frac{d\left(\frac{e^{-t}(1-t)}{e^t(1+t)}\right)}{dt} \frac{1}{e^t(1+t)} \\ &= \frac{\left(-e^{-t}(1-t) - e^{-t}\right)\left(e^t(1+t)\right) - \left(e^{-t}(1-t)\right)\left(e^t(1+t) + e^t\right)}{\left(e^t(1+t)\right)^2 \cdot e^t(1+t)} \\ &= \frac{\left(e^{-t}(t-2)\right)\left(e^t(1+t)\right) - \left(e^{-t}(1-t)\right)\left(e^t(2+t)\right)}{\left(e^t(1+t)\right)^3} \\ &= \frac{(t-2)(1+t) - (1-t)(2+t)}{\left(e^t(1+t)\right)^3} = \frac{2t^2 - 4}{\left(e^t(1+t)\right)^3}.\end{aligned}$$

□

## 1.2 Derivace funkcí zadaných implicitně

**Úloha 1.4.** Vypočtěte  $y'(1)$  pro funkci  $y = y(x)$  zadanou implicitně  $y^2x + 6x = 7$ .

*Řešení.*

$$y^2x + 6x = 7$$

$$2yy'x + y^2 + 6 = 0$$

$$y' = -\frac{y^2 + 6}{2yx}$$

$$y'(1) = -\frac{y^2(1) + 6}{2y(1) \cdot 1}$$

Pro  $x = 1$ :

$$y^2(1) \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 7, \quad y^2(1) = 1, \quad y(1) = \pm 1.$$

Pro  $y(1) = -1$ :

$$y'(1) = -\frac{y^2(1) + 6}{2y(1) \cdot 1} = -\frac{(-1)^2 + 6}{2(-1) \cdot 1} = \frac{7}{2}.$$

Pro  $y(1) = 1$ :

$$y'(1) = -\frac{y^2(1) + 6}{2y(1) \cdot 1} = -\frac{(1)^2 + 6}{2(1) \cdot 1} = -\frac{7}{2}.$$

□

**Úloha 1.5.** Vypočtěte  $y'(1)$  pro funkci  $y = y(x)$  zadanou implicitně  $y^3x + 6x = 7$ .

*Řešení.*

$$y^3x + 6x = 7$$

$$3y^2y'x + y^3 + 6 = 0$$

$$y' = -\frac{y^3 + 6}{3y^2x}$$

$$y'(1) = -\frac{y^3(1) + 6}{3y^2(1) \cdot 1}$$

Pro  $x = 1$ :

$$y^3(1) \cdot 1 + 6 \cdot 1 = 7, \quad y^3(1) = 1, \quad y(1) = 1.$$

Pro  $y(1) = 1$ :

$$y'(1) = -\frac{y^3(1) + 6}{3y^2(1) \cdot 1} = -\frac{1 + 6}{3 \cdot 1 \cdot 1} = -\frac{7}{3}.$$

□

## 2 Věty o střední hodnotě diferenciálního počtu

### 2.1 Lagrangeova věta

**Úloha 2.1.** Je dána funkce  $y = x^2 - 2$  na intervalu  $\langle 0; 1 \rangle$ . Určete pro ni číslo  $\xi$  z Lagrangeovy věty, načrtněte obrázek.

*Řešení.*

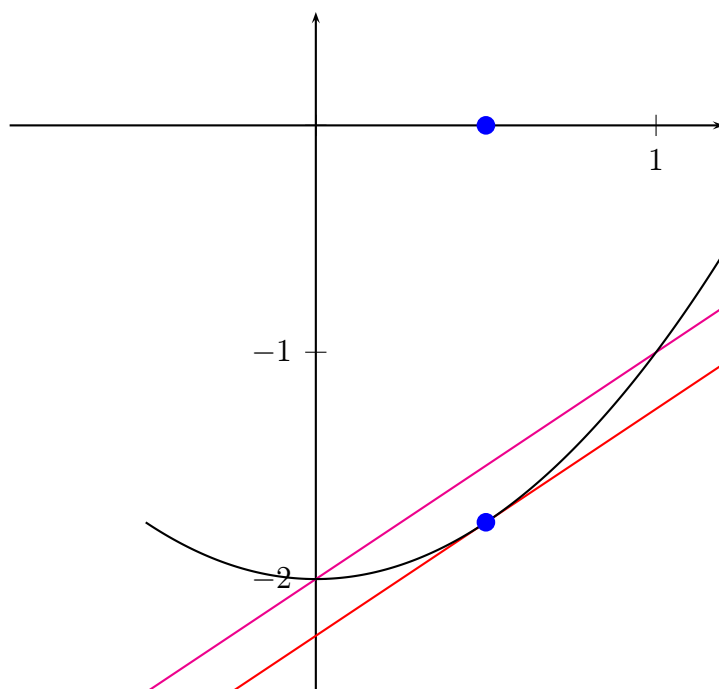
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 2\xi$$

