

KMA/MMAN1

Matematická analýza I

Stanislav Trávníček

Učební text pro 1. ročník učitelského studia M-X

(PŘEVOD DO L^AT_EX_U, ÚPRAVY A ROZŠÍŘENÍ: JIŘÍ FIŠER)

Obsah

1	Číselná osa, supremum a infimum	5
1.1	Základní číselné množiny	5
1.2	Vlastnosti číselných množin	7
1.3	Supremum a infimum	9
1.4	Několik vět o reálných číslech a číselných množinách	11
1.5	Klasifikace bodů vzhledem k množině	12
1.6	Rozšířená reálná osa	14
2	Číselné posloupnosti	17
2.1	Pojem posloupnosti	17
2.2	Základní vlastnosti číselných posloupností	18
2.3	Limita posloupnosti	19
2.4	Nulové posloupnosti	22
2.5	Posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická	22
2.6	Některé významné limity	25
2.7	Číslo e	26
3	Pojem funkce	28
3.1	Definice funkce	28
3.2	Řešení rovnic a nerovnic	31
3.3	Vlastnosti funkcí	32
3.4	Operace s funkcemi	35
3.5	Funkce inverzní	36
3.6	Rozšíření pojmu funkce	37
4	Elementární funkce	39
4.1	Přehled elementárních funkcí	39
4.2	Algebraické funkce	40
4.3	Goniometrické funkce a funkce cyklometrické	47
4.4	Funkce exponenciální a logaritmické	55
4.5	Funkce hyperbolické a hyperbolometrické	57

5	Limita funkce	62
5.1	Limita funkce podle Heineho	62
5.2	Věty o limitách funkcí	63
5.3	Výpočet limit	65
5.4	Limita funkce podle Cauchyho	66
6	Spojitosť funkce	68
6.1	Pojem spojitosti funkce	68
6.2	Funkce spojité na množině	74
6.3	Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu	75
6.4	Stejněměrná spojitost	78
7	Derivace funkce	80
7.1	Pojem derivace funkce	80
7.2	Vlastnosti derivací	83
7.3	Derivace elementárních funkcí	85
7.4	Diferenciál funkce	85
7.5	Derivace a diferenciály vyšších řádů	88
7.6	Derivace různých typů funkcí	90
8	Základní věty diferenciálního počtu	93
8.1	Úvod	93
8.2	Věty o střední hodnotě	93
8.3	Některé důsledky vět o střední hodnotě	96
8.4	Taylorův vzorec	98
9	Užití diferenciálního počtu	102
9.1	Monotónnost funkce	102
9.2	Lokální extrémy	104
9.3	Největší a nejmenší hodnota funkce na intervalu	106
9.4	Konvexnost a konkávnost	106
9.5	Inflexe a inflexní body	107
9.6	Asymptoty	109
9.7	Průběh funkce	110
9.8	Užití extrémů funkcí	112

Seznam obrázků

4.1	Grafy funkcí $y = x^3$, $y = x^2$, $y = x$, $y = x^{1/2}$ a $y = x^{1/3}$.	43
4.2	Pravoúhlý trojúhelník	47
4.3	Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí	49
4.4	Grafy funkcí $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = 2 \sin x$ a $y = \cos x$.	50
4.5	Grafy funkcí $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$.	52
4.6	Grafy funkcí $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ a $y = \operatorname{arccotg} x$.	54
4.7	Grafy funkcí $y = e^x$, $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, $y = 2^x$ a $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.	56
4.8	Grafy funkcí $y = \ln x$, $y = \log_{1/e} x$, $y = \log_2 x$ a $y = \log_{1/2} x$.	58
4.9	Grafy funkcí $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ a $y = \operatorname{coth} x$.	60
4.10	Grafy funkcí $y = \operatorname{argsh} x$, $y = \operatorname{argch} x$, $y = \operatorname{argth} x$ a $y = \operatorname{argcoth} x$.	61
6.1	V bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu (DODEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).	70
6.2	V bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menší než limita zprava, obě jsou vlastní (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).	70
6.3	V bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).	70
6.4	V bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).	70
6.5	V bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota (PŘEDEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).	71
6.6	V bodě $x_6 \in D(f)$, limita zleva je menší než $f(x_6)$, limita zprava je větší než $f(x_6)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).	71
6.7	V bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).	71
6.8	V bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).	72

6.9	V bodě $x_9 \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).	72
7.1	Přírůstky nezávisle proměnné.	80
7.2	Sečna grafu.	81
7.3	Geometrický význam diferenciálu funkce.	87
9.1	Grafy funkcí $y = x^3$ a $y = 2x + x $.	102
9.2	Grafy funkcí $y = x^2 e^{-x}$ a $y' = x(2 - x) e^{-x}$ z úlohy 9.1.4.	104

Kapitola 1

Číselná osa, supremum a infimum

1.1 Základní číselné množiny

Uvedeme si přehled základních číselných množin a jejich označení. Uvažují se zejména tyto číselné množiny:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ je množina všech *přirozených* čísel.

Přirozená čísla se používají např. jako pořadová čísla, třeba při zápisu členů posloupnosti: $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

je pro některé autory také množinou všech *přirozených* čísel a zapisuje se jimi především počet prvků neprázdných množin.

- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ je množina všech *celých* čísel.

Celá čísla se používají např. pro zápisy vztahující se k periodičnosti funkcí; např. funkce $y = \cotg x$ není definována pro $x = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné (celé) číslo.

- $\mathbb{Q}$ — množina všech zlomků $\{\frac{k}{n}, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}\}$ je množinou všech čísel *racionálních*.

Používá se např. při konstrukci některých méně obvyklých matematických objektů (viz dále). Množina $\mathbb{Q}$ je na číselné ose hustě uspořádána, mezi každými dvěma racionálními čísly leží další racionální číslo (např. jejich aritmetický průměr); též mezi každými dvěma reálnými čísly leží racionální číslo. Desetinný rozvoj racionálních čísel je ukončený nebo periodický, dostaneme jej ze zlomku k/n dělením. Obrácený postup je již náročnější.

Úloha 1.1.1. Číslo $a = 1,5\overline{72}$ převedte na obyčejný zlomek.

První způsob řešení. Periodická část desetinného rozvoje čísla a je vlastně geometrická řada, tedy:

$$a = 1,5 + \frac{72}{10^3} + \frac{72}{10^5} + \frac{72}{10^7} + \dots = 1,5 + \frac{72}{10^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \dots = \frac{173}{110}.$$

□

Druhý způsob řešení. Využijeme nekonečného periodického opakování:

$$\begin{aligned} a &= 1,5\overline{72}, \\ 100a &= 157,2\overline{72}, \end{aligned}$$

odkud po odečtení je

$$100a - a = 99a = 157,2\overline{72} - 1,5\overline{72} = 155,7,$$

$$\text{tedy } a = \frac{1557}{990} = \frac{173}{110}.$$

□

- $\mathbb{R}$ — množina všech čísel *reálných*, je pro základní kurs matematické analýzy základní číselnou množinou (pokud není řečeno jinak, budeme rozumět pod pojmem číslo vždy číslo reálné). Dostaneme ji tak, že vhodným způsobem zavedeme iracionální čísla.

Reálná čísla zobrazujeme na číselné (reálné) ose: je to přímka, na níž zvolíme bod O jako obraz čísla 0 (počátek číselné osy) a bod J jako obraz čísla 1, a pomocí těchto dvou bodů pak na ní zobrazujeme všechna reálná čísla; body na číselné ose označujeme zpravidla přímo zobrazovanými čísly.

Při rozšiřování pojmu *číslo* z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ vznikají dvě otázky:

- zda existuje potřeba iracionálních čísel (a jak je zavést),
- zda zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu je bijekce, tj. zda i každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

Věta 1.1.2. *Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.*

Důkaz (sporem). Předpokládejme, že není splněno tvrzení věty, že tedy existuje $r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$. Číslo r je zřejmě kladné; vyjádříme je jako zlomek v základním tvaru $r = \frac{p}{q}$, tedy p, q jsou čísla nesoudělná a platí $rq = p$. Tuto rovnost umocníme: $r^2 q^2 = p^2$, tj. $2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ je sudé, tedy i p je sudé, což zapíšeme $p = 2k \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ je sudé $\Rightarrow q$ je sudé $\Rightarrow$ zlomek $\frac{p}{q}$ lze krátit dvěma, a to je spor s předpokladem, že tento zlomek je v základním tvaru. □

Bez iracionálních čísel (tj. v množině $\mathbb{Q}$) bychom tak např. nedovedli změřit úhlopříčku jednotkového čtverce (neměla by délku). Existuje tedy potřeba čísel, která nejsou racionální a která jsme nazvali iracionální.

Logika rozšiřování číselných oborů říká, že nový druh čísel zavádíme pomocí čísel již dříve definovaných. Při zavádění čísel reálných (tedy vlastně iracionálních, jen ta jsou nová) lze postupovat tak, že definujeme tzv. řez v množině Q jako každý rozklad množiny Q na dvě třídy, dolní a horní, kde tedy každé racionální číslo patří právě do jedné z těchto tříd a každé číslo z horní třídy je větší než každé číslo z dolní třídy. Iracionální číslo pak ztotožníme s takovým řezem, kde v dolní třídě není největší prvek a v horní třídě není prvek nejmenší. Např. číslo $\sqrt{2}$ je dáno řezem v $\mathbb{Q}$, kde do dolní třídy patří všechna čísla záporná a ta x z nezáporných, pro něž je $x^2 < 2$, do horní třídy patří všechny zbývající racionální čísla.

- Množinu všech *iracionálních* čísel označíme $\mathbb{Q}'$.

Platí:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset \quad \text{a} \quad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'.$$

Všimněme si dekadického rozvoje: racionální čísla mají dekadický rozvoj ukončený nebo periodický, iracionální čísla mají svůj dekadický rozvoj neukončený a neperiodický (pro iracionální čísla často známe jen konečný počet míst jejich dekadického rozvoje (např. pro číslo π)), ale není to pravidlo.

Úloha 1.1.3. *Napište dekadický rozvoj takového iracionálního čísla, u něhož dovedeme jednoduše určit číslici na libovolném místě rozvoje.*

Poznámka 1.1.4. *Důležitá cesta k poznání množiny $\mathbb{Q}'$ vede přes mohutnosti množin. Víme, že množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, a $\mathbb{Q}$ jsou spočetné (prvky těchto množin lze uspořádat do posloupnosti), zatímco množina $\mathbb{R}$ (a tedy i $\mathbb{Q}'$) spočetná není; říkáme, že $\mathbb{R}$ má mohutnost kontinua.*

- $\mathcal{C}$ — množina všech čísel *komplexních*; komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině.

Pro uvedené číselné množiny platí:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathcal{C}.$$

1.2 Vlastnosti číselných množin

O relacích a operacích v číselných množinách a o jejich přirozeném uspořádání pojednává podrobně algebra. Avšak i v matematické analýze se zabýváme mnoha významnými číselnými množinami. Při vyšetřování číselných množin se zabýváme jejich vlastnostmi, o nichž dále pojednáme.

Definice 1.2.1. Množina M se nazývá **shora omezená** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \leq L$. Toto číslo L se nazývá **horní odhad** (resp. horní závora).

Množina M se nazývá **zdola omezená** $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \geq K$. Toto číslo K se nazývá **dolní odhad** (resp. dolní závora).

Množina M se nazývá **omezená** $\Leftrightarrow$ je omezená shora i zdola.

Úloha 1.2.2. Kolik horních (dolních) odhadů má číselná množina? Vyjádřete, co znamená, že daná množina M není omezená shora, zdola, že není omezená. Co znamená, že číslo B není horním odhadem dané množiny?

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M , pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

Úloha 1.2.3. Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}, \quad M_2 = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots \right\}, \quad M_3 = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Řešení. Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší. $\square$

K nejdůležitějším číselným množinám patří *interval*y.

Definice 1.2.4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$, definujeme

uzavřený interval $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,

otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,

a podobně $\langle a, b \rangle$ a (a, b) .

Všechny tyto intervaly mají délku $b - a$.

Definice 1.2.5. Množinu $\langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ nazýváme **neomezený interval**. Podobně $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$.

Množinu $\mathbb{R}$ zapisujeme též jako $(-\infty, +\infty)$.

Někdy uvažujeme též *degenerované intervaly*: $\langle a, a \rangle = \{a\}$, $(a, a) = \emptyset$ (prázdná množina). Pojmeme interval budeme však dále vždy rozumět nedegenerovaný interval.

Definice 1.2.6. **Absolutní hodnota** čísla $a \in \mathbb{R}$ se označuje $|a|$ a je definována takto:

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta 1.2.7 (vlastnosti absolutní hodnoty). $\forall a, b \in \mathbb{R}$ platí

1. $|a| \geq 0$, přičemž $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
2. $|-a| = |a|$,
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (trojúhelníkovou nerovnost),
4. $|a - b| \geq |a| - |b|$,
5. $|ab| = |a| \cdot |b|$,
6. pro $b \neq 0$ je $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Vlastnost 3 můžeme zobecnit (důkaz matematickou indukcí):
 (3') $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a_i \in \mathbb{R} : |a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$, nebo zkráceně

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Geometrický význam absolutní hodnoty: $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy, $|a - b|$ ($= |b - a|$) vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose.

Úloha 1.2.8. Řešte nerovnice a rovnici:

- a) $|x - 3| < 2$,
- b) $2|x + 2| - 3|x| - 2x \geq 4$,
- c) $-3 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}|x + 1| - \frac{3}{4}|x - 2| = 0$.

1.3 Supremum a infimum

Definice 1.3.1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ nazýváme **supremum** množiny M a píšeme $\beta = \sup M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

- (1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,
- (2) $\forall \beta' < \beta \exists x' \in M : x' > \beta'$.

Vlastnost (1) znamená, že β je horní odhad, vlastnost (2) říká, že β je ze všech horních odhadů nejmenší, tedy: $\sup M$ je *nejmenší horní odhad* (závora) množiny M . Z definice ovšem nijak neplyne, že takový nejmenší horní odhad existuje.

Definice 1.3.2. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme **infimum** množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

- (1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,

$$(2) \forall \alpha' > \alpha \exists x' \in M : x' < \alpha'.$$

Vlastnost (1) znamená, že α je dolní odhad, vlastnost (2) říká, že α je ze všech dolních odhadů největší, tedy: $\inf M$ je největší dolní odhad (závora) množiny M . Z definice opět nijak neplyne, že takový největší dolní odhad existuje.

Úloha 1.3.3. Určete $\sup M$ a $\inf M$ pro množinu $M = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$.

Důkaz. Platí $\sup M = 1$, neboť všechny prvky množiny M jsou pravé zlomky a jsou tedy menší než 1; jestliže však vezmeme libovolné číslo $r < 1$, existuje vždy v M prvek $\frac{n}{n+1}$, který je větší než r . Dále $\inf M = \frac{1}{2}$, neboť žádný prvek M není menší než $\frac{1}{2}$, a když zvolíme libovolné číslo $s > \frac{1}{2}$, pak vždy právě pro prvek $\frac{1}{2}$ platí $\frac{1}{2} < s$. Přitom $\sup M$ není a $\inf M$ je prvkem zadané množiny M . $\square$

Tedy: supremum a infimum množiny mohou, ale nemusí být prvky této množiny. Pokud $\sup M$ je prvkem množiny M , je jejím největším prvkem; podobně pro $\inf M$. Také naopak, pokud má M největší prvek, je to současně $\sup M$; podobně pro nejmenší prvek.

Věta 1.3.4 (o existenci suprema a infima). 1) Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.

2) Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Tuto větu budeme považovat za axiom vyjadřující základní vlastnost číselné osy. Tedy: existuje bijekce množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu — každé reálné číslo lze zobrazit na číselné ose a každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla. Říkáme též: *číselná osa je spojitá*. Pojmy „číslu“ a „bod číselné osy“ považujeme za synonyma a říkáme např. „bod x_0 “ místo „číslu x_0 “ apod.

Pojmy supremum a infimum a věta o existenci suprema a infima jsou pro matematickou analýzu velmi důležité. Hrají podstatnou roli v řadě důkazů (viz např. důkaz Věty 1.4.5 o vložených intervalech) a při definici dalších důležitých matematických pojmů.

Reálná čísla a realita

Matematika svými prostředky modeluje realitu a přitom používá metody abstrakce: abstrahuje od mnoha vlastností reálných objektů (které mohou být pro realitu velmi významné) a ponechává jen ty, které upotřebí při vytváření matematických modelů. Vytváří tak různé abstraktní objekty, jako je bod, čtverec, číslo, funkce, řada ad. Tyto abstraktní modely jsou velmi vhodné pro popis a studium reality, ale přesto nesmíme zaměňovat model a realitu. V určitých případech se naše reálné představy a zkušenosti dostávají do rozporu s některými matematicky zcela přesně definovanými pojmy a vlastnostmi. Např. v reálném životě není nekonečno, takže některé jeho vlastnosti odporují našim praktickým zkušenostem,

třeba to, že nekonečná množina je ekvivalentní s některou svou pravou částí; např. množina všech lichých přirozených čísel „má týž počet prvků“ (tj. stejnou mohutnost) jako množina $\mathbb{N}$. Podobně na základě zkušeností z reálného světa je nepředstavitelné, že $\mathbb{Q}'$ má větší mohutnost než $\mathbb{Q}$ (že iracionálních čísel „je více“ než čísel racionálních. Naše zkušenost říká, že když vedle sebe jsou umístěny nějaké objekty, tak mezer mezi nimi je tak nějak stejně jako objektů (plaňkový plot), ale u čísel racionálních a iracionálních je to úplně a nepředstavitelně jinak. Mezi každými dvěma čísly racionálními je alespoň jedno číslo iracionální a mezi každými dvěma čísly iracionálními je alespoň jedno číslo racionální, přičemž těch iracionálních mezi dvěma racionálními je množina mohutnosti kontinua, zatímco racionálních mezi dvěma iracionálními je jen spočetná množina. Definice iracionálních čísel, ať už použijeme jakoukoli metodu, vytváří jen matematický model a nikoli realitu. Spojitost číselné osy, která se skládá z racionálních a iracionálních bodů, si nelze představit; snad i proto, že v reálném světě je to jinak, tam neexistuje žádná přímka a pohodu číselné osy jako dobře fungujícího matematického modelu narušují různé fyzikální částice.

