

1. Určete a zdůvodněte, zda dané výrazy mají smysl, resp. určete jejich hodnotu.

$$\begin{aligned} a &= \frac{5}{+\infty} + (+\infty - 10^{10}) + 1000, \\ b &= \frac{+\infty}{5} \cdot (-\infty)^4 + \frac{+\infty}{3} \cdot (\sqrt{5} + 0,9 - \pi), \\ c &= \frac{100}{-\infty} + \frac{0}{+\infty} + \frac{100}{2^3} \cdot 0^5 + 3 \cdot (2^{-\infty} - 1) - \frac{100}{2^{+\infty}}. \end{aligned}$$

2. Je dána množina

$$M = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots \right\} \cup \langle 1; 2 \rangle.$$

Určete pro množinu M : vnitřek, hranici, uzávěr, derivaci, množinu jejích izolovaných bodů, supremum a infimum, největší a nejmenší prvek.

3. Dokažte (podle definice), že posloupnost $\left\{ \frac{n-1}{n+1} \right\}$ je rostoucí, shora omezená

$$\text{a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1.$$

4. V aritmetické posloupnosti je $a_2 = a$, $a_4 = a - b$. Určete s_9 .

5. V geometrické posloupnosti je $a_2 = a^2$, $a_4 = b^2$. Určete s_5 .

ŘEŠENÍ: 1.) $a = +\infty$, $b = \text{nedefinováno}$, $c = -3$,

2.) vnitřek: $(1; 2)$, hranice: $\left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots \right\} \cup \{0\} \cup \{1, 2\}$,

uzávěr: $M \cup \{0; 2\} = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots \right\} \cup \{0\} \cup \langle 1; 2 \rangle$, derivaci: $\{0\} \cup \langle 1; 2 \rangle$,

množina jejích izolovaných bodů: $\left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots \right\}$,

supremum: 2, infimum: $-\frac{1}{2}$, největší prvek: neexistuje, nejmenší prvek: $-\frac{1}{2}$.

3.) rostoucí: $a_n < a_{n+1}$, $\frac{n-1}{n+1} < \frac{n}{n+2}$, ...; shora omezená: $\frac{n-1}{n+1} < 1$, ...;

limita: $\forall U(1, \varepsilon) \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} \in U(1, \varepsilon)$, $\frac{n_0-1}{n_0+1} \in (1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$, $\frac{n_0-1}{n_0+1} > 1-\varepsilon$, ... $n_0 > ? \dots$,

$$4.) s_9 = -\frac{27}{2}b + 9a, \quad 5.) \text{ První řešení: } s_5 = \frac{a^3 \left(1 - \frac{b^5}{a^5}\right)}{b \left(1 - \frac{b}{a}\right)}; \text{ druhé řešení: } s_5 = -\frac{a^3 \left(1 + \frac{b^5}{a^5}\right)}{b \left(1 + \frac{b}{a}\right)}.$$

Dobrovolná úloha A: Je dána posloupnost

$$\{a_n\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{5}{16}, \dots$$

Najděte takové vybrané posloupnosti $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$, aby

$$\lim b_n = \frac{1}{2}, \quad \lim c_n = \frac{3}{4}, \quad \lim d_n = \frac{1}{3}.$$