

1. Rozhodněte, zda daná funkce má derivaci v bodě 0 a v kladném případě tuto derivaci vypočtete:

$$\text{a) } y = x|x|, \quad \text{b) } y = \begin{cases} 2x & \text{pro } x \in Q, \\ 0 & \text{pro } x \in Q', \end{cases}, \quad \text{c) } y = \begin{cases} x^2 & \text{pro } x \in Q, \\ 0 & \text{pro } x \in Q', \end{cases}.$$

2. Vypočtete derivaci v bodě:

$$\text{a) } y = \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^2 \text{ v bodě } x_1 = 0 \text{ a } x_2 = \sqrt{2}, \quad \text{b) } y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}} \text{ v bodě } x_0 = 1.$$

3. Derivace součinu a podílu:

$$\text{a) } y = x^3 \cos x, \quad f'(\pi/2), \quad \text{b) } y = x2^x, \quad f'(0), \quad \text{c) } y = (x^2 - 1)\sqrt{x}, \quad f'(1),$$

$$\text{d) } y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}, \quad f'(0), \quad \text{e) } y = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad f'(0).$$

4. Derivace složených funkcí:

$$\text{a) } y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right), \quad \text{b) } y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}, \quad \text{c) } y = e^{-x^2} \cos e^{-2x},$$

$$\text{d) } y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}, \quad \text{e) } y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}, \quad \text{f) } y = \sqrt{4x - x^2} + 4 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2}.$$

5. Vypočtete derivaci funkce:

$$\text{a) } y = x^{\sqrt{x}}, \quad \text{b) } y = (\cos x)^{\sin(2x+1)}, \quad \text{c) } y = (\ln x)^x.$$

6. Užitím diferenciálu funkce určete přibližnou hodnotu výrazu:

$$\text{a) } \ln 0,965, \quad \text{b) } \sqrt{9,02}, \quad \text{c) } e^{0,024}, \quad \text{d) } \sin 0,024.$$

7. Vypočtete derivace vyšších řádů:

$$\text{a) } 1., 2. \text{ a } 3. \text{ derivaci v bodech } 2 \text{ a } -2 \text{ funkce } y = x^2 - \frac{1}{2x^2},$$

$$\text{b) } 30. \text{ derivaci funkce } y = x^3 \operatorname{sh} 2x.$$

ŘEŠENÍ:

1. a) 0, b) Neexistuje, c) 0.

$$2. \text{ a) } y'(0) = 0, y'(\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{b) } y'(1) = 0.$$

$$3. \text{ a) } y'(\pi/2) = -\frac{\pi^3}{8}, \quad \text{b) } y'(0) = 1, \quad \text{c) } y'(1) = 2,$$

$$\text{d) } y'(0) \text{ neexistuje, } \quad \text{e) } y'(0) = 1.$$

$$4. \text{ a) } \frac{1}{\cos x}, \quad \text{b) } \frac{4xa^2}{a^4 - x^4}, \quad \text{c) } -2e^{-x^2} (x \cos e^{-2x} - e^{-2x} \sin e^{-2x}),$$

$$\text{d) } y = \frac{e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}, \quad \text{e) } \frac{-1}{1+x^2}, \quad \text{f) } \sqrt{\frac{4-x}{x}}, x \in \langle 0; 4 \rangle.$$

5. **a)** $x^{\sqrt{x}} \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}},$ **b)** $y = (\cos x)^{\sin(2x+1)} \left[2 \cos(2x+1) \ln(\cos x) - \frac{\sin(2x+1) \sin x}{\cos x} \right],$
c) $(\ln x)^x \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right].$

6. **a)** $\ln 0,965 \approx -0,035,$ **b)** $\sqrt{9,02} \approx 3,00\overline{3},$ **c)** $e^{0,024} \approx 1,024,$ **d)** $\sin 0,024 \approx 0,024.$

7. Vypočtěte derivace vyšších řádů:

a) $y'(-2) = -\frac{33}{8}, y'(2) = \frac{33}{8}, y''(-2) = \frac{29}{16} = y''(2), y'''(-2) = -\frac{3}{8}, y'''(2) = \frac{3}{8},$

b) $y^{(30)} = 3\,269\,543\,854\,080 \operatorname{ch}(2x) + 700\,616\,540\,160 x \operatorname{sh}(2x) + 48\,318\,382\,080 x^2 \operatorname{ch}(2x) + 1\,073\,741\,824 x^3 \operatorname{sh}(2x).$