1.4 Několik vět o reálných číslech a číselných množinách

Věta 1.4.1 (o aritmetickém a geometrickém průměru). *Jsou-li a, b libovolná reálná nezáporná čísla, pak jejich aritmetický průměr $(\frac{a+b}{2})$ je větší nebo roven jejich průměru geometrickému $(\sqrt{ab})$, přičemž rovnost průměrů nastává právě při rovnosti obou čísel a, b .*

Princip důkazu. Je tu vhodný důkaz přímý syntetický, přičemž se vyjde z platné nerovnosti $\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0$, jejíž úpravou dostaneme tvrzení. $\square$

Úloha 1.4.2. *Všimněte si slovní formulace věty. Přepište ji do formy převážně symbolické a do formy zcela symbolické.*

Věta 1.4.3 (Bernoulliho nerovnost). $\forall h \in \mathbb{R}, h > -1, h \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ platí

$$V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh.$$

Princip důkazu. Matematickou indukci v 1. kroku dokazujeme $V(2) : (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$, a ve druhém kroku dokazujeme implikaci $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ a to tak, že ve $V(n)$ násobíme obě strany nerovnosti výrazem $(1 + h)$ a pak na pravé straně vynecháme člen nh^2 . $\square$

Bernoulliho nerovnost se používá např. při některých důkazech vlastností posloupností.

Věta 1.4.4 (o rovnosti reálných čísel). *Nechť $p, q \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall \varepsilon > 0$ platí $|p - q| < \varepsilon$, pak $p = q$.*

Důkaz (sporem). Kdyby $p \neq q$, bylo by $|p - q| > 0$. Zvolíme-li $\varepsilon = |p - q|$, dostáváme, že $|p - q| < \varepsilon$ a současně $|p - q| = \varepsilon$, což dává spor. Proto $p = q$. $\square$

Tato jednoduchá věta usnadňuje některé důkazy, např. důkaz následující věty.

Věta 1.4.5 (o vložených intervalech). *Nechť $\{J_n\}$ je posloupnost omezených uzavřených intervalů $J_n = \langle a_n, b_n \rangle$ takových, že $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots$. Pak existuje bod x_0 , který leží ve všech intervalech J_n , $n \in \mathbb{N}$. Jestliže navíc $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $|J_n| < \varepsilon$, je takový bod x_0 jediný.*

Princip důkazu. Uvažujeme množinu A všech levých krajních bodů a_n intervalů J_n a množinu B jejich pravých krajních bodů b_n ; pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_m$. Podle věty o existenci suprema tedy existuje $\alpha = \sup A$, pro něž $\alpha \leq b_m$; podobně existuje $\beta = \inf B$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$, tedy $\forall n \in \mathbb{N} : \langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle$. Pro důkaz tvrzení věty stačí volit $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Je-li interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ degenerovaný, dostáváme x_0 jednoznačně. To nastává právě tehdy, když je splněna druhá podmínka věty, tedy když $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $b_n - a_n < \varepsilon$. Jelikož je $\beta - \alpha \leq b_n - a_n < \varepsilon$, je podle věty o rovnosti reálných čísel $\alpha = \beta$. $\square$

Podmínka věty, zajišťující jednoznačnost společného bodu x_0 může být formulována i takto: „Jestliže posloupnost $\{|J_n|\}$ délek intervalů J_n je nulová ...“

Větu o vložených intervalech používáme při důkazech některých důležitých vlastností posloupností a funkcí, zejména ve spojení s tzv. Bolzanovou metodou důkazu.

1.5 Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice 1.5.1. *Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a : $U(a)$.*

Tato definice je formulována ve smyslu topologickém.

Věta 1.5.2 (vlastnosti okolí). *Okolí bodu a má tyto vlastnosti:*

- (1) *Pro každé $U(a)$ je $a \in U(a)$.*
- (2) *Ke každým dvěma okolím $U_1(a)$, $U_2(a)$ existuje okolí $U(a)$ tak, že $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$.*
- (3) *Je-li $b \in U(a)$, pak existuje $U_1(b)$ tak, že $U_1(b) \subset U(a)$.*
- (4) *Pro libovolná $a \neq b$ existují $U_1(a)$, $U_2(b)$ tak, že $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$.*

Pro důkazy některých vět je vhodnější definovat okolí bodu a ve smyslu metrickém.

Definice 1.5.3. ε -*okolím bodu* a , kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nazýváme interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; označení: $U(a, \varepsilon)$ nebo též $U(a)$.

Lehce ověříme, že ε -okolí má všechny uvedené vlastnosti okolí. Místo $x \in U(a, \varepsilon)$ lze rovněž psát $|x - a| < \varepsilon$.

Definice 1.5.4. *Prstencovým (redukovaným) okolím bodu* a nazýváme množinu $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

Podobně $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu a jako interval (c, a) nebo $(a - \varepsilon, a)$ resp. $\langle a, d \rangle$ nebo $\langle a, a + \varepsilon \rangle$; jsou to tzv. **jednostranná okolí**. Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová (redukovaná) okolí* — to když z jednostranného okolí vypustíme bod a .

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z $\mathbb{R}$ vzhledem k dané číselné množině M . Uvedeme si nyní zkrácené definice některých důležitých pojmů, používaných v matematické analýze.

- **Vnitřní bod množiny** M : Bod množiny M , který do M patří i s některým svým okolím.
- **Vnitřek množiny** M : Množina všech vnitřních bodů množiny M .
- **Hraniční bod množiny** M : V každém jeho okolí existuje bod množiny M a též bod, který do M nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do M .)
- **Hranice množiny** M : Množina všech hraničních bodů množiny M .
- **Vnější bod množiny (vzhledem k množině)** M : Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny M .
- **Vnějšek množiny** M : Množina všech vnějších bodů množiny M .
- Množina M je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr $\overline{M}$ množiny** M : Sjednocení množiny M a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny** M : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M .
- **Izolovaný bod množiny** M : Bod množiny M , který není jejím hromadným bodem.

- **Diskrétní množina:** Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace M' množiny M :** Množina všech hromadných bodů množiny M .

Jelikož všechny tyto pojmy jsou založeny vlastně jen na pojmu okolí, setkáváme se s nimi ve všech prostorech, kde se pracuje s okolím. Na číselné ose (na rozdíl např. od roviny) však pracujeme i s pojmy „levé okolí“ a „pravé okolí“ a můžeme tedy např. definovat *levý hromadný bod* a *pravý hromadný bod* a těchto pojmů skutečně využíváme při definování jednostranných limit funkce.

Úloha 1.5.5. Všechny uvedené pojmy použijte pro množinu $M = \langle -1, 0 \rangle \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$.

1.6 Rozšířená reálná osa

Je to model číselné osy, kterou rozšíříme o dva nové prvky: *nevlastní číslo* $+\infty$ a nevlastní číslo $-\infty$. Označení rozšířené reálné osy: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

- **Uspořádání:** $\forall x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty$, zvláště $-\infty < +\infty$; $-(-\infty) = +\infty$, $-(+\infty) = -\infty$, $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.
- **Okolí:** $U(+\infty)$ toto označení budeme používat pro každý interval $\langle c, +\infty \rangle \subset \mathbb{R}^*$, ale pokud budeme pracovat na $\mathbb{R}$, použijeme toto označení (pro zjednodušení vyjadřování) též pro intervaly $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$, což jsou vlastně prstencová okolí $P(+\infty)$ na $\mathbb{R}^*$. Podobně pro $U(-\infty)$ a $P(-\infty)$.
- **Supremum a infimum:** Pro množinu M , která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M , která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.
- **Hromadné body:** Definice je formálně stejná, tedy $+\infty$ nazveme hromadným bodem množiny $M \subset \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$ v každém jeho okolí $P(+\infty)$ leží alespoň jeden bod množiny M . Podobně pro $-\infty$.

Např. množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel má hromadné body $+\infty$ a $-\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, ale samozřejmě $+\infty \notin \mathbb{Z}$, $-\infty \notin \mathbb{Z}$.

Početní operace s nevlastními čísly

- *Sčítání a odčítání:* $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\pm x + (+\infty) = (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$$

$$\pm x + (-\infty) = (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = (-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty).$$

- *Násobení:* $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Podobně pro $x < 0$.

- *Nedefinujeme*

$$0 \cdot (+\infty), \quad (+\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

- *Dělení:* $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

Pro $x > 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

pro $x < 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \text{atd.}, \quad \frac{x}{0} \quad \text{pro žádné } x \in \mathbb{R}, \text{ tj. ani } \frac{0}{0} \quad \text{nebo} \quad \frac{\pm\infty}{0}.$$

- *Mocniny:* $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

Poznámka 1.6.1. Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ jen ∞ , takže např. místo výrazu $(+\infty) + (+\infty)$ lze napsat jen $\infty + \infty$. Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jediné komplexní nekonečno označované ∞ , musíme dát pozor na jeho odlišení od $+\infty$ z rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^*$.

Úloha 1.6.2. Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

— * —

Kapitola 2

Číselné posloupnosti

2.1 Pojem posloupnosti

Definice 2.1.1. Každé zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme **číselná posloupnost**. Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$; a_n se nazývá n -tý člen posloupnosti.

Definici číselné posloupnosti lze založit i na pojmu (reálné) funkce; pak je to funkce definovaná na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

Způsoby zadání posloupnosti

Číselná posloupnost bývá zadána *několika prvními členy* (tak, aby bylo patrné pravidlo, jak vytvářet další členy, n -tým členem nebo rekurentně.

Úloha 2.1.2. Je dána posloupnost $\frac{1}{1 \cdot 4}, \frac{3}{4 \cdot 7}, \frac{5}{7 \cdot 10}, \frac{7}{10 \cdot 13}, \dots$ Určete její n -tý člen.

Řešení. $a_n = \frac{2n-1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$ □

Při zadání n -tým členem zase naopak lze z příslušného vzorce počítat jednotlivé členy posloupnosti.

Úloha 2.1.3 (Příklady číselných posloupností zadaných n -tým členem). $\{\frac{n}{n+1}\}$, $\{(-1)^n \cdot n\}$, $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$, $\{a \cdot q^{n-1}\}$, $\{a + (n-1)d\}$. Vypočtěte členy a_1, a_2, a_3, a_4 .

Rekurentní definice obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti: $a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d$.

Rekurentní definice geometrické posloupnosti: $a_1 = a, a_{n+1} = a_n \cdot q$ ($q \notin \{0, 1, -1\}$).

Úloha 2.1.4. Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána rekurentně takto: $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{10}{a_n} \right)$; je to posloupnost aproximací čísla $\sqrt{10}$. Vypočtěte první čtyři aproximace.

Úloha 2.1.5. *Fibonacciho posloupnost $\{b_n\}$ je definována takto: $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. Vypočítejte prvních 10 členů této posloupnosti.*

Posloupnost $\{a_n\}$ je třeba odlišovat od množiny (všech) jejích členů (kdy se též užívají složené závorky). Například množina (všech) členů posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}$ je $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, množina (hodnot) členů posloupnosti $\{(-1)^n\}$ je $\{-1, 1\}$.

Definice 2.1.6. *Posloupnost $\{b_n\}$ se nazývá **vybraná** z posloupnosti $\{a_n\}$ (nebo též **podposloupnost**) $\Leftrightarrow \exists$ posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $b_n = a_{k_n}$.*

Např. posloupnost všech prvočísel je vybraná z posloupnosti $\{n\}$ všech čísel přirozených, ale není vybraná z posloupnosti $\{2n-1\}$ všech čísel lichých.

2.2 Základní vlastnosti číselných posloupností

V této kapitole se dále zabýváme jen číselnými posloupnostmi.

Definice 2.2.1. *Posloupnost se nazývá (**shora, zdola**) **omezená** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina všech jejích členů.*

Např. posloupnost $\{2n-1\}$ je zdola omezená, není omezená shora, není omezená. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená shora i zdola, je omezená. Stacionární posloupnost $\{c\}$ je omezená.

Definice 2.2.2. *Posloupnost a se nazývá*

- **rostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,
- **klesající** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,
- **nerostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
- **neklesající** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.

Společný název pro všechny tyto druhy posloupností: **posloupnosti monotonní** a pro první dva druhy: **posloupnosti ryze monotonní**.

Definice 2.2.3. *Operace s posloupnostmi jsou definovány takto:*

- **násobení reálným číslem c :** $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$;
- **aritmetické operace** (součet, rozdíl, součin, podíl): $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$, $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n\} / \{b_n\} = \{a_n / b_n\}$, (pro $b_n \neq 0$);
- **opačná posloupnost** k $\{a_n\}$ je $\{-a_n\}$;
- **reciproká posloupnost** k $\{a_n\}$ je $\{1/a_n\}$ (pro $a_n \neq 0$).

2.3 Limita posloupnosti

Definice 2.3.1. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu** $a \Leftrightarrow$

$$\forall U(a) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a).$$

Je-li $a \in \mathbb{R}$, nazývá se a **vlastní limita** a posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá **konvergentní**, pokud $a = \pm\infty$, nazývá se **nevlastní limita**. Neexistuje-li vlastní limita, nazývá se posloupnost $\{a_n\}$ **divergentní**.

Zápisy: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$; $\lim a_n = a$; $a_n \rightarrow a$ pro $n \rightarrow +\infty$.

Posloupnost tedy buď konverguje nebo diverguje. V tomto druhém případě buď diverguje k $+\infty$ nebo k $-\infty$ nebo *osciluje* (tj. nemá limitu vlastní ani nevlastní).

Např. posloupnost $\{\frac{n}{n+1}\}$ je konvergentní, má limitu 1, stacionární posloupnost $\{c\}$ je konvergentní a má limitu c , posloupnost $\{\frac{n}{100}\}$ je divergentní, má nevlastní limitu $+\infty$, posloupnost $\{q^n\}$ je pro $q \leq -1$ divergentní, nemá limitu (osciluje).

Definice 2.3.2. Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow V(n))$$

je pravdivý, pak říkáme, že $V(n)$ platí **pro skoro všechna** n .

Pomocí tohoto vyjádření lze vyjádřit definici limity posloupnosti např. takto:

Definice 2.3.3. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $a \Leftrightarrow$ v každém okolí $U(a)$ leží skoro všechny členy této posloupnosti.

Věty o limitách:

Věta 2.3.4. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz (sporem). Kdyby existovaly dvě limity a, b , pak by existovala disjunktní okolí $U(a), U(b)$ tak, že pro skoro všechna n by mělo platit současně $a_n \in U(a), a_n \in U(b)$, což je spor. $\square$

Věta 2.3.5. Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu, pak každá posloupnost $\{b_n\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu.

Důkaz. Označme tuto limitu a ; pak $\forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též $b_{k_n} = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m . $\square$

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

- 1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a
- 2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.
 - Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.
 - Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věta 2.3.6. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Označme limitu a ; zvolme $\varepsilon = 1$. Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná.

$\forall n \in \mathbb{N}$ pak platí $a \geq \min \{ \min M, a - 1 \}$, $a \leq \max \{ \max M, a + 1 \}$. □

Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní. Větší hloubku pohledu do vztahu mezi omezeností a konvergencí dává následující věta.

Věta 2.3.7 (Bolzano–Weierstrassova). *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Princip důkazu. (Bolzanova metoda půlení intervalů): Je dána posloupnost $\{a_n\}$; ježto je omezená, $\exists \langle K_1, L_1 \rangle$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \langle K_1, L_1 \rangle$.

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, nechť v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, atd.
- Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

□

Věta 2.3.8. *Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.*

Princip důkazu. Mějme danu posloupnost $\{a_n\}$; z omezenosti množiny $M = \{a_1, a_1, \dots\}$ plyne existence vlastního suprema $a = \sup M$. Ze druhé vlastnosti suprema plyne, že v libovolném levém okolí $U(a-)$ leží alespoň jedno a_n , takže vzhledem k monotónnosti $\{a_n\}$ leží v $U(a-)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$. $\square$

Věta 2.3.9 (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu). *Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v $\mathbb{R}^*$ smysl:*

$$1) \lim(a_n + b_n) = a + b, \lim(a_n - b_n) = a - b,$$

$$2) \lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b,$$

$$3) \text{ pro } b_n \neq 0, b \neq 0 \text{ je } \lim(a_n/b_n) = a/b,$$

$$4) \lim |a_n| = |a|.$$

Důkaz. Ukázka pro součet, kde a, b jsou vlastní limity:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \begin{array}{l} : n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon/2), \\ : n \geq n_2 \Rightarrow b_n \in U(b, \varepsilon/2). \end{array}$$

$$\text{Nechť } n_0 = \max\{n_1, n_2\} \text{ a } n \geq n_0. \text{ Pak } \begin{array}{l} a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2, \\ b - \varepsilon/2 < b_n < b + \varepsilon/2. \end{array}$$

Po sečtení obou nerovností máme $(a_n + b_n) \in U(a + b, \varepsilon)$. $\square$

Úloha 2.3.10. *Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a $b = +\infty$.*

Věta 2.3.11 (limita nerovnosti). *Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro nekonečně mnoho n platí $a_n \leq b_n$. Pak $a \leq b$.*

Důkaz sporem. Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a) \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. $\square$

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

Věta 2.3.12 (věta o třech limitách). *Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ a nechť pro skoro všechna n je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak $\lim c_n = a$.*

Princip důkazu. Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. $\square$

Pro nevlastní limity má věta o třech limitách (zvaná též věta o třech posloupnostech) speciální tvar. Je-li totiž $\lim a_n = +\infty$, lze brát za b_n posloupnost $\{+\infty\}$, proto z nerovnosti $a_n \leq c_n$ plyne $\lim c_n = +\infty$. Podobně lze větu o třech limitách upravit pro nevlastní limitu $-\infty$.

2.4 Nulové posloupnosti

Jsou to posloupnosti, kde $\lim a_n = 0$. Nulové posloupnosti fakticky nejsou jen zvláštním případem konvergentních posloupností, ale i naopak, konvergenci bychom mohli definovat užitím nulových posloupností podle věty:

Věta 2.4.1.