$$\frac{(1 - 2) - (0 - 2)}{1} = 2\xi$$

$$\frac{1}{1} = 2\xi$$

$$\xi = \frac{1}{2}$$



□

### 3 L'Hospitalovo pravidlo pro výpočet limit

Základní typy:  $\left[\frac{0}{0}\right]$ ,  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ .

Dovoditelné typy:  $[0 \cdot \infty]$ ,  $[\infty - \infty]$ ,  $[1^\infty]$ ,  $[0^0]$ ,  $[\infty^0]$ .

**Úloha 3.1.** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$   $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ .

*Řešení.* Limita podílu derivací  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1}$  neexistuje, takže nelze použít l'Hospitalovo pravidlo, resp. nedává žádný výsledek.

Přitom původní limita existuje:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{\sin x}{x} = \left[1 + \frac{\text{omezená}}{\infty}\right] = 1 + 0 = 1.$$

□

**Úloha 3.2.** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ .

*Řešení.*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{LP}{=} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

□

**Úloha 3.3.** Vypočtete  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^{ax}}$ , kde  $m \in \mathbb{N}$  a  $a > 0$ .

*Řešení.*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^{ax}} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{mx^{m-1}}{a e^{ax}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \frac{m(m-1)x^{m-2}}{a^2 e^{ax}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \dots \\ &\stackrel{LP}{=} \frac{m(m-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^0}{a^m e^{ax}} = \left[ \frac{\text{konstanta}}{\infty} \right] = 0\end{aligned}$$

□

**Úloha 3.4.** Vypočtěte  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln x \cdot \ln(1-x)]$ .

*Řešení.*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} [\ln x \cdot \ln(1-x)] &= [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{x \ln^2 x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \ln^2 x}{1-x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^2 x + \frac{x \cdot 2 \ln x}{x}}{-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{-1} = \left[ \frac{0}{-1} \right] = 0\end{aligned}$$

□

**Úloha 3.5.** Vypočtěte  $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ , kde  $x > 0$ .

*Řešení.* Upravíme:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x}.$$

Nalezneme limitu exponentu:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -x = 0.$$

Dosadíme zpět:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x} = e^0 = 1.$$

□

**Úloha 3.6.** Vypočtěte  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{x} \right)^{x^2}$ .

*Řešení.* Upravíme:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \cdot \cos \frac{a}{x}}.$$

Nalezneme limitu exponentu:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \cos \frac{a}{x} &= [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{a}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{x^2} \sin \frac{a}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \sin \frac{a}{x}}{\frac{-2}{x}} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-a^2}{x^2} \cos \frac{a}{x}}{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-a^2}{2} \cos \frac{a}{x} = \frac{-a^2}{2}.\end{aligned}$$

Dosadíme zpět:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{x} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x^2 \cdot \cos \frac{a}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \cos \frac{a}{x}} = e^{\frac{-a^2}{2}}.$$

□

**Úloha 3.7.** Vypočtěte  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cotg x - \frac{1}{x} \right)$ .

*Řešení.*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cotg x - \frac{1}{x} \right) &= [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \left[ \frac{0}{2} \right] = 0. \end{aligned}$$

□

## 4 Taylorův (Maclaurinův) rozvoj funkce

Taylorův rozvoj:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(h).$$

Pro  $h = x - x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x - x_0),$$

Maclaurinův rozvoj  $x_0 = 0$ :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