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow (a_n - a) \rightarrow 0.$$

Uvádíme některé věty, které mají vztah k nulovým posloupnostem.

Věta 2.4.2. *Jestliže $a_n \rightarrow a$, pak $|a_n| \rightarrow |a|$.*

Tato věta neplatí pro $a \neq 0$ naopak, ale pro $a = 0$ ano.

Věta 2.4.3. *Jestliže $|a_n| \rightarrow +\infty$, je $1/a_n$ posloupnost nulová.*

Jestliže jmenovatel zlomku konverguje k nule, je situace složitější:

Věta 2.4.4. *Je-li $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n > 0, a_n \rightarrow 0$, pak $1/a_n \rightarrow +\infty$,
 $a_n < 0, a_n \rightarrow 0$, pak $1/a_n \rightarrow -\infty$,
 $a_n \neq 0, a_n \rightarrow 0$, pak $1/|a_n| \rightarrow \infty$.*

Nulových posloupností se s výhodou využívá při výpočtech limit.

Úlohy:

2.4.1. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 + n}{4n^2 + 5}$.

2.4.2. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 \cdot 2^{2n} + 5 \cdot 2^n - 4}{2^{2n+1} - 2^n + 15}$.

2.4.3. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n + 150}{n^2 - 0,25}$.

2.4.4. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 8n}{9n^2 + 10}$.

2.5 Posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická

Někdy se pro uspořádané n -tice používá název *konečné posloupnosti*, který zčásti navozuje použití posloupností v praxi. V praxi je mnoho situací, kdy známe několik prvních členů $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ nějaké posloupnosti a pomocí této znalosti chceme zjistit, zkonstruovat nebo předpovědět její další člen a_{n+1} . Může jít o posloupnost peněžních částek, (časovou) posloupnost údajů o objemu výroby,

posloupnost časových termínů nebo intervalů ad. Problémem je, *jak* určit další člen (nebo alespoň jeho přibližnou hodnotu) ze znalosti předchozích. Může jít o nalezení vzorce pro n -tý člen, rekurentního pravidla nebo i o jiný postup.

Zvláštní pozornosti si zaslouží posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická, které se v praxi vyskytují poměrně často.

Aritmetická posloupnost

je (definována jako) posloupnost, která je dána svým prvním členem a_1 , konstantní diferencí d a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d.$$

Aritmetickou posloupnost lze rovněž definovat jako posloupnost, u níž rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

(Dokazuje se jednoduše např. matematickou indukcí). Vidíme, že aritmetická posloupnost má pro $d > 0$ limitu $+\infty$, pro $d < 0$ limitu $-\infty$.

Úloha 2.5.1. *V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně $a_1 = 325$ tisíc Kč, $a_2 = 354$ tisíc Kč a $a_3 = 383$ tisíc Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci?*

Řešení. Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tisíc Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tisíc Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tisíc Kč. (Samozřejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.) $\square$

Praktický význam může mít i součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti. Vzorec pro s_n lze odvodit např. takto: Vyjádříme s_n dvěma způsoby:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n - 1)d), \\ s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n - 1)d). \end{aligned}$$

Po sečtení máme

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n), \quad \text{takže} \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Úloha 2.5.2. *Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour?*

Řešení. Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11 \cdot (-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6 \cdot (26 + 15) = 246$ rour. $\square$

Geometrická posloupnost

je (definována jako) posloupnost, která je dána svým 1. členem a_1 , konstantním kvocientem $q \neq 0$ a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Geometrickou posloupnost lze tedy rovněž definovat jako posloupnost, u níž podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

(Dokazuje se jednoduše například matematickou indukcí).

Úloha 2.5.3. *V prvním měsíci roku činil obrat 300 000 Kč a v každém dalším měsíci byl o 5% větší než v měsíci předchozím. Určete předpokládaný listopadový obrat.*

Řešení. Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 300\,000$, $q = 1,05$, $n = 11$. Pak

$$a_{11} = 300\,000 \cdot 1,05^{10} \approx 300\,000 \cdot 1,629 = 489\,000 \text{ Kč}.$$

Viz poznámku za úlohou 2.5.1. □

Je-li $a_1 > 0$, pak geometrická posloupnost $\{a_1 \cdot q^{n-1}\}$ má limitu 0 (pro $|q| < 1$) nebo a_1 (pro $q = 1$) nebo $+\infty$ (pro $q > 1$) a nebo nemá limitu (pro $q < -1$).

Praktický význam může mít opět součet prvních n členů geometrické posloupnosti (tj. n -tý částečný součet geometrické řady).

Vzorec pro s_n lze odvodit takto: Vyjádříme s_n a $q \cdot s_n$:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}, \\ q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n. \end{aligned}$$

Po odečtení je $s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$, takže

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{tj. též} \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Úloha 2.5.4. *Vynálezce šachové hry požadoval podle pověsti odměnu za každé ze 64 polí šachovnice takto: za 1. pole jedno obilní zrnko, za 2. pole 2 zrna, za 3. pole 4 zrna, atd., za každé další vždy dvojnásobek. Kolik zrněk obilí měl dostat?*

Řešení. Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$. Proto

$$s_{64} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1,845 \cdot 10^{19}$$

a to je více obilí, než se kdy na Zemi urodilo. □

2.6 Některé významné limity

Věta 2.6.1. $\forall a > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

Princip důkazu. Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, tedy $u_n > 0$. Podle Bernoulli-ovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud $0 < u_n < \frac{a-1}{n}$ a podle věty o třech limitách je $u_n \rightarrow 0$. Pro $a < 1$ použijeme předchozí výsledek na číslo $\frac{1}{a}$, pro $a = 1$ je výsledek zřejmý. $\square$

Podobně lze užitím vhodných odhadů odvodit následující limity:

Věta 2.6.2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Věta 2.6.3. $\forall a > 1, \forall k > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty.$

(Říkáme, že exponenciála a^n roste $k + \infty$ rychleji než mocnina n^k .)

Úloha 2.6.4. Dokažte, že $\forall a > 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$

Řešení. Pro $\forall \varepsilon > 0$ je $a^\varepsilon > 1$, takže pro skoro všechna n platí $1 < \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$, odkud po zlogaritmování nerovnosti při základu a plyne uvedené tvrzení. $\square$

Úloha 2.6.5. Vypočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!}$, kde $q > 0$.

Řešení. Pro $q \leq 1$ je tato limita rovna 0. Pro $q > 1$ má čitatel i jmenovatel limitu $+\infty$, takže nelze použít větu o limitě podílu. Uvedený výraz označme a_n ; pak

$$(*) \quad a_{n+1} = \frac{q}{n+1} a_n,$$

proto pro skoro všechna n je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a zdola omezená (nulou), takže má limitu; označme ji a . Přejdeme-li v rovnosti (*) k limitě, máme $a = 0$. Říkáme, že faktoriál roste $k + \infty$ rychleji než exponenciála q^n . $\square$

Úloha 2.6.6. Ukažte, že každé iracionální číslo je limitou neklesající posloupnosti racionálních čísel; najděte tyto posloupnosti pro $r = \pi$, $s = \sqrt{2}$.

Řešení. Lze uvažovat například posloupnost dolních desetinných aproximací. $\square$

Poznámka 2.6.7. Kromě číselných posloupností pracujeme v matematické analýze i s dalšími typy posloupností; uvažují se třeba posloupnosti množin (např. intervalů), posloupnosti funkcí, ad. Definice těchto posloupností vytvoříme podle stejného schématu. Např. posloupnost funkcí definujeme jako zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny všech funkcí. Pracujeme-li s jinými posloupnostmi než s posloupnostmi číselnými, je třeba dbát na korektnost definice posloupnosti, případně její limity.

2.7 Číslo e

Funkce $y = e^x$ a funkce $y = \ln x (= \log_e x)$ patří k nejdůležitějším funkcím v matematické analýze; v obou případech je základem Eulerovo číslo e .

Číslo e je definováno jako limita posloupnosti $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$. Abychom tuto definici mohli považovat za korektní, je třeba dokázat, že uvedená posloupnost je konvergentní; její členy označujeme dále a_n . Důkaz existence limity posloupnosti $\{a_n\}$ lze provést ve dvou krocích:

1. dokážeme, že tato posloupnost je rostoucí,
2. dokážeme, že je shora omezená.

Existence konečné limity pak plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti.

ad 1) Podle binomické věty je

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}$$

První dva členy součtu na pravé straně jsou rovny 1, pro každý další člen provedeme úpravu

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Pro posloupnost $\{a_n\}$ tak platí, že každý její člen a_n je součtem $n+1$ kladných výrazů, v nichž jsou činitelé tvaru $\left(1 - \frac{j}{n} \right)$. Jestliže nyní přejdeme

od n k $n+1$, je a_{n+1} součtem $n+2$ výrazů s činiteli tvaru $\left(1 - \frac{j}{n+1} \right)$.

Jelikož $\left(1 - \frac{j}{n+1} \right) > \left(1 - \frac{j}{n} \right)$ a navíc v a_{n+1} je o jeden kladný sčítanec víc, je $a_{n+1} > a_n$, posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

ad 2) Ve výrazu pro a_n nahradíme všechny „závorky“ $\left(1 - \frac{j}{n+1} \right)$ číslem 1, takže platí

$$a_n < b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Závěr: Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existuje limita posloupnosti $\{a_n\}$; nazýváme ji Eulerovo číslo a označujeme ji e ; z předchozího plyne, že $2 < e < 3$.

Výpočet čísla e

Hodnotu čísla e lze vcelku snadno určit jako součet číselné řady. Vidíme, že pro konstantní $k < n$ platí

$$a_n > 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}.$$

Odsud pro $n \rightarrow +\infty$ máme $e \geq b_k$, takže platí $a_n < b_n \leq e$; podle věty o třech limitách pak je $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = e$. Přitom b_n je podle své definice tzv. n -tým částečným součtem řady, takže

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = 2,718\,281\,828\,459\,0 \dots$$

Tato řada „dosti rychle“ konverguje a má jednoduchý algoritmus výpočtu členů, takže výpočet hodnoty čísla e na zadaný počet desetinných míst lze provést vcelku rychle.

— * —

Kapitola 3

Pojem funkce

3.1 Definice funkce

Písmeno x nazýváme *proměnná* na (číselné) množině $M \Leftrightarrow$ může být ztotožněno s libovolným prvkem množiny M . Pojem funkce navazuje na pojem *binární relace* a na pojem *zobrazení*, jejichž základní znalost zde předpokládáme.

Definice 3.1.1. Každé zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (tj. zobrazení v $\mathbb{R}$) nazýváme **reálná funkce** jedné reálné proměnné. Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $y = f(x)$; x se nazývá **nezávisle proměnná**, y **závisle proměnná**; říkáme též, že y je *funkcí* x .

Chceme-li vyjádřit, že y je (zatím nepojmenovanou) funkcí x , zapíšeme $y = y(x)$. Vedle vyjádření „funkce f “ se tolerují též zápisy „funkce $f(x)$ “ (chceme-li zdůraznit označení *nezávisle proměnné*) nebo „funkce $y = f(x)$ “ (chceme-li zdůraznit označení *obou proměnných*).

S pojmem funkce jsou spjaté dvě významné množiny:

definiční obor funkce:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \exists(x, y) \in f\},$$

funkční obor (obor hodnot):

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists(x, y) \in f\}.$$

Hodnotu proměnné vyjadřujeme číslem nebo symbolem proměnné s indexem. Například v bodě $x_0 = 2$ má funkce $y = 3x$ hodnotu $y_0 = 6$. Je-li $M \subset D(f)$, je $f(M)$ označení pro $\{f(x); x \in M\}$. Je tedy $H(f) = f(D(f))$. Naopak, je-li $B \subset H(f)$, pak definujeme $f^{-1}(B)$ jako množinu $\{x \in D(f); f(x) \in B\}$.

Grafem funkce f v kartézských souřadnicích rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, pro jejichž souřadnice x, y platí $(x, y) \in f$. Grafické znázornění funkce často svou názorností pomáhá k pochopení vlastností a průběhu funkce;

pro některé funkce však graf nedovedeme sestavit, například pro Dirichletovu funkci. Grafy funkcí lze uvažovat také v polární souřadnicové soustavě, kdy ovšem dostáváme jiné křivky. Například grafem přímé úměrnosti $y = kx$ v kartézských souřadnicích je přímka, grafem téže funkce $\rho = k\varphi$ v polárních souřadnicích je Archimedova spirála. Neřekneme-li jinak, uvažujeme vždy graf v kartézských souřadnicích.

Způsoby definice funkce:

Funkci f lze vyjádřit takto: $f = \{(x, y) \in D(f) \times \mathbb{R}; V(x, y)\}$. Zadat (definovat) funkci f tedy znamená udát její definiční obor $D(f)$ a jisté pravidlo $V(x, y)$, jehož oborem pravdivosti je f a které stanovuje, jak k zadanému $x \in D(f)$ najít (vypočítat) hodnotu $f(x)$. Podle toho, jak je toto pravidlo formulováno, rozlišujeme tato zadání funkce:

a) (Explicitní) *rovnici*, například

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2 - 1\},$$

nebo jednoduše $f : y = x^2 - 1$.

U funkce definované rovnicí, není-li řečeno jinak, bereme za $D(f)$ nejširší množinu, pro niž má rovnice smysl. Je-li předepsán jiný definiční obor, musíme jej uvést, například

$$f : y = x - 1, x \in \mathbb{N}.$$

b) *Tabulkou*, například

x	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3	8

Také zadání funkce *výčtem prvků* lze považovat za zadání tabulkou, jde jen o jinou formu zápisu; například

$$f = \{(-2; 3), (-1; 0), (0; -1), (1; 0), (2; 3), (3; 8)\}.$$

Tabulkou či výčtem prvků bývají zadávány funkce, jejichž funkční hodnoty byly získány měřením nebo kde jsou tyto hodnoty důležitější než příslušné pravidlo (například daňové tabulky, bodovací sportovní tabulky). Tabelaci funkce však používáme i u funkcí definovaných jinak, pokud může tabulka posloužit lépe k přehlednosti nebo jiné praktické potřebě (například tabulka cen v závislosti na hmotnosti zboží).

- c) *Grafem* (zpravidla kartézským). Další druhy grafů — šachovnicový, uzlový nebo graf v polární soustavě souřadnic — bývají méně časté.

Grafem bývají často vyjadřovány ty funkce, jejichž průběh je zapisován v přístrojích graficky na papírová média nebo na displeji.

- d) *Po částech*; tak je definována například Dirichletova funkce $\chi(x)$. Podobným způsobem je definována funkce

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Rovnice $y = \chi(x)$ a $y = \operatorname{sgn} x$ však již považujeme za rovnice funkcí.

- e) *Implicitní rovnici*, například

$$x^2 + y^2 = 25;$$

takto se definují implicitní funkce $y = y(x)$, s nimiž je technika práce někdy poněkud odlišná. Zejména bývá vymezena množina $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pro niž má platit $(x, y) \in M$. Například u výše uvedené rovnice může být zadáno, že M je polorovina $y \geq 0$.

- f) *Parametricky*: Parametrické vyjádření je tvaru

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in J,$$

kde φ, ψ jsou funkce definované na množině (intervalu) J , přičemž funkce $y = f(x)$ je definována vztahem

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \exists t \in J \text{ tak, že } x = \varphi(t) \wedge y = \psi(t)\}.$$

Například $x = 4 \cos t, y = 4 \sin t, t \in \langle 0, \pi \rangle$. Parametrického vyjádření používáme ponejvíce při vyšetřování různých (například technických) křivek.

- g) *Jinak*:

Někdy je pro výrokovou formu $V(x, y)$ dána jen slovní formulace. Například výroková forma $V(x, y) = „y \text{ je největší celé číslo, které není větší než } x“$ definuje funkci $[.]$ „celá část“ (například $[3, 8] = 3, [-1] = -1, [-6, 7] = -6$; tím se tato funkce odlišuje od „počítačové“ $\operatorname{INT}(\cdot)$). Ostatně i goniometrické funkce sinus a kosinus jsou pomocí jednotkové kružnice definovány tímto způsobem (avšak $y = \sin x, y = \cos x$, jsou již *rovnice* těchto funkcí).

Výroková forma $V(x, y)$ je tedy jisté „pravidlo“ („předpis“), které ke každému číslu x z jisté množiny $D \subset \mathbb{R}$ přiřazuje právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$. Pojem funkce se někdy (z důvodů didaktických) ztotožňuje přímo s tímto

pravidlem, podle něž rozhodujeme, zda $(x, y) \in f$, nebo s jehož pomocí k danému x počítáme příslušnou funkční hodnotu $f(x)$. I při našem pojetí funkce však toto pravidlo chápeme jako atribut a druhou stránku pojmu funkce. Pro toto pravidlo $V(x, y)$ tak proto lze používat stejné označení f jako pro funkci a zkráceně říkat a psát například „funkce $f : y = x^2 - 1$ “ nebo prostě „funkce $y = x^2 - 1$ “.

3.2 Řešení rovnic a nerovnic

Při vyšetřování vlastností (průběhu) funkcí se setkáváme s několika typickými úlohami, jež vedou na řešení rovnic a nerovnic resp. jejich soustav. Některé dále uvádíme.

a) *Stanovení definičního oboru*

Je-li funkce f určena rovnicí a její definiční obor není zadán, je třeba zjistit $D(f)$ jako množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž je daná rovnice definována. Úlohy na definiční obor zpravidla vedou na řešení nerovnic nebo soustav nerovnic.

Úloha 3.2.1. *Určete definiční obor funkce $y = \frac{\ln(4 - x^2)}{1 - x}$.*

Řešení. Čitatel je definován pro $4 - x^2 > 0$, tj. na množině $M_1 = (-2, 2)$, jmenovatel je definován pro $1 - x \neq 0$, tj. na množině $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pravá strana rovnice funkce je tedy definována na množině $D(f) = M_1 \cap M_2 = (-2, 1) \cup (1, 2)$. $\square$

b) *Zjištění nulových bodů funkce*

Tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce: při hledání průsečíků grafu funkce s osou x zjišťujeme nulové body funkce f (a dále též při výpočtu extrémů funkcí zjišťujeme nulové body 1. derivace, tj. stacionární body, při zkoumání inflexe zjišťujeme zpravidla nulové body 2. derivace funkce).

Úloha 3.2.2. *Určete nulové body funkce $y = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$.*

Řešení. Máme $y = e^{-x}(\cos x - \sin x)$. Hledáme body, v nichž $y = 0$, tj. řešíme goniometrickou rovnici $\cos x - \sin x = 0$, jež je ekvivalentní s rovnicí $\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x = 0$ (neboť $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$) a tedy i s rovnicí $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0$. Nulové body dané funkce jsou tedy $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$. $\square$

c) *Zjištění intervalů, kde je funkce kladná (záporná).*

Také tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce (při zjišťování intervalů monotónnosti řešíme nerovnice typu $y' > 0$, při zjišťování intervalů konvexnosti a konkávnosti řešíme nerovnice typu $y'' > 0$).

Úloha 3.2.3. Určete intervaly, kde je funkce $y = (6x - x^2)e^{-x}$ kladná a kde je záporná.

Řešení. Rovnici upravíme na tvar $y = (6 - x)x e^{-x}$. Pro $x > 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. na intervalu $(0, 6)$ je daná funkce kladná, pro $x > 0 \wedge 6 - x < 0$, tj. na intervalu $(6, +\infty)$ je funkce záporná, pro $x < 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. též na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce záporná. $\square$

d) **Zjištění průsečíků grafů dvou funkcí**

Úloha 3.2.4. Jsou dány funkce $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$. Stanovte průsečíky grafů těchto funkcí.

Řešení. Řešíme rovnici

$$x^2 - 1 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, x_2 = 2,$$

takže průsečíky jsou body $A[-1; 0]$ a $B[2; 3]$. $\square$

e) **Porovnání hodnot dvou funkcí**

Úloha 3.2.5. Jsou dány funkce $f_1 : y = x^2$, $f_2 : y = 4 - 2x - x^2$. Porovnejte hodnoty těchto funkcí.

Řešení.

$$f_1(x) < f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 4 - 2x - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 < 0,$$

tedy na intervalu $(-2, 1)$; podobně $f_1(x) > f_2(x)$ na množině $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ a obě funkce mají stejné funkční hodnoty v bodech -2 a 1 . $\square$

3.3 Vlastnosti funkcí

Omezenost

Definice 3.3.1. Funkce f se nazývá

(*shora, zdola*) **omezená na množině** $M \subset D(f)$ $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina $f(M)$;

nazývá se (*shora, zdola*) **omezená** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina $H(f)$.

Například funkce $y = x^2$ je omezená zdola, není omezená shora a není omezená, ale na množině $\langle -10, 10 \rangle$ je omezená.

Je-li funkce f omezená na M , existují $K, L \in \mathbb{R}$ tak, že platí $f(M) \subset \langle K, L \rangle$. Je-li funkce omezená, je omezená na každé množině $M \subset D(f)$.

Supremum množiny $f(M)$ nazýváme *supremum funkce* na množině M a označujeme $\sup_{x \in M} f(x)$; podobně $\inf_{x \in M} f(x)$.

Má-li množina $f(M)$ největší prvek, pak toto číslo nazýváme **největší hodnota funkce** f na množině M nebo též *globální (absolutní) maximum* funkce f na množině M ; značí se $\max_{x \in M} f(x)$, podobně $\min_{x \in M} f(x)$.

Pokud $M = D(f)$, pak označení $x \in M$ vynecháváme.

Monotónnost

Definice 3.3.2. Funkce f se nazývá **rostoucí** (**klesající**, **neklesající**, **nerostoucí**) na množině $M \subset D(f) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M$ platí:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2), f(x_1) \leq f(x_2), f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Funkci f rostoucí na $D(f)$ nazýváme **rostoucí** (tj. neuvádíme, kde je rostoucí), podobně funkce **klesající**, **neklesající**, **nerostoucí**.

Pro funkce rostoucí a funkce klesající používáme souhrnný název funkce **ryze monotónní**; souhrnný název pro všechny čtyři uvedené druhy funkcí je funkce **monotónní**.

Například funkce $y = 1/x$ je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a je klesající i na intervalu $(0, +\infty)$, ale není klesající (tj. není klesající na $D(f)$).

Kromě monotónnosti na množině, což je globální vlastnost funkce, se zavádí i pojem monotónnosti v bodě jako vlastnost lokální. Uvedeme definici jen pro funkci rostoucí, další tři případy monotónnosti se formulují analogicky.

Definice 3.3.3. Funkce f se nazývá **rostoucí v bodě** $x_0 \in D(f) \Leftrightarrow \exists U(x_0) \subset D(f)$ tak, že $\forall x \in P(x_0-) \text{ platí } f(x) < f(x_0)$ a $\forall x \in P(x_0+) \text{ platí } f(x_0) < f(x)$.

Úloha 3.3.4. Podobně definujte funkci klesající (nerostoucí, neklesající) v bodě x_0 a dále funkci rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající v bodě x_0 zleva resp. zprava. (Tuto vlastnost vyšetřujeme zejména v krajních bodech intervalů.)

Věta 3.3.5 (vztah monotónnosti v bodě a na intervalu). Funkce f definovaná na intervalu (a, b) je na tomto intervalu rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající) $\Leftrightarrow$ má takovou vlastnost v každém bodě tohoto intervalu.

Princip důkazu. (pro f rostoucí):

- 1) Nechť je f rostoucí na (a, b) . Zvolíme libovolný bod $x_0 \in (a, b)$ a jeho okolí $P(x_0) \subset (a, b)$. Je-li $x_1 \in P(x_0-)$, $x_2 \in P(x_0+)$, je $x_1 < x_0 < x_2$ a monotónnost v bodě x_0 plyne z monotónnosti na (a, b) .

- 2) Nechť f je rostoucí v každém bodě intervalu (a, b) . Zvolíme dva body $x_1 < x_2$ a dokážeme, že $f(x_1) < f(x_2)$. Pro každé x' z jistého $P(x_1)$ je $f(x_1) < f(x')$; nechť m je supremum množiny M všech takových x' . Kdyby $m < b$, bylo by $m \in M$, neboť i v m je f rostoucí a podle 2. vlastnosti suprema $\forall P(m-)$ obsahuje bod $x' \in M$, tedy $f(x_1) < f(x') < f(m)$. Současně by existovalo pravé okolí $P(m+) \subset (a, b)$ tak, že by pro všechny jeho body x'' platilo $f(x'') > f(m) > f(x_1)$, tj. $x'' \in M$, $x'' > m$ a to je spor s 1. vlastností suprema. Proto $m = b$, takže $x_2 \in M$ a $f(x_1) < f(x_2)$.

□

Například funkce $y = \operatorname{sgn} x$ je rostoucí v bodě 0.

Parita

Definice 3.3.6. Funkce f se nazývá **sudá (lichá)** $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Příklad sudé funkce: $y = \cos x$, příklad liché funkce: $y = \sin x$.

Úloha 3.3.7. Dokažte, že funkce $y = 3x^2 - 5$, $y = |x|$ a Dirichletova funkce χ jsou sudé a že $y = 2x^3 + x$, $y = x|x|$ a $y = \operatorname{sgn} x$ jsou funkce liché.

Pro polynomické funkce platí: jsou-li v polynomu jen členy se sudými exponenty, je daná funkce sudá, jsou-li zde jen členy s lichými exponenty, je funkce lichá.

Kartézský graf sudé funkce je souměrný podle osy y , graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Periodičnost

Definice 3.3.8. Funkce f se nazývá **periodická** $\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$1) x \in D(f) \Rightarrow (x \pm p) \in D(f),$$

$$2) \forall x \in D(f) : f(x \pm p) = f(x).$$

Číslo p se nazývá **perioda** funkce f .

Je-li p perioda funkce f , je $\forall k \in \mathbb{Z}$ také číslo kp periodou funkce f . Nejmenší kladná perioda p_0 , pokud existuje, se nazývá *primitivní* (též *základní*) *perioda* funkce f . Konstantní funkci zpravidla mezi periodické funkce nepočítáme.

Příklady periodických funkcí: $y = \sin x$ ($p_0 = 2\pi$), $y = \operatorname{tg} x$ ($p_0 = \pi$).

Úloha 3.3.9. Dokažte, že funkce $y = x - [x]$ je periodická s periodou $p_0 = 1$ a že Dirichletova funkce χ je periodická a periodou je každé racionální číslo různé od nuly; zde p_0 neexistuje.

Někdy je užitečné chápat periodičnost jen „jednostranně“, například „periodičnost vpravo“, tj. tak, že v definici místo $(x \pm p)$ uvažujeme jen $(x + p)$, kde $p > 0$.

3.4 Operace s funkcemi

- **Rovnost funkcí:**

$$f = g \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} : ((x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in g).$$

Obráceně, je-li $f \neq g$, znamená to, že buď $D(f) \neq D(g)$ nebo $\exists x' \in D(f) \cap D(g)$ tak, že $f(x') \neq g(x')$.

- **Částečné uspořádání:** Je-li F množina funkcí a jsou-li všechny funkce definovány na M , definuje se na F částečné uspořádání nerovností $f < g$.

Úloha 3.4.1. Definujte nerovnost $f < g$ na M a objasněte její geometrický význam.

Například funkce $y = |x|$ a funkce $y = x + 1$ nejsou srovnatelné na $\mathbb{R}$, ale na $(0, +\infty)$ ano.

- **Zúžení (restrikce) funkce:** Mějme funkci f ; její restrikci nazveme funkci g takovou, že $D(g) \subset D(f)$ a na $D(g)$ je $g(x) = f(x)$.
- **Algebraické operace:** $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ se definuje

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
4. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ (pokud $g(x) \neq 0$).

- **Skládání funkcí:** Mějme funkce f, φ a nechť $H(\varphi) \subset D(f)$. Pak složenou funkci $F = f \circ \varphi$ definujeme takto: $(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$, přičemž funkci f nazýváme *vnější funkce* a funkci φ *funkce vnitřní*.

Například ve složené funkci $y = \sin 2x$ je vnější funkce $y = \sin u$, vnitřní funkce $u = 2x$. Funkce může být složena i vícekrát, například $y = e^{\sin(3x+1)}$.

Složenou funkci můžeme vytvořit substitucí proměnné. Máme-li například funkci $y = 1 - x$ a dosadíme $x = \sin t$, dostáváme složenou funkci $y = 1 - \sin t$. Zvláštním případem složené funkce je $|f|$. Vnější funkce je $y = |z|$, vnitřní funkce $z = f(x)$.

Úloha 3.4.2. Zobraďte funkci $y = |x^2 - 2x|$.

Funkce prostá

Definice 3.4.3. Funkce f se nazývá **prostá na** $M \subset D(f) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M$ platí: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

a nazývá se **prostá** $\Leftrightarrow$ je prostá na $D(f)$.

Množina M , na níž je funkce prostá, se nazývá jejím **oborem prostoty**.

Například funkce $y = x^2$ není prostá, ale je prostá třeba na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, který je jejím oborem prostoty.

Věta 3.4.4 (vztah prostoty a ryzí monotónnosti). Je-li funkce ryze monotónní na M , je prostá na M .

Důkaz. plyne z toho, že $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ a stejně i pro funkční hodnoty plyne z nerovností „<“, „>“ nerovnost „ $\neq$ “. $\square$

Obrácený vztah neplatí, existují prosté funkce, které nejsou monotónní, například funkce $y = 1/x$. Prostota funkce f je základním předpokladem pro to, aby inverzní relace f^{-1} byla zobrazením a tedy funkcí.

3.5 Funkce inverzní

Definice 3.5.1. Inverzní zobrazení f^{-1} k prosté funkci (na M) f nazýváme **inverzní funkcí**.

Je-li tedy funkce f prostá, pak k ní existuje funkce inverzní f^{-1} a platí

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1};$$

přitom

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f).$$

Je-li f prostá na M , pak inverzní funkce má $D(f^{-1}) = f(M)$, $H(f^{-1}) = M$. Na M platí $f^{-1}(f(x)) = x$ a na $f(M)$ platí $f(f^{-1}(x)) = x$.

Geometrický význam: Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$ (osy I. a III. kvadrantu).

Například funkce $f : y = x^2 - 1$ je prostá na $M = \langle 0, +\infty \rangle$, $f(M) = \langle -1, +\infty \rangle$. Inverzní funkce f^{-1} je definována na $\langle -1, +\infty \rangle$ a platí $x = y^2 - 1$ tj. $y = \sqrt{x+1}$. Pro $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ je $f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{(x^2 - 1) + 1} = \sqrt{x^2} = x$, pro $x \in \langle -1, +\infty \rangle$ je $f \circ f^{-1}(x) = (\sqrt{x+1})^2 - 1 = x$.

Funkce a funkce k nim inverzní tvoří dvojice funkcí navzájem inverzních, neboť $(f^{-1})^{-1} = f$. Existují i funkce inverzní samy k sobě; graf takové funkce je souměrný podle přímky $y = x$ (například funkce $y = 1/x$, $y = a - x$, $y = x$).

Některé vlastnosti funkcí se přenášejí na funkce inverzní.

Věta 3.5.2 (o monotónnosti inverzní funkce). *Je-li funkce f rostoucí (klesající), je funkce f^{-1} také rostoucí (klesající).*

Princip důkazu. Nechť funkce $y = f(x)$ je rostoucí. Je-li $y_1 < y_2$, pak nemůže platit $x_1 > x_2$, protože z toho by plynulo $y_1 > y_2$. $\square$

3.6 Rozšíření pojmu funkce

Pojem funkce se v matematice používá i v širším pojetí, zejména jako zobrazení z nějaké množiny M do množiny $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}$, případně i do jiné množiny.

- Je-li M množina uspořádaných n -tic $P = (x_1, \dots, x_n)$ reálných čísel, je funkce $y = f(P)$ reálnou *funkcí n proměnných*.
- Je-li M množina (systém) množin X , pak lze definovat různé *množinové funkce*; například:

- * Jsou-li množiny $X \in M$ konečné, definuje se množinová funkce n , kde $n(X)$ je *počet prvků* množiny X .

- * Jsou-li X křivky resp. rovinné obrazce resp. tělesa, definují se množinové funkce $s(X)$ (*délka křivky*) resp. $P(X)$ (*obsah – míra rovinného obrazce*) resp. $V(X)$ (*objem – míra tělesa*).

- Práce s texty.*

V souvislosti s počítači vznikla větší potřeba práce s texty; množinu všech textů označíme T . Příklady *textových konstant*: 'Praha', 'JAN HUS', '''. Apostrofy zde uvedené mají úlohu omezovačů, tj. nezapočítávají se do textu. První z uvedených konstant má tedy 5 znaků, druhá konstanta má 7 znaků (také mezera mezi slovy je znak) a třetí konstanta je tzv. prázdný text. Mezera je jedním ze znaků, takže například 'Praha' je jiný text než 'Praha∨' (tento text má 6 znaků; zde '∨' je značka mezery), tedy 'Praha' $\neq$ 'Praha∨'.

Jsou-li x, y *textové proměnné* na množině T , lze položit (dosadit) například $x := \text{'Praha'}$, $y := \text{'Zlín'}$; pak $x < y$ (tj. 'Praha' < 'Zlín'), neboť jde o *abecední uspořádání*. Nejběžnější operací s texty je *spojování textů*. Má-li například textová proměnná x hodnotu 'Praha∨' a proměnná z hodnotu '4', pak $x + z = \text{'Praha∨4'}$.

Na množině T se definuje funkce $\text{length}: T \rightarrow N_0$ (*délka textu*); například $\text{length}(\text{'Praha'}) = 5$, $\text{length}('') = 0$, pro $y := \text{'Zlín'}$ je $\text{length}(y) = 4$.

Také různá zobrazení do T jsou běžně nazývána *funkcemi*.

Funkce *backwards*: $T \rightarrow T$ (*text pozpátku*); například pro $x := \text{'Praha'}$ je $\text{backwards}(x) = \text{'aharP'}$.

Funkce Ucase: $T \rightarrow T$ (*velká abeceda*); například $\text{Ucase}(\text{'Praha'}) = \text{'PRAHA'}$.
Podobně Lcase (*malá abeceda*), $\text{Lcase}(\text{'Praha'}) = \text{'praha'}$

Funkce trim: $T \rightarrow T$ (*vynechávání mezer na konci textu*); například pro $x := \text{'Praha\ve}'$ je $\text{trim}(x) = \text{'Praha'}$.

Funkce left: $T \times N \rightarrow T$ (*text zleva*); například pro $x := \text{'Praha'}$, $y := 2$ je $\text{left}(x,y) = \text{'Pr'}$. Podobně funkce right (*text zprava*) by dala $\text{right}(x,y) = \text{'ha'}$.

Funkce mid: $T \times N \times N \rightarrow T$ (*text zevnitř*); pro $x := \text{'Praha'}$, $y := 3$, $z := 2$ máme $\text{mid}(x,y,z) = \text{'ah'}$.

V jednotlivých programovacích jazycích a softwarových systémech bývá definována řada standardních funkcí a další funkce si zpravidla může uživatel definovat podle potřeby.

— * —

Kapitola 4

Elementární funkce

4.1 Přehled elementárních funkcí

Jde o pojem spíše historický než matematický. Vymezuje se několik (*základních*) *elementárních funkcí* a z nich se pomocí konečného počtu algebraických operací a operací skládání vytvářejí další funkce, jež bývají v matematické literatuře někdy také nazývány *elementární funkce*.

Základní elementární funkce:

- funkce *konstantní* ($y = c$);
- funkce *mocninné* ($y = x^r$ pro libovolné $r \in R$, patří sem tedy i odmocniny a také například nepřímá úměrnost);
- *goniometrické* funkce ($y = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$) a funkce *cyklometrické* ($y = \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$);
- *exponenciální* funkce ($y = a^x, a > 0, a \neq 1$) a funkce *logaritmické* ($y = \log_a x$);
- *hyperbolické* funkce ($y = \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{coth} x$) a funkce *hyperbolometrické* ($y = \operatorname{argsh} x, \operatorname{argch} x, \operatorname{argth} x, \operatorname{argcoth} x$).

Algebraické funkce

je název pro elementární funkce, které vzniknou z funkcí konstantních a z funkce $f(x) = x$ užitím operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. Pokud nepoužijeme operaci odmocňování, dostaneme algebraické **funkce racionální**. Algebraické funkce, které nejsou racionální, nazýváme **iracionální**.

Zvláštní případy algebraických funkcí: například **celá racionální funkce** neboli funkce **polynomická** (algebraický polynom) a **lomená racionální funkce**, patří mezi nejvýznamnější funkce studované v matematice.

Elementární funkce, které nejsou algebraické, se obvykle nazývají **transcendentní**; ze základních elementárních funkcí mezi ně patří funkce exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické, ale též mocninná funkce s iracionálním exponentem.

Elementární funkce mají velmi rozmanité vlastnosti (například pokud jde o omezenost, monotónnost, paritu, periodičnost aj.) a proto společné vlastnosti lze formulovat jen na velmi obecné úrovni. (Uvidíme zejména, že elementární funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru a mají derivaci ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru. Derivací elementární funkce je opět elementární funkce. Naopak ovšem primitivní funkcí k funkci elementární nemusí být funkce elementární).

Příklady funkcí, které nejsou elementární:

Dirichletova funkce $\chi(x)$, funkce $\operatorname{sgn} x$, funkce $[.]$ „celá část“, funkce $\{.\}$ „lomená část“ definovaná vztahem $\{x\} = x - [x]$.

Úloha 4.1.1. *Znáznorněte graficky funkci $y = \{x\}$ a dokažte, že je periodická s periodou 1.*

Ani absolutní hodnota není považována za elementární funkci. Elementárními funkcemi nejsou ani jiné funkce definované „po částech“, jako například funkce

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ x^2 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

(Tuto funkci bychom ovšem mohli nazvat „po částech elementární“).

4.2 Algebraické funkce

Při popisu jednotlivých funkcí nebo druhů funkcí někdy použijeme i některé pojmy, které jsou obsahem až pozdějších kapitol, ale kde určitou úroveň jejich znalosti lze předpokládat, ježto jsou obsahem středoškolského učiva matematiky. Jde tedy o jakési rozšířené zopakování středoškolského učiva.

a) Mocniny s přirozeným a celým exponentem

Mocninu a^n pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme jako součin n činitelů a . Z této definice ihned plynou vlastnosti mocnin, zejména

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall r, s \in \mathbb{N} :$$

$$(1) \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s},$$

$$(2) \quad a^r : a^s = a^{r-s} \text{ (pokud } a \neq 0, r > s),$$

- (3) $(a^r)^s = a^{rs}$,
 (4) $(ab)^r = a^r b^r$,
 (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (pokud $b \neq 0$),
 (6) $a^r = b^r \Leftrightarrow a = b$ (pokud $a, b > 0$).

K tomu přidejme ještě vlastnosti vyjádřené nerovnostmi

- (7) $\forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$,
 (8) $\forall a > 1, r < s \Rightarrow a^r < a^s$; $\forall a \in (0, 1), r < s \Rightarrow a^r > a^s$.

Chceme-li rozšířit pojem mocniny rozšířením číselného oboru exponentu, přichází nejprve exponent 0. Mají-li zůstat v platnosti výše uvedené vlastnosti (1)–(5), je třeba podle (2) definovat

$$\forall a \neq 0; a^0 = 1.$$

Vlastnost (2) pak platí pro $r \geq s$ a u všech vlastností se musíme omezit na mocniny s nenulovým základem, neboť 0^0 není definována. Vlastnosti (6) a (7) ovšem pro $r = 0$ neplatí.

Dalším krokem je rozšíření pojmu mocnina pro exponent, jímž je celé číslo. Klíčovou vlastností je opět (2), podle níž se definuje (položíme-li $r = 0, s = k$)

$$\forall a \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}; \quad a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

Vlastnost (2) pak platí již bez omezení pro $r, s \in \mathbb{Z}$ a vlastnost (7) nabude tvaru

$$\begin{aligned} (7') \quad \forall r > 0, \forall a, b > 0 : \quad a^r < b^r &\Leftrightarrow a < b, \\ \forall r < 0, \forall a, b > 0 : \quad a^r > b^r &\Leftrightarrow a < b. \end{aligned}$$

b) Odmocniny

Definice 4.2.1. Pro každé přirozené číslo n definujeme n -tou odmocninu z nezáporného čísla a jako takové nezáporné číslo x , pro něž platí $x^n = a$.

Označení: $x = \sqrt[n]{a}$.

Podle definice tedy $(\sqrt[n]{a})^n = a$, například $(\sqrt{3})^2 = 3$.

Existence n -té odmocniny se zdá být zřejmá. Toto zdání podporují jednoduché příklady jako $\sqrt[3]{8} = 2$, neboť $2^3 = 8$. Jestliže však vyšetřujeme méně zřetelné případy, třeba $\sqrt[3]{\pi}$, je třeba si odpovědět na otázku, zda n -tá odmocnina pro každé $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ skutečně existuje a zda je to jediné číslo.

Věta 4.2.2 (o existenci a jednoznačnosti n -té odmocniny). $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ existuje právě jedno číslo $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, takové, že $x^n = a$.

Úloha 4.2.3. Zjednodušte roznásobením $U = (2\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$.

Úloha 4.2.4. Zjednodušte umocněním a usměrněním

$$V = \frac{(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})}.$$

K základním vlastnostem odmocnin patří:

Věta 4.2.5. $\forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0, \forall m, n, r \in \mathbb{N}$:

$$(1) (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},$$

$$(2) \sqrt[nr]{a^r} = \sqrt[n]{a}.$$

Důkaz.

ad (1) Pro levou a pravou stranu rovnosti platí:

$L = x^m$, kde podle definice $x^n = a$; po umocnění na m -tou máme $x^{mn} = a^m$.

$P = y$, kde podle definice je $y^n = a^m$. Je tedy $x^{mn} = y^n$ a z toho $x^m = y$,

takže $L = P$.

ad (2) $L = x$, kde $x^{nr} = a^r$, což dává $x^n = a$.

$P = y$, kde $y^n = a$. Tedy $x^n = y^n$ a z toho $x = y$,

tj. $L = P$.

□

c) Mocniny s racionálním exponentem

Chceme-li rozšířit pojem mocniny na exponent racionální, vyjdeme ze základní vlastnosti n -té odmocniny z čísla a : $x^n = a$. Tedy položíme $x = a^t$ a po umocnění na n -tou je $a = x^n = a^{tn}$, tedy $tn = 1$, $t = 1/n$. To vede k definici ($\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0$):

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

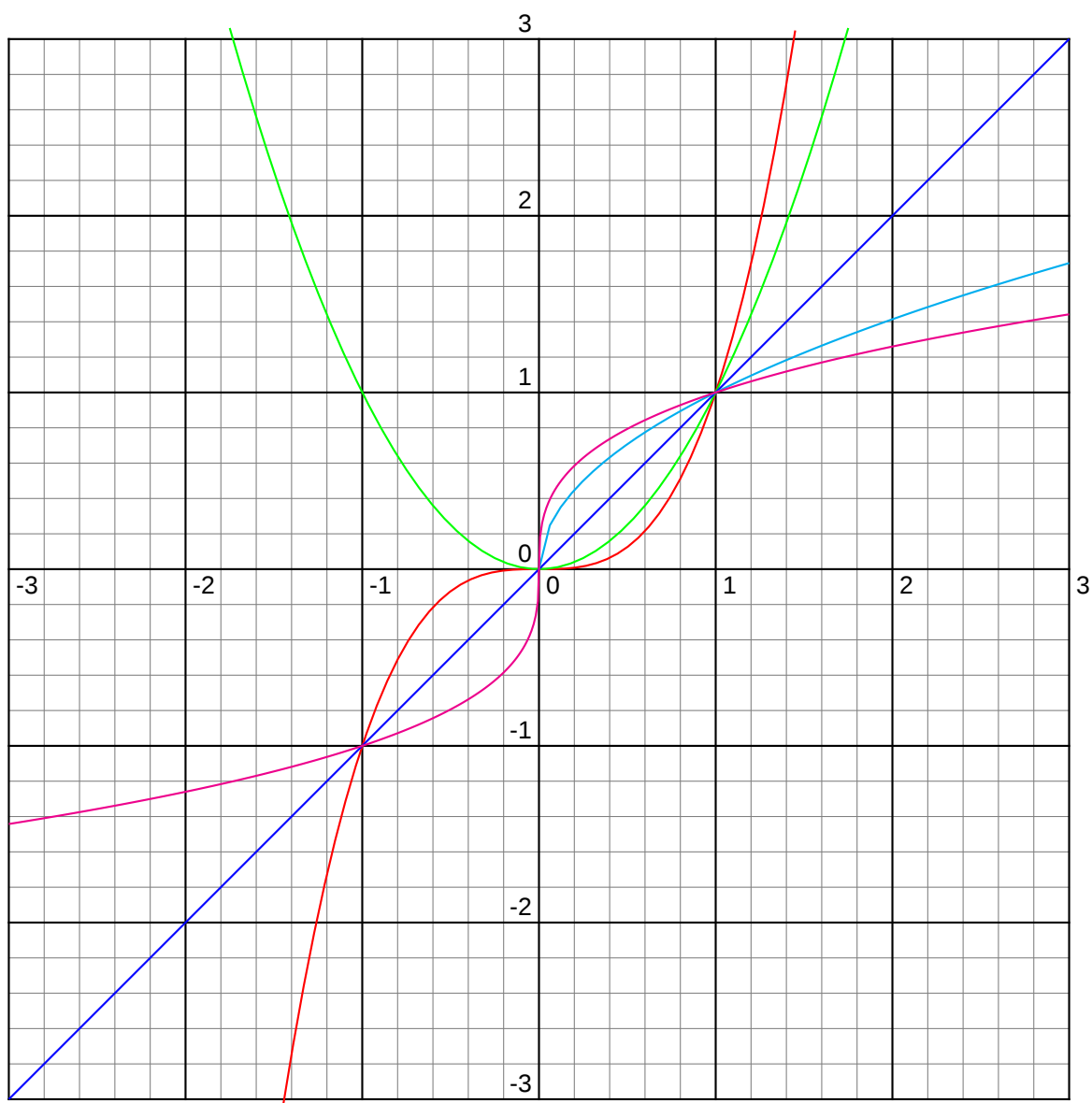
Vlastnosti mocnin zůstávají zachovány s tím, že musíme uvážit příslušné podmínky pro a, b, r, s .

Pojem mocniny lze rozšířit na libovolné reálné exponenty, ale mocnina s iracionálním exponentem již není algebraická funkce.

Definice 4.2.6. Necht' $a \in \mathbb{R}, a > 0, q \in \mathbb{Q}'$. Pak definujeme

$$a^q = \sup_{r \in \mathbb{Q}, r < q} \{a^r\}.$$

Výše uvedené vlastnosti mocnin (1)–(6), (7'), (8) platí pro libovolné reálné exponenty.



Obrázek 4.1: Grafy funkcí $y = x^3$, $y = x^2$, $y = x$, $y = x^{1/2}$ a $y = x^{1/3}$.

d) Polynomické funkce

Jsou dány rovnicí $y = P(x)$, kde

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

je algebraický polynom. Pro $a_0 \neq 0$ jde o polynom a tedy i o polynomickou funkci n -tého stupně; $D(f) = \mathbb{R}$. Polynomická funkce obsahující jen liché mocniny x je lichá, pokud obsahuje jen sudé mocniny x , je sudá.

Při studiu polynomických funkcí se využívá poznatků z algebry, která se algebraickými polynomy zabývá. Zejména se využívá:

- dělení polynomů (se zbytkem),
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických polynomů,
- věta o rovnosti polynomů. (Jestliže dva polynomy P, Q nejvýše n -tého stupně se rovnají v $n+1$ bodech, pak $P(x) = Q(x)$ na $\mathbb{R}$, tj. oba polynomy mají tentýž stupeň a tytéž koeficienty.)

Nyní uveďme některé zvláštní případy polynomických funkcí.

Mocninná funkce

$$y = x^n$$

(s přirozeným exponentem n).

Grafem je parabola n -tého stupně.

Pro n sudé je f sudá funkce, která pro $n \geq 2$ je na intervalu $(-\infty, 0)$ klesající a na intervalu $\langle 0, +\infty)$ rostoucí, tedy v bodě 0 má minimum, $H(f) = \langle 0, +\infty)$, funkce je konvexní na $\mathbb{R}$. Při definici inverzní funkce se za obor prostoty bere interval $\langle 0, +\infty)$. Inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ je tedy definována na intervalu $\langle 0, +\infty)$ a stejný je i obor hodnot.

Pro n liché je f lichá funkce, je rostoucí na $\mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Pro $n \geq 3$ je f konkávní na $(-\infty, 0)$ a konvexní na $\langle 0, +\infty)$, v bodě 0 má inflexi. Ježto f je bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, je inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ definována na $\mathbb{R}$ a má též obor hodnot. Z tohoto důvodu je možné a účelné pro lichá n definovat n -tou odmocninu i ze záporných čísel; například $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Konstantní funkce

Jsou dány rovnicí

$$y = k,$$

kde k je konstanta; $H(f) = \{k\}$. Jsou to funkce současně neklesající i nerostoucí, sudé ($y = 0$ je současně i lichá). V každém bodě mají neostře lokální maximum i neostře lokální minimum. Grafem každé konstantní funkce $y = k$ v kartézské soustavě souřadnic je přímka rovnoběžná s osou x , resp. osa x ($y = 0$). V polární soustavě souřadnic je grafem konstantní funkce $\rho = r$ (kde $r > 0$), $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ kružnice se středem v počátku a s poloměrem r .

Lineární funkce

Jsou dány rovnicí

$$y = kx + q,$$

kde $k \neq 0$, q jsou reálné konstanty; $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$. Pro $k > 0$ to jsou funkce rostoucí, pro $k < 0$ klesající, pro $q = 0$ jsou liché. Grafem každé lineární funkce v kartézské soustavě souřadnic je přímka, jež není rovnoběžná s osou x ani k ní kolmá. Konstanta k je *směrnici* přímky, tj. $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je velikost orientovaného úhlu určeného osou x a touto přímkou; zpravidla bereme $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Parametr q znamená *úsek na ose y* .

Pro $q = 0$ se lineární funkce nazývá též *přímá úměrnost*, kartézským grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem. Pro lineární funkci (zpravidla pro $q \neq 0$) se používá též název *lineární závislost*.

Grafem lineární funkce v polární soustavě souřadnic je Archimedova spirála.

Ježto lineární funkce jsou ryze monotonní, jsou i prosté. Funkce inverzní jsou opět lineární. Funkce $y = a - x$ a funkce $y = x$ jsou samy k sobě inverzní.

Lineární funkce je velmi důležitá v řadě problémů, v nichž se složitější průběh nějaké funkce nahrazuje (aproximuje) průběhem lineárním; například při lineární interpolaci funkcí.

Úloha 4.2.7. Jsou dány dvě tabulkové hodnoty funkce f : $f(4,75) = 0,6758$, $f(4,80) = 0,6803$. Pomocí lineární interpolace stanovte $f(4,78)$.

Řešení. Danými dvěma body proložíme přímku, její rovnice je

$$y = 0,6758 + \frac{0,6803 - 0,6758}{4,80 - 4,75}(x - 4,75) = 0,6758 + 0,09(x - 4,75);$$

$$f(4,78) = 0,6758 + 0,09 \cdot 0,03 = 0,6758 + 0,0027 = 0,6785.$$

□

Kvadratické funkce

Jsou dány rovnicí

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kde $a \neq 0$, b , c jsou konstanty; $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f)$ je pro $a > 0$ interval typu $\langle m, +\infty \rangle$, pro $a < 0$ je to interval typu $(-\infty, m]$, kde m je minimum resp.

maximum funkce f . Tohoto ostrého lokálního extrému nabývá funkce f v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Grafem každé kvadratické funkce v kartézské soustavě souřadnic je (kvadratická) parabola; pro funkci $y = ax^2$ je její vrchol v počátku soustavy souřadnic.

e) Racionální lomené funkce

Jsou to funkce dané rovnicí

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Je-li stupeň čitatele větší nebo roven stupni jmenovatele, dovedeme racionální lomenou funkci vyjádřit ve tvaru

$$y = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $S(x)$ je podíl a $R(x)$ je zbytek při dělení $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Tato úprava (které se říká „snížit stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele“) se používá při integraci racionálních funkcí.

Úloha 4.2.8. Je dána funkce $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 7}{x^2 + 3}$. Provedte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele.

Řešení. Po provedeném dělení dostaneme $y = x - 2 + \frac{3x - 1}{x^2 + 3}$. □

Úloha 4.2.9. Je dána funkce $y = \frac{x^5 - 1}{x^2 + 1}$. Provedte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele, aniž provedete klasické dělení.

Řešení. V čitateli vhodné členy přičítáme a odčítáme a zlomek rozdělíme na více zlomků. Dostaneme $y = x^3 - x + \frac{x - 1}{x^2 + 1}$. □

Lineární lomené funkce

Jsou to funkce s rovnicí

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

kde a , b , c , d jsou reálné konstanty, přičemž platí

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0; \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

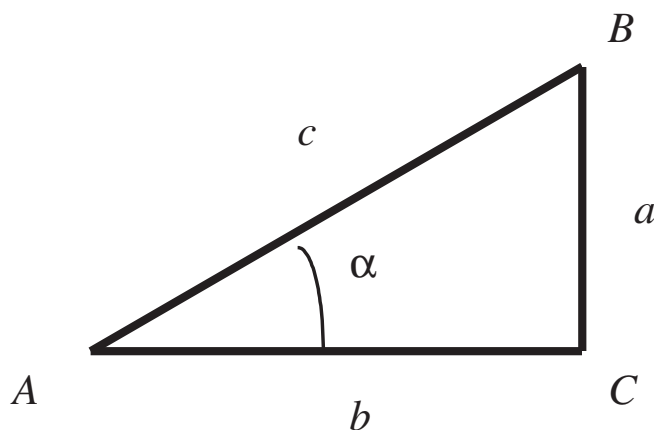
Jsou to funkce prosté, grafem v kartézské soustavě souřadnic je rovnoosá hyperbola. Inverzní funkce jsou téhož typu, tj. jsou též lineární lomené.

Zvláštním případem je funkce zvaná *nepřímá úměrnost* s rovnicí $y = \frac{a}{x}$, která je sama k sobě inverzní.

4.3 Goniometrické funkce a funkce cyklometrické

Pravoúhlé trojúhelníky

Podobnost trojúhelníků jako relace ekvivalence na množině všech pravoúhlých trojúhelníků, definuje rozklad této množiny na třídy. Z vlastnosti podobnosti plyne, že každá třída těchto trojúhelníků je určena jedním vnitřním ostrým úhlem a že všechny trojúhelníky z téže třídy ekvivalence se shodují v poměru odpovídajících si stran. Toho se využívá k definici *goniometrických funkcí ostrého úhlu*.



Obrázek 4.2: Pravoúhlý trojúhelník

Definice 4.3.1. $\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}.$

Tato definice pracuje zpravidla s úhly v míře stupňové.

Odsud

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Z $\triangle ABC$ dále plyne:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha.$$

Zvláštní hodnoty

Některé zvláštní hodnoty goniometrických funkcí lze odvodit (při použití Pythagorovy věty)

- z rovnostranného trojúhelníku s výškou:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

(podobně pro „kofunkce“ $\cos \alpha$ a $\operatorname{cotg} \alpha$).

- ze čtverce s úhlopříčkou:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1.$$

Na této úrovni se přijímá jako důsledek definice, že když α roste od 0° do 90° , tak funkce sinus roste od 0 do 1, funkce tangens roste od 0 do $+\infty$, funkce kosinus klesá od 1 k 0 a funkce kotangens klesá od $+\infty$ k 0.

Rovněž pomocí názoru se na této úrovni snese rozšíření funkcí:

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \operatorname{tg} 0^\circ = 0, \quad \operatorname{cotg} 0^\circ \text{ není definován;}$$

podobně

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \operatorname{tg} 90^\circ \text{ není definován,} \quad \operatorname{cotg} 90^\circ = 0.$$

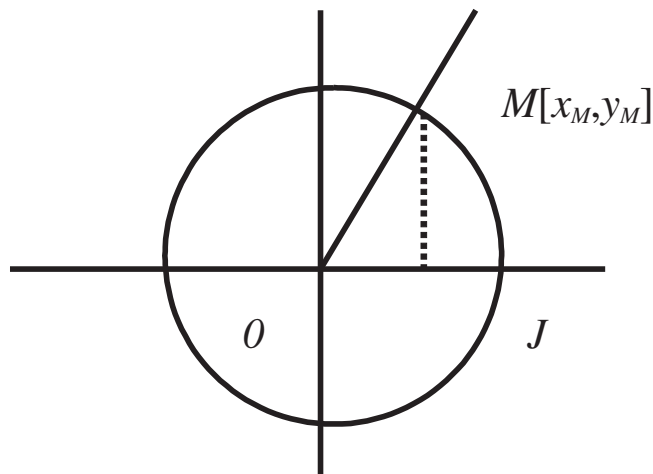
Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí

Tato definice se obvykle spojuje již s používáním míry obloukové, přičemž přepočítání mezi velikostí úhlu α v míře stupňové a velikostí x v míře obloukové je dán vztahy

$$x = \frac{\pi}{180} \alpha, \quad \alpha = \frac{180}{\pi} x.$$

Definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice přináší jeden didaktický problém. Chceme-li zachovat označení x pro velikost úhlu v míře obloukové, musíme volit jiné označení pro souřadnicové osy, například u, v . Chceme-li však zachovat označení os x, y , musíme volit jiné označení pro velikost úhlu, například t , tedy nemůžeme přímo definovat $\sin x$, přestože právě tento zápis v matematické analýze nejvíce používáme.

Definice 4.3.2. Je-li O počátek pravoúhlé soustavy souřadnic, J jednotkový bod na ose x , $M(x_M, y_M)$ bod na jednotkové kružnici a t velikost orientovaného úhlu $\angle JOM$, pak hodnota funkce $\cos t$ je definována jako x -ová souřadnice bodu M , $\cos t = x_M$, a hodnota funkce $\sin t$ je definována jako y -ová souřadnice bodu M , $\sin t = y_M$.



Obrázek 4.3: Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí

Vlastnosti plynoucí z definice funkcí

Z definice máme: $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = H(\cos) = \langle -1, 1 \rangle$.
Z definice plyne rovněž periodičnost obou funkcí s periodou 2π :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}; \quad \sin(t + 2k\pi) = \sin t, \quad \cos(t + 2k\pi) = \cos t.$$

Z běžných vlastností lze dále přímo z jednotkové kružnice zjistit

- znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;
- hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$, zejména nulové body:

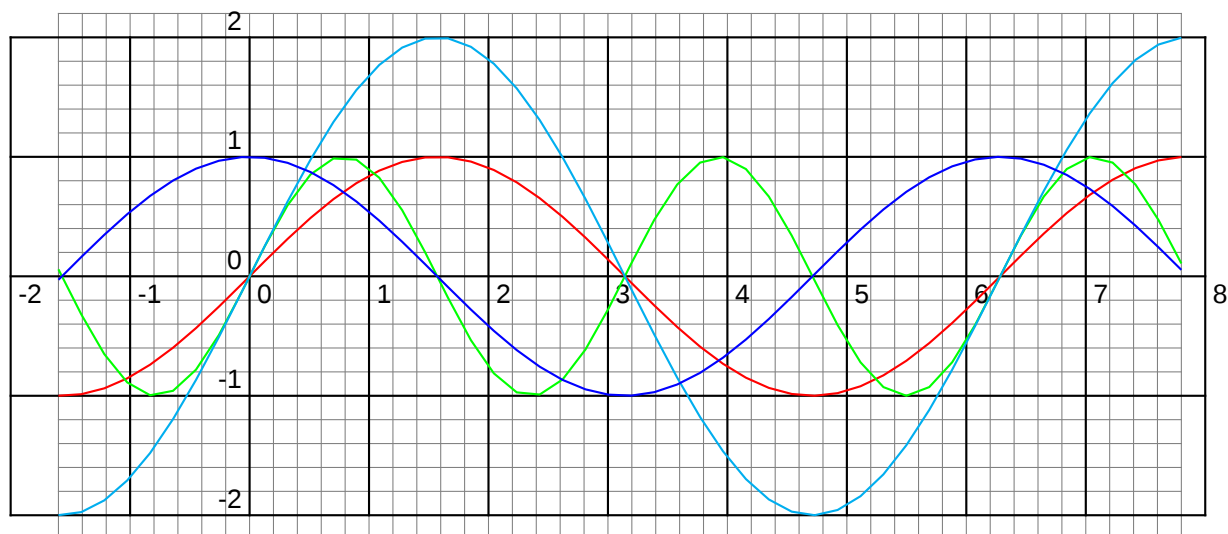
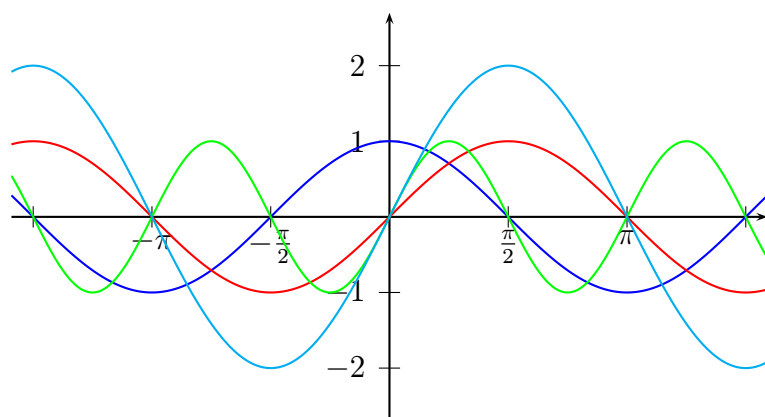
$$\sin t = 0 \iff t = k\pi \quad (\forall k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos t = 0 \iff t = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad (\forall k \in \mathbb{Z});$$

- paritu funkcí, tj. $\forall t \in \mathbb{R}$:
 $\sin(-t) = -\sin t$ (funkce sinus je lichá),
 $\cos(-t) = \cos t$ (funkce kosinus je sudá);
- vzorce pro změnu velikosti úhlu o π , tj. $\forall t \in \mathbb{R}$:
 $\sin(t \pm \pi) = -\sin t$,
 $\cos(t \pm \pi) = -\cos t$;
- nerovnost: $\forall t \in (0, +\infty) : \sin t < t$;

- parametrické vyjádření kružnice:
$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos t, \\ y &= r \cdot \sin t, \end{aligned} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Ve školské matematice se nejčastěji setkáváme s označováním velikosti úhlů řeckými písmeny $\alpha, \beta, \dots$ a s mírou stupňovou, v matematické analýze se po-nejvíce pracuje s mírou obloukovou a s x jako označením velikosti úhlů v míře obloukové, tedy $\sin x, \cos x, \dots$



Obrázek 4.4: Grafy funkcí $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = 2 \sin x$ a $y = \cos x$.

Funkce tangens a kotangens

Definice funkcí tangens a kotangens vychází z funkcí sinus a kosinus.

Definice 4.3.3. $\forall x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ (tedy pro něž $\cos x \neq 0$) definujeme funkci tangens:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$\forall x \neq k\pi$ (tedy pro něž $\sin x \neq 0$) definujeme funkci kotangens:

$$\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Vlastnosti funkcí $\tg x$ a $\cotg x$:

Funkce tangens je definována pro všechna $x \in (2k+1)\frac{\pi}{2}$, tj. na množině $D(\tg) = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\}$; $H(\tg) = \mathbb{R}$.

Funkce kotangens je definována pro všechna $x \neq k\pi$, tj. na množině $D(\cotg) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$; $H(\cotg) = \mathbb{R}$.

Z definice funkcí tangens a kotangens a z vlastností funkcí sinus a kosinus dostáváme zejména tyto základní vlastnosti:

- znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;
- hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, zejména nulové body: $\tg 0 = \tg \pi = 0$, $\cotg \frac{\pi}{2} = \cotg \frac{3\pi}{2} = 0$;
- paritu funkcí, tj. $\forall x \in D(f)$:

$$\tg(-x) = -\tg x, \quad \cotg(-x) = -\cotg x \text{ (funkce liché);}$$

- periodičnost funkcí: $\forall x \in D(f)$:

$$\tg(x \pm \pi) = -\tg x, \quad \cotg(x \pm \pi) = -\cotg x.$$

Vzorce pro goniometrické funkce:

Postupně lze vyvodit další skupiny vzorců. Je-li g libovolná ze čtyř základních goniometrických funkcí a označíme-li velikosti úhlů $\alpha, \beta, \dots$, jak je to běžné na střední škole, jde o vzorce, kde

- $g(\alpha \pm \beta)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí úhlů α, β , například

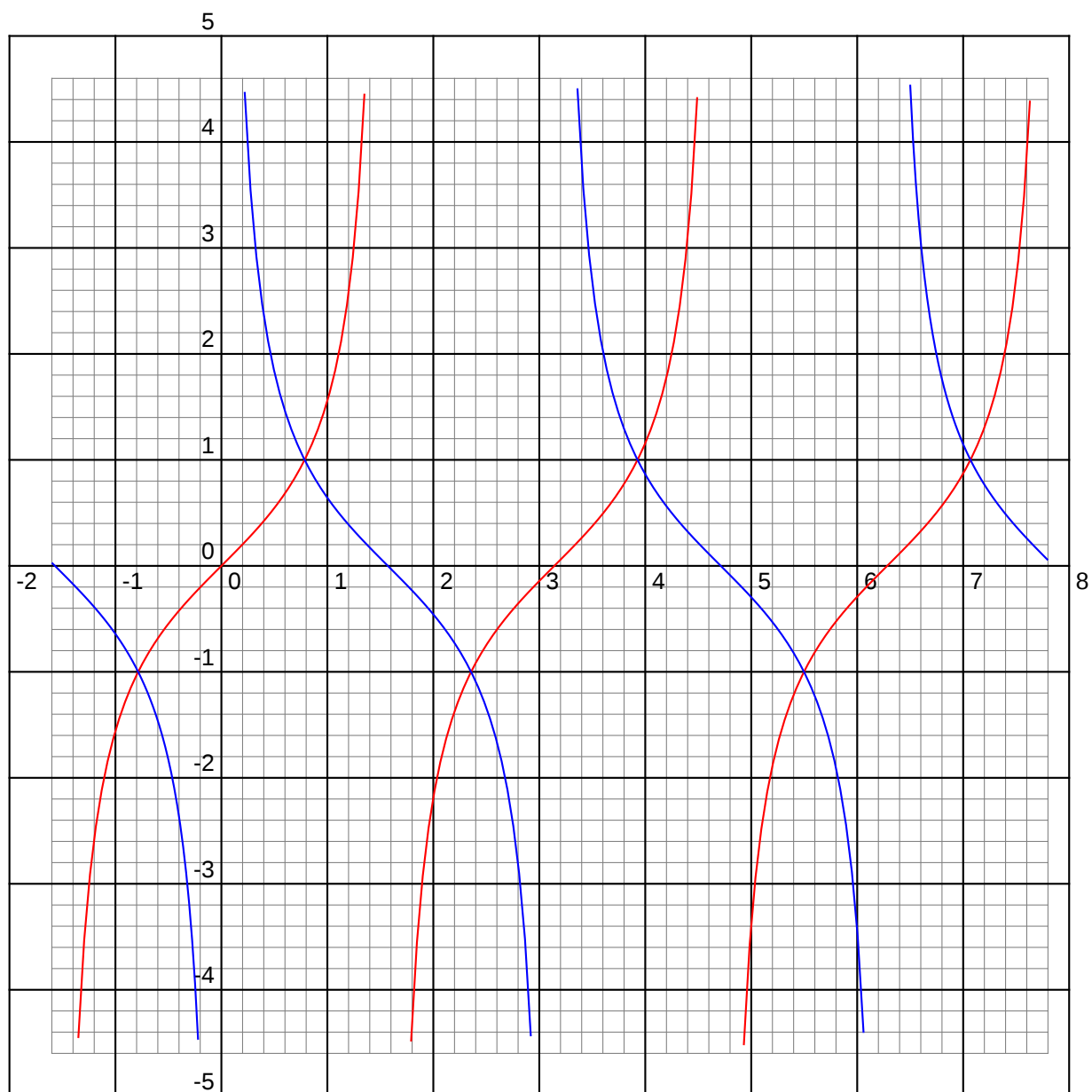
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\tg(\alpha \pm \beta) = \frac{\tg \alpha \pm \tg \beta}{1 \mp \tg \alpha \tg \beta} \text{ (pro která } \alpha, \beta \text{ platí?);}$$

- $g(2\alpha)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí jednoduchého úhlu α , například

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$



Obrázek 4.5: Grafy funkcí $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$.

- $g\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí úhlu α , například pro $\alpha \in I$ je

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \text{ nebo též}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$
tento vzorec se využívá například při integraci goniometrických funkcí;
- $g(\alpha) \pm g(\beta)$ se vyjádří jako součin funkcí, například

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$
- při integraci součinu goniometrických funkcí se využívá obráceného vztahu a $g(\alpha) \cdot g(\beta)$ vyjadřujeme jako součet nebo rozdíl goniometrických funkcí, například:

$$\sin m\alpha \cdot \cos n\alpha = \frac{1}{2} [\sin(m+n)\alpha + \sin(m-n)\alpha];$$
- velmi užitečný je vzorec $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Funkce cyklometrické

Pro základní goniometrické funkce se volí obory prostoty P , přičemž obory hodnot H se nemění:

$$\begin{aligned} \sin x : \quad P &= \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad H = \langle -1, 1 \rangle; \\ \cos x : \quad P &= \langle 0, \pi \rangle, \quad H = \langle -1, 1 \rangle; \\ \operatorname{tg} x : \quad P &= \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad H = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}; \\ \operatorname{cotg} x : \quad P &= (0, \pi), \quad H = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Při definici cyklometrických funkcí se vymění úloha množin P a H .

Definice 4.3.4. *Goniometrické funkce uvažujeme na jejich oborech prostoty. Inverzní funkcí (s definičním oborem D) k funkci*

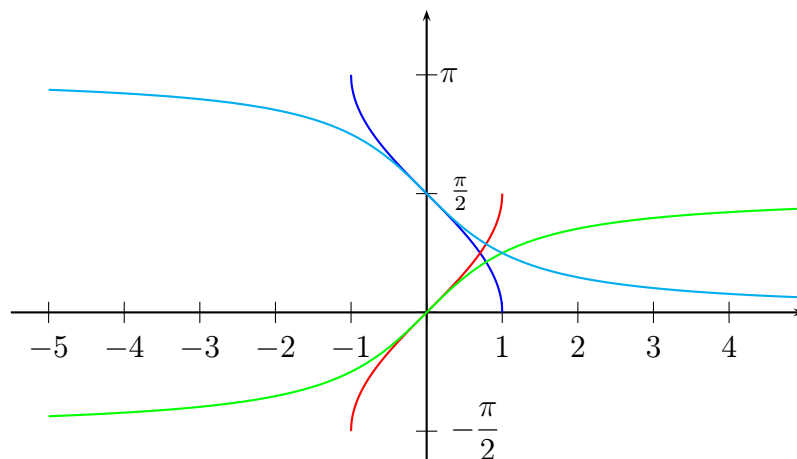
$$\begin{aligned} \sin x \quad \text{je funkce} \quad \arcsin x \quad (\text{arkussinus}), \quad D &= \langle -1, 1 \rangle; \\ \cos x \quad \text{je funkce} \quad \arccos x \quad (\text{arkuskosinus}), \quad D &= \langle -1, 1 \rangle; \\ \operatorname{tg} x \quad \text{je funkce} \quad \operatorname{arctg} x \quad (\text{arkustangens}), \quad D &= (-\infty, +\infty); \\ \operatorname{cotg} x \quad \text{je funkce} \quad \operatorname{arccotg} x \quad (\text{arkuskotangens}), \quad D &= (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

Přitom si uvědomíme, že například $\forall x \in \langle -1, 1 \rangle, \forall y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, znamenají zápisy $y = \arcsin x, x = \sin y$ přesně totéž.

Funkce $\arcsin x$ se vyskytuje v úlohách na určení definičního oboru funkcí.

Úloha 4.3.5. Určete definiční obor funkce $f : y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{3x+2}}$.

Řešení. Čitatel je definován na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, jmenovatel na množině $x > -\frac{2}{3}$, tedy na intervalu $(-\frac{2}{3}, +\infty)$. Definiční obor $D(f)$ je průnikem obou intervalů, tedy $D(f) = (-\frac{2}{3}, 1)$. $\square$



Obrázek 4.6: Grafy funkcí $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$ a $y = \operatorname{arccotg} x$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

Jelikož inverzní funkce zachovává monotónnost funkce výchozí, jsou funkce $\arcsin x$, $\arctg x$ ve svých definičních oborech rostoucí, $\arccos x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou klesající.

Ze vzorců pro funkce goniometrické lze odvodit odpovídající vzorce pro funkce cyklometrické, například:

Ježto $\cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$, dostaneme po dosazení $\cos t = x$, (tedy i $t = \arccos x$): $x = \sin(\frac{\pi}{2} - \arccos x) \Rightarrow \forall x \in \langle -1, 1 \rangle : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Podobně též $\forall x \in \mathbb{R} : \arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

Proto se z uvedených cyklometrických funkcí používá obvykle vždy jen jedna z každé dvojice, zpravidla funkce $\arcsin x$ a $\arctg x$.

Jestliže ve vzorci pro $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ položíme $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{tg} \beta = y$, tj. $\alpha = \arctg x$, $\beta = \arctg y$, dostaneme vzorec $\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy}$.

4.4 Funkce exponenciální a logaritmické

Exponenciální funkce

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. *Exponenciální funkce* jsou definovány rovnicí

$$y = a^x,$$

$D(f) = \mathbb{R}$ (plyne to z definice mocniny pro libovolný reálný exponent).

Hodnotu mocniny s iracionálním exponentem, tedy exponenciální funkce pro iracionální hodnotu nezávisle proměnné x) lze najít i jako limitu posloupnosti a^r , kde $r \in \mathbb{Q}$, $r \rightarrow x$. Tak třeba 2^π je limitou posloupnosti 2^r , kde r například tvoří posloupnost dolních desetinných aproximací čísla π : 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; Pak 2^r dává posloupnost 8; 8,5741...; 8,8152...; 8,8213...; 8,8244...; 8,82496..., takže například $2^\pi \approx 8,8250$.

Podobně (užitím suprema množin) bychom mohli dokázat, že každé kladné číslo je při daném základu a hodnotou nějaké mocniny, tj. $H(f) = (0, +\infty)$.

Pro $a > 1$ je exponenciální funkce rostoucí, jak plyne z vlastnosti mocnin 4.2 (8). Pro $a < 1$ je exponenciální funkce klesající. V tomto případě je $(1/a) > 1$, platí pro každé $x_1 < x_2 < (\frac{1}{a})^{x_1} < (\frac{1}{a})^{x_2}$ a po přechodu k převráceným hodnotám máme $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Pro $a \in (0, 1)$ je tedy $a^x = b^{-x}$, kde $b = 1/a > 0$.

Exponenciální funkci $y = a^x$ pro $a \in (0, 1)$ lze tedy nahradit exponenciální funkcí $y = b^{-x}$ pro $b > 1$ (která je klesající), a to vede k závěru, že v podstatě není třeba se zabývat exponenciálními funkcemi se základem $a < 1$.

Grafu exponenciální funkce v kartézské soustavě říkáme *exponenciála*. Všechny exponenciály procházejí bodem $[0; 1]$. Grafem exponenciální funkce v polární soustavě souřadnic je tzv. *logaritmická spirála*.

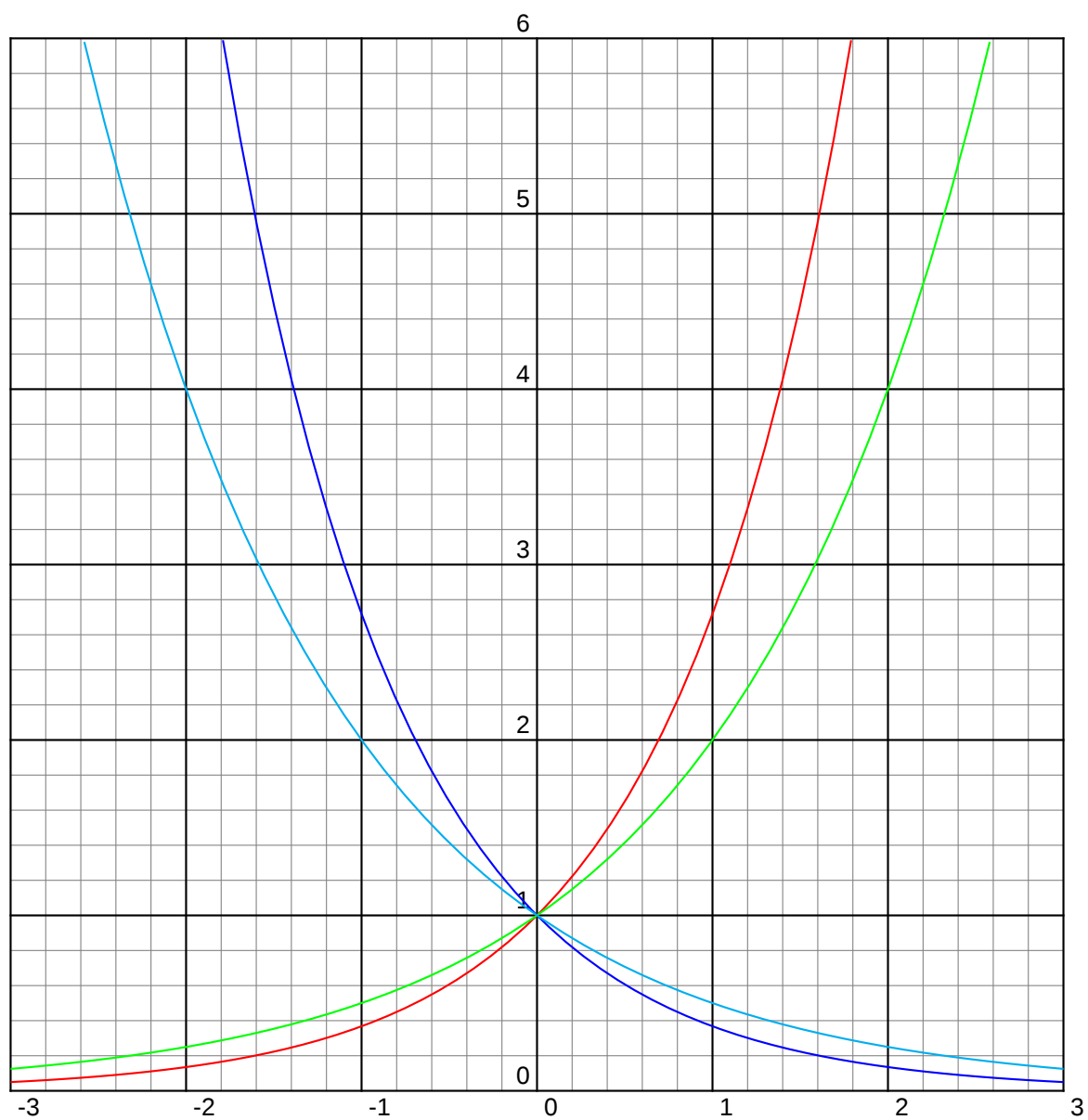
Zvlášť důležitá je exponenciální funkce $y = e^x$ označovaná někdy též $\exp x$.

Logaritmické funkce

Exponenciální funkce $f : y = a^x$ je pro $a > 0$ rostoucí (tedy i prostá) na celé množině $\mathbb{R}$, přičemž $H(f) = (0, +\infty)$. Existuje proto inverzní funkce $f^{-1} : x = a^y$, kterou nazýváme *logaritmická funkce* o základu a a kterou zapisujeme $y = \log_a x$; ta má $D(f^{-1}) = (0, +\infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$. Hodnotu logaritmické funkce nazýváme **logaritmus**; někdy pojem logaritmus používáme i pro stručné označení logaritmické funkce. *Logaritmovat* nějaký výraz znamená určit jeho logaritmus.

Pro matematickou analýzu je nejdůležitější logaritmická funkce o základu e , pro niž máme zvláštní označení $\ln x = \log_e x$ a název **přirozený logaritmus** ($\ln = \text{logarithmus naturalis}$).

Z definice logaritmu plyne zejména:



Obrázek 4.7: Grafy funkcí $y = e^x$, $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$, $y = 2^x$ a $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

(a) Zápis $x = a^y$ znamená přesně totéž jako $y = \log_a x$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}: \log_a a^x = x, \quad \forall x > 0: a^{\log_a x} = x$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}: a^x = e^{x \ln a}$ (neboť $a = e^{\ln a}$).

Z prostoty exponenciálních a logaritmických funkcí plyne:

(d) $a^K = a^L \Leftrightarrow K = L, \quad A = B (> 0) \Leftrightarrow \log_a A = \log_a B$.

V obou případech (d) získáme závěr implikace *logaritmováním* jejího předpokladu.

Dekadický logaritmus, tj. logaritmus o základu 10, měl dříve výsadní postavení při numerických výpočtech (používání tabulek dekadických logaritmů), ale s rozšířením kalkulátorů a počítačů toto postavení ztratil.

Všechny logaritmické funkce o základu $a > 1$ jsou rostoucí a jejich grafy procházejí bodem $[1; 0]$ na ose x .

Úloha 4.4.1. *Načrtněte grafy funkcí $y = e^x$, $y = \ln x$.*

Z výše uvedené vlastnosti (c) plyne, že místo exponenciálních funkcí $y = a^x$ o základu a lze uvažovat jen exponenciální funkce $y = e^{kx}$ o základu e . Podobně na sebe lze převádět logaritmy o různých základech. Převodní vztahy lze odvodit například takto (uvažujme logaritmus přirozený a logaritmus o základu a):

Rovnost $x = a^{\log_a x}$ logaritmujeme při základu e a dostaneme $\ln x = \ln a \cdot \log_a x$.

Jestliže logaritmujeme rovnost $x = e^{\ln x}$ při základu a , dostaneme $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x$.

Z vlastností exponenciálních funkcí plynou ihned vlastnosti funkcí logaritmických:

$$\forall x_1, x_2 > 0: \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2;$$

$$\forall x_1, x_2 > 0: \log_a(x_1 : x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2;$$

$$\forall x > 0, \forall m \in \mathbb{R}: \log_a(x^m) = m \cdot \log_a x.$$

4.5 Funkce hyperbolické a hyperbolometrické

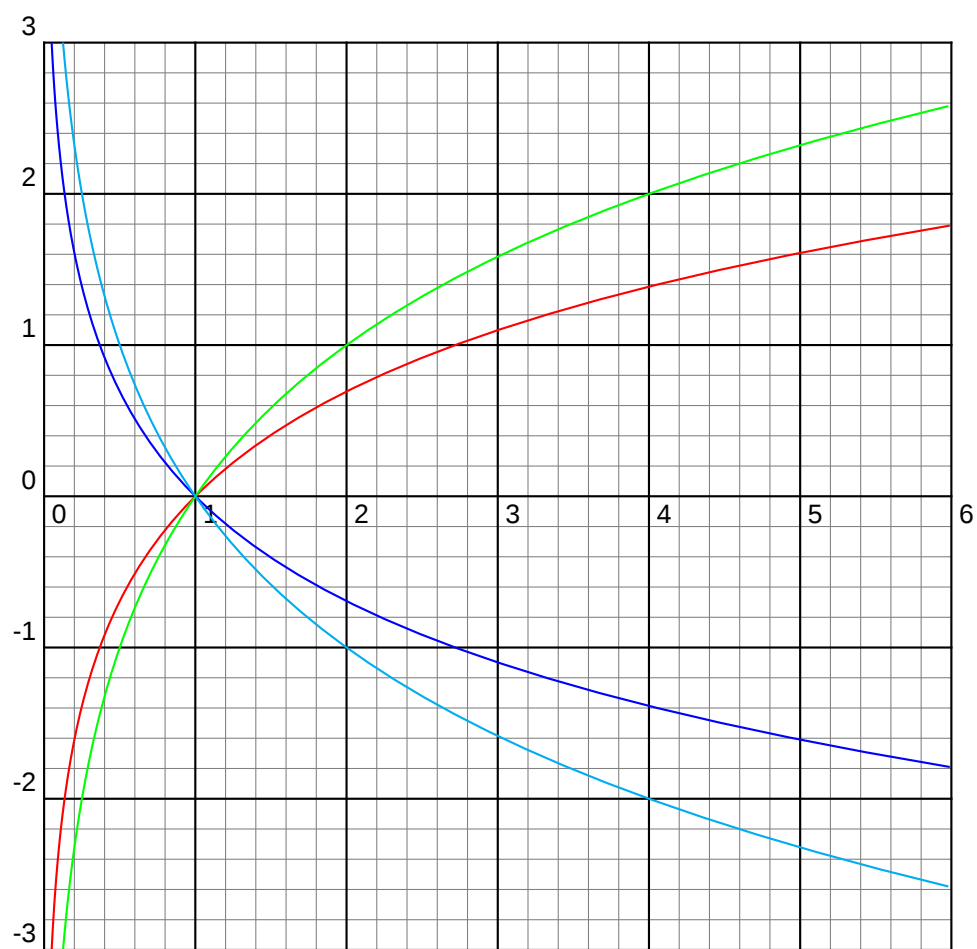
Hyperbolické funkce patří mezi elementární funkce a jsou definovány pomocí funkcí exponenciálních takto:

Definice 4.5.1.

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}),$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x};$$

jsou to hyperbolický sinus, kosinus, tangens a kotangens.



Obrázek 4.8: Grafy funkcí $y = \ln x$, $y = \log_{1/e} x$, $y = \log_2 x$ a $y = \log_{1/2} x$.

Z definice je vidět, že pro první tři z těchto funkcí je $D(f) = \mathbb{R}$ (pro $\operatorname{th} x$ to plyne z toho, že $\forall x \in \mathbb{R}: \operatorname{ch} x > 0$). Lehce zjistíme, že funkce $\operatorname{sh} x$ má jediný nulový bod pro $x_0 = 0$, takže $D(\operatorname{coth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Obory hodnot a průběh:

$H(\operatorname{sh}) = \mathbb{R}$, funkce je rostoucí; $H(\operatorname{ch}) = \langle 1, +\infty \rangle$, funkce je klesající na $(-\infty, 0)$ a rostoucí na $\langle 0, +\infty \rangle$, v bodě 0 má minimum 1.

$H(\operatorname{th}) = (-1; 1)$, funkce je rostoucí; $H(\operatorname{coth}) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, na intervalu $(-\infty, 0)$ funkce klesá od -1 k $-\infty$, na intervalu $(0, +\infty)$ funkce klesá od $+\infty$ k 1. Pro funkce tangens i kotangens jsou přímky $y = 1$ a $y = -1$ asymptotami, asymptotou grafu funkce kotangens je též osa y .

Úloha 4.5.2. Do jednoho obrázku znázorněte grafy funkcí $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \frac{1}{2} e^x$.

Úloha 4.5.3. Do jednoho obrázku znázorněte grafy funkcí $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{coth} x$.

Graf funkce $y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ v kartézské souřadnicové soustavě se nazývá *řetězovka*. Je to křivka, kterou vytváří řetěz (nepružná nit) volně zavěšený ve dvou bodech.

Hyperbolické funkce mají řadu vlastností velmi podobných vlastnostem funkcí goniometrických. Z definice funkcí lze odvodit například

(a) Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{coth} x$ jsou liché, funkce $\operatorname{ch} x$ je sudá.

(b) $\forall x: \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

(c) $\forall x \neq 0: \operatorname{th} x \cdot \operatorname{coth} x = 1$.

(d) $\forall x_i \in \mathbb{R}: \operatorname{sh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 \pm \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2$.

(e) $\forall x_i \in \mathbb{R}: \operatorname{ch}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 \mp \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2$.

(f) $\forall x_i \in \mathbb{R}: \operatorname{th}(x_1 \pm x_2) = \frac{\operatorname{th} x_1 \pm \operatorname{th} x_2}{1 \pm \operatorname{th} x_1 \operatorname{th} x_2}$.

Hyperbolické funkce se vyskytují zejména v aplikacích a také se používají při výpočtu neurčitých integrálů pomocí hyperbolických substitucí.