**Úloha 4.1.** Vypočtěte Maclaurinův rozvoj funkce  $f : y = \cos 2x$ .

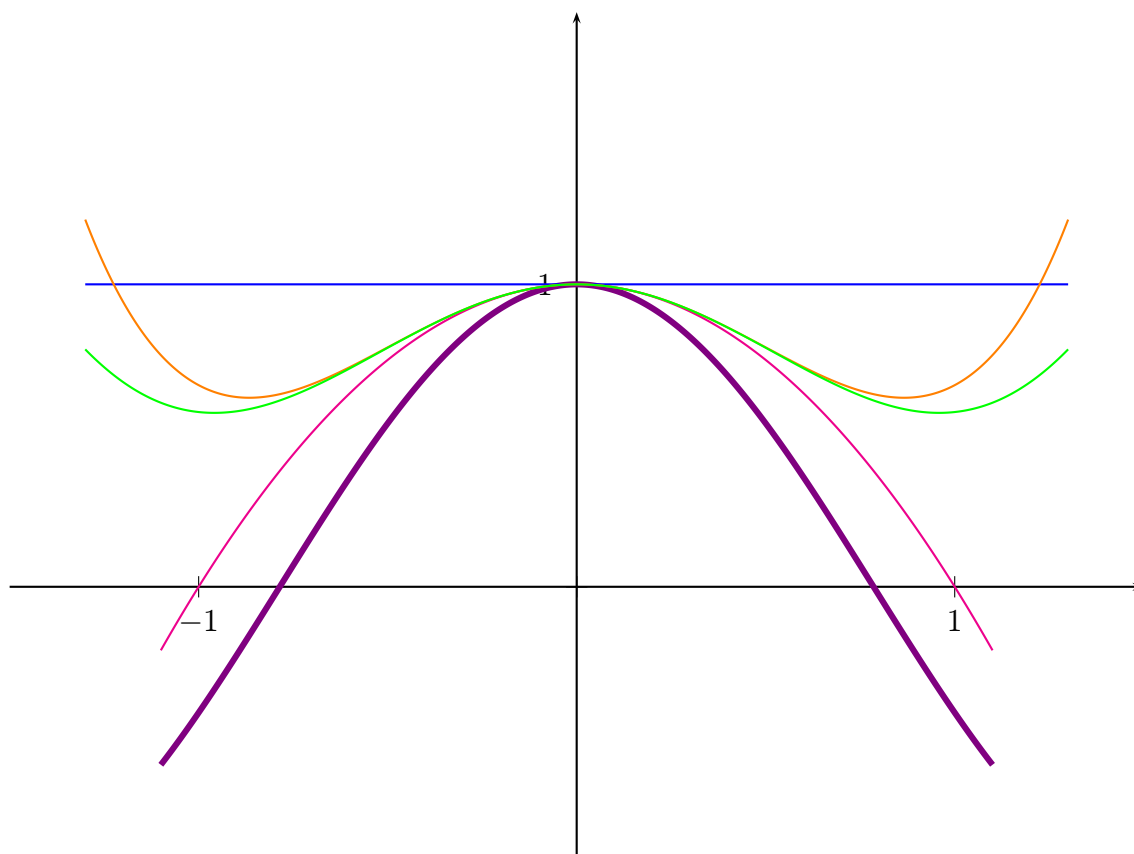
*Řešení.* Nejprve si vypočteme hodnoty derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos 2x, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -2 \sin 2x, & f'(0) &= 0, \\ f''(x) &= -2^2 \cos 2x, & f''(0) &= -2^2, \\ f'''(x) &= 2^3 \sin 2x, & f'''(0) &= 0, \\ f^{(4)}(x) &= 2^4 \cos 2x, & f^{(4)}(0) &= 2^4, \\ f^{(5)}(x) &= -2^5 \sin 2x, & f^{(5)}(0) &= 0, \\ f^{(6)}(x) &= -2^6 \cos 2x, & f^{(6)}(0) &= -2^6, \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Dosadíme:

$$f(x) = \cos 2x = 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-2^2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5 + \frac{-2^6}{6!}x^6 + \dots,$$

$$f(x) = \cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + \dots.$$



Obrázek 1: Grafy funkce  $y = \cos 2x$  a jejích aproximací  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = 1 - x^2$ ,  $f_3(x) = 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4$  a  $f_4(x) = 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6$ .

□