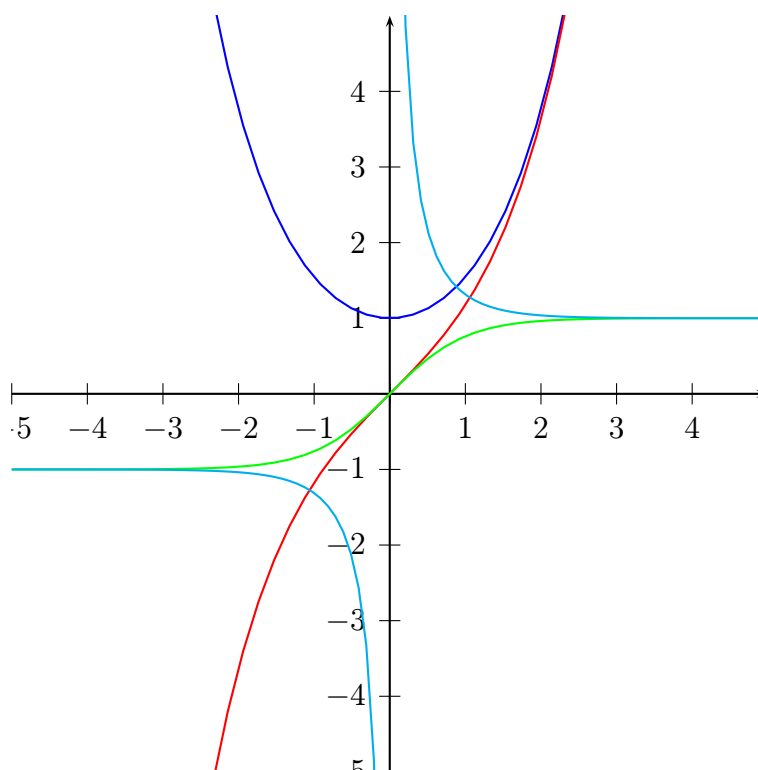
Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ a $\operatorname{coth} x$ jsou prosté, u funkce $\operatorname{ch} x$ vezmeme za obor prostoty interval $\langle 0, +\infty \rangle$. Pak lze definovat funkce inverzní (zvané **hyperbolometrické**):

- K funkci $\operatorname{sh} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argsh} x$ (argument hyperbolického sinu), $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$.
- K funkci $\operatorname{ch} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argch} x$ (argument hyperbolického kosinu), $D(f) = \langle 1, +\infty \rangle$, $H(f) = \langle 0, +\infty \rangle$.

- K funkci $\operatorname{th} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argth} x$ (argument hyperbolické tangens), $D(f) = (-1; 1)$, $H(f) = \mathbb{R}$.
- K funkci $\operatorname{coth} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argcoth} x$ (argument hyperbolické kotangens), $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

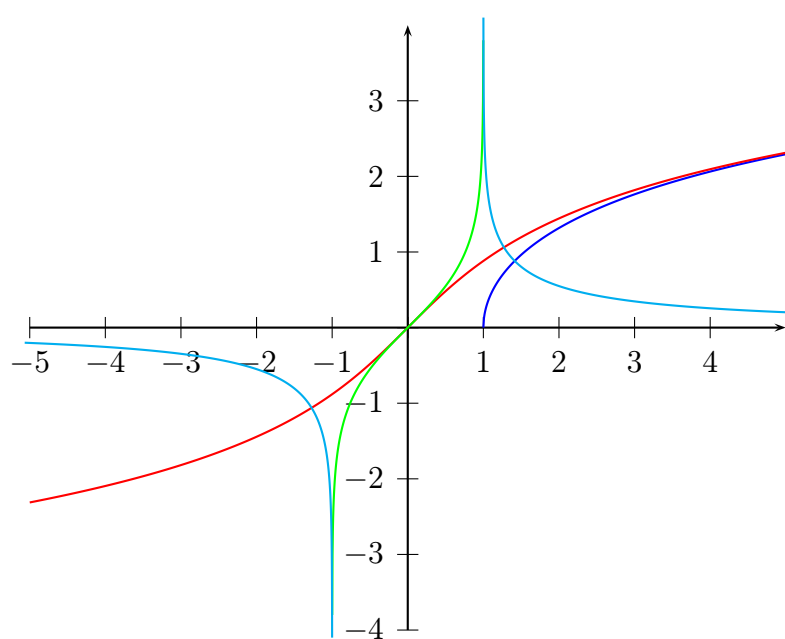
Ježto jsou hyperbolické funkce vyjádřeny pomocí exponenciální funkce, lze hyperbolometrické funkce vyjádřit pomocí funkce logaritmické, například:

$$\operatorname{argsh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$



Obrázek 4.9: Grafy funkcí $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ a $y = \operatorname{coth} x$.

— * —



Obrázek 4.10: Grafy funkcí $y = \operatorname{argsh} x$, $y = \operatorname{argch} x$, $y = \operatorname{argth} x$ a $y = \operatorname{argcoth} x$.

Kapitola 5

Limita funkce

Limita funkce je jedním z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy. Na pojmu limita jsou založeny další významné pojmy, jako je spojitost, derivace funkce, Riemannův integrál, délka křivky a další. S přímým praktickým použitím limity se setkáme při vyšetřování průběhu funkce, například při zjišťování asymptot grafu funkce.

5.1 Limita funkce podle Heineho

Hlavní myšlenka: Problém limity funkce se převede na (již známý) problém limity posloupnosti.

Definice 5.1.1 (limita funkce podle Heineho). *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme limita funkce f v bodě x_0 $\iff$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$, $x_n \rightarrow x_0$, platí $f(x_n) \rightarrow a$.
Píšeme*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Definice 5.1.2 (jednostranná limita funkce podle Heineho). *Nechť x_0 je levým (pravým) hromadným bodem $D(f)$.*

*Číslo a nazveme limita zleva (zprava) funkce f v bodě x_0 $\iff$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n < x_0$ ($x_n > x_0$), $x_n \rightarrow x_0$, platí $f(x_n) \rightarrow a$.
Píšeme*

$$f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = a \quad \left(f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = a \right).$$

Úloha 5.1.3. *Vypočtěte* $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Úloha 5.1.4. Vypočítejte obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.

Úloha 5.1.5. Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Úloha 5.1.6. Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0 .

Definice 5.1.7 (vlastní limita v nevlastním bodě $+\infty$). *Nechť $+\infty$ je hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme limita funkce f v nevlastním bodě $+\infty \iff$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \rightarrow +\infty$, platí $f(x_n) \rightarrow a$.*
Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a.$$

Úloha 5.1.8. Vyslovte definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě $-\infty$ a definice nevlastních limit v nevlastních bodech.

5.2 Věty o limitách funkcí

Věty o limitách funkcí vyplývají na základě Heineho definice limity z vět o limitách posloupností. Proto jsou některé formulovány velmi podobně.

Formulaci uvádíme pro vlastní limity ve vlastních bodech, je však možné i jejich rozšíření na „nevlastní případy“.

Věta 5.2.1. Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nejvýše jednu limitu.

Věta 5.2.2. Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená. (Tedy

$$\exists P(x_0) \quad \exists K, L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in P(x_0) \cap D(f) : f(x) \in \langle K, L \rangle.)$$

Věta 5.2.3 (věta o kladné limitě). Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou (zápornou) limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná (záporná).

Věta 5.2.4 (věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu). Nechť jsou na M definovány funkce f a g . Nechť x_0 je hromadný bod M a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b.$$

Pak funkce

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad (\text{pro } g(x) \neq 0, \quad b \neq 0)$$

mají limitu

$$a + b, \quad a - b, \quad a \cdot b, \quad \frac{a}{b}.$$

Tyto vlastnosti platí pro rozšířenou reálnou osu ve všech případech, kdy mají uvedené výrazy s a , b smysl; například věta o součtu neplatí pro $a = +\infty$, $b = -\infty$.

Věta 5.2.5 (věta o limitě rovnosti). *Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Pak též $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.*

Věta 5.2.6 (věta o limitě nerovnosti). *Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0 .*

$$\text{Pak } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Úloha 5.2.7. *Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.*

Věta 5.2.8 (věta o třech limitách). *Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

přičemž

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a.$$

Pak existuje i $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ a je rovna a .

Věta 5.2.9 (věta o limitě monotónní funkce). *Nechť bod x_0 je levým hromadným bodem množiny $M = D(f) \cap P(x_0-)$ a funkce f je neklesající na M .*

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$.

Je-li funkce f na M shora omezená, je tato limita konečná, není-li f na M shora omezená, je tato limita rovna $+\infty$.

Úloha 5.2.10. *Vyslovte podobnou větu pro nerostoucí funkci a dále věty pro případ limity zprava.*

Věta 5.2.11.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0.$$

Věta 5.2.12.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - a| = 0$$

(pro a vlastní).

Věta 5.2.13. *Nechť x_0 je oboustranným hromadným bodem $D(f)$. Pak následující dva výroky jsou ekvivalentní:*

A: Existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a je rovna a .

B: Existují $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ a obě jsou rovny a .

Úloha 5.2.14. *Užitím předchozí věty dokažte, že funkce $y = x + \frac{|x|}{x}$ nemá limitu v bodě $x_0 = 0$.*

Věta 5.2.15. *Nechť na nějakém $P(x_0)$ platí $f(x) > 0$. Pak*

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Věta 5.2.16. *Nechť $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ a v nějakém okolí $P(x_0)$ platí $\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} a$ [$\operatorname{sgn} g(x) = -\operatorname{sgn} a$]. Pak platí $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ [$-\infty$].*

Věta 5.2.17. *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f \cdot g)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a g je funkce omezená. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.*

Věta 5.2.18 (věta o limitě složené funkce). *Mějme složenou funkci $f \circ \varphi$. Nechť*

1. $\exists$ okolí $P(x_0) \subset D(\varphi)$ tak, že $\varphi(P(x_0)) \subset D(f)$,

2. $\exists a$ jako $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$,

3. a je hromadným bodem $D(f)$ a existuje $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$,

4. x_0 není hromadným bodem množiny $\{x \in P(x_0); \varphi(x) = a\}$.

Pak existuje limita složené funkce $f \circ \varphi$ v bodě x_0 a platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ \varphi(x) = b$.

5.3 Výpočet limit

Limity některých elementárních funkcí

Úloha 5.3.1. *Užitím věty o třech limitách dokažte, že $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.*

Úloha 5.3.2. *Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.*

Úloha 5.3.3. *Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$ a že pro každý polynom $P(x)$ je $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.*

Platnost výsledků úloh 5.3.2 a 5.3.3 lze zobecnit na všechny elementární funkce takto:

Věta 5.3.4. *Je-li f elementární funkce, $x_0 \in D(f)$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Použití této věty nazýváme *využití spojitosti funkce k výpočtu limity*.

Speciální limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m \quad (\text{pro libovolná } m \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Úloha 5.3.5. Dokažte první z výše uvedených speciálních limit.

Úloha 5.3.6. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Úloha 5.3.7. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Výpočet dle definice a vět o limitách

Úloha 5.3.8. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 + 2x + 5}{2x^3 + x^2 + 7}$.

Úloha 5.3.9. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \cdot 2^{3x} + 2^{x+1} + 5}{2^{3x+1} + 2^{2x} + 7}$.

Úloha 5.3.10. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$, kde $x > 0$.

Úloha 5.3.11. Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Další metoda výpočtu limit funkcí: užitím l'Hospitalova pravidla.

5.4 Limita funkce podle Cauchyho

Cauchyho definice limity využívá vztahu mezi okolími. Vyslovíme dvě definice. Jedna uvažuje okolí ve smyslu topologickém, druhá ve smyslu metrickém.

Definice 5.4.1 (limita funkce podle Cauchyho). *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 limitu $a \Leftrightarrow \forall U(a) \exists P(x_0) \forall x : x \in D(f) \cap P(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(a)$. Píšeme*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Poznámka 5.4.2. Poslední implikaci lze nahradit inkluzí

$$f(D(f) \cap P(x_0)) \subset U(a).$$

Definice 5.4.3 (limita funkce podle Cauchyho, druhá definice). *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že funkce f **má v bodě x_0 limitu a** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x : x \in D(f) \cap P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(a, \varepsilon)$. Píšeme*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Poznámka 5.4.4. Závěr definice lze formálně upravit na jiný tvar s využitím absolutních hodnot: místo $\forall x : x \in D(f) \cap P(x_0, \delta)$ uvedeme $\forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta$ a místo $f(x) \in U(a, \varepsilon)$ dáme $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Úloha 5.4.5. Znázorněte obsah Cauchyových definic na obrázku.

Úloha 5.4.6. Vyslovte Cauchyovy definice vlastní limity v nevlastním bodě, nevlastní limity ve vlastním bodě a nevlastní limity v nevlastním bodě.

Věta 5.4.7 (Ekvivalence definic limity funkce). *Heineho definice a Cauchyova definice limity funkce jsou ekvivalentní.*

Limita funkce dle definice Heineho je tedy přesně týž pojem jako limita funkce podle Cauchyho. Je tu však rozdíl v jejich použití. Heineho definici používáme častěji k *výpočtu* limit, neboť v této definici znalost hodnoty limity funkce není předem potřebná, Cauchyovu definici používáme častěji k *důkazům*, hodnotu limity musíme znát předem.

— * —

Kapitola 6

Spojitosť funkce

Spojitosť patřĩ k nejvřznamnějšĩm vlastnostem funkcĩ. Setkáváme se s nĩ — jako s požadovanou vlastností funkcĩ — ve všech částech matematické analýzy.

6.1 Pojem spojitosti funkce

Intuitivnĩ představa spojitosti funkce f v bodě x_0 je spojena s grafem funkce: graf v tomto bodě „nenĩ přetržený“, funkce je v daném bodě definována a v malém okolí bodu x_0 jsou malé i změny funkce. Spojitosť v bodě je lokálnĩ vlastnost funkce.

Definice 6.1.1 (spojitosť funkce v bodě).

*Řĩkáme, že funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \Leftrightarrow$*

- 1. je v bodě x_0 definována (tj. $x_0 \in D(f)$),*
- 2. [je-li x_0 hromadným bodem $D(f)$, pak] existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a platĩ*
- 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Poznámka 6.1.2. *Někdy se vynechává podmínka v hranaté závorce. Její ponechání rozšĩřuje spojitost i do izolovaných bodů $D(f)$ a umořňuje jednoduššĩ formulaci některých vět.*

řloha 6.1.3. *Definujte spojitost v bodě x_0 zleva a spojitost zprava.*

řloha 6.1.4. *Načrtněte graf funkce f tak, aby nastaly tyto jevy:*

- 1. v bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu,*
- 2. v bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menšĩ než limita zprava, obě jsou vlastní,*
- 3. v bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menšĩ než limita zleva,*

4. v bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva,
5. v bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota,
6. v bodě $x_6 \in D(f)$, limita zleva je menší než $f(x_6)$, limita zprava je větší než $f(x_6)$,
7. v bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$,
8. v bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$,
9. v bodě $x_9 \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$.

Definice 6.1.5. Hromadný bod x_0 definičního oboru $D(f)$, v němž funkce f není spojitá, se nazývá **bod nespojitosti** funkce f .

Definice 6.1.6 (druhy nespojitosti). Nespojitost v bodě x_0 se nazývá

- **odstranitelná** $\iff$
 - f má v bodě x_0 vlastní limitu,
 - ale funkční hodnota $f(x_0)$
 - * buď není definována
 - * nebo není rovna limitě;
- **neodstranitelná** ve všech ostatních případech nespojitosti.

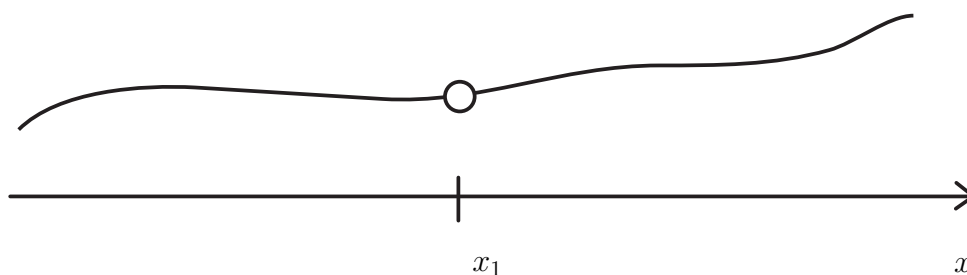
Neodstranitelnou nespojitost nazveme

- **1. druhu** $\iff$
 - v bodě x_0 existují obě jednostranné vlastní limity,
 - ale jsou různé;
 - rozdíl limit $f(x_0+) - f(x_0-)$ (někdy jen absolutní hodnotu tohoto rozdílu) nazýváme **skok**;
- **2. druhu** ve všech ostatních případech.

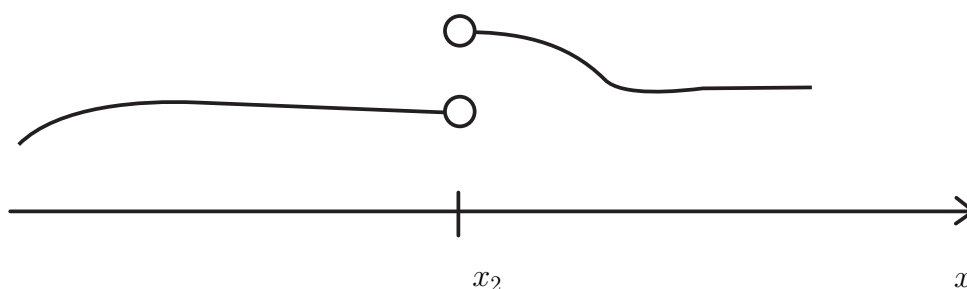
Poznámka 6.1.7. Odstranitelnou nespojitost lze odstranit tak, že funkci f v bodě x_0 dodefinujeme nebo předefinujeme tak, aby se funkční hodnota rovnala limitě funkce v bodě x_0 .

Úloha 6.1.8. Rozhodněte, jakou nespojitost má funkce f z úlohy 6.1.4 v bodech x_1 až x_9 .

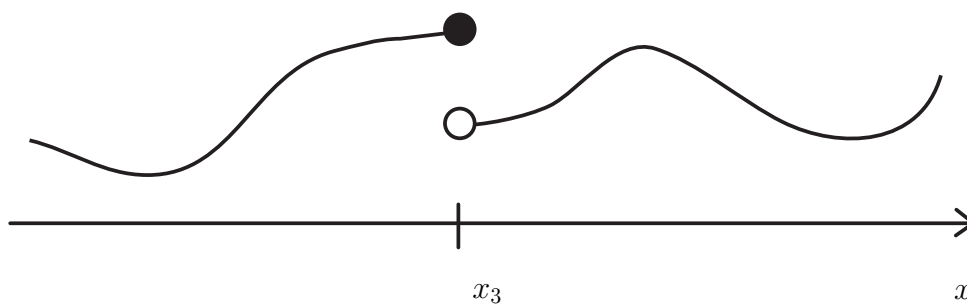
Úloha 6.1.9. Dokažte, že Dirichletova funkce je nespojitá pro každé $x \in \mathbb{R}$. Jaká je to nespojitost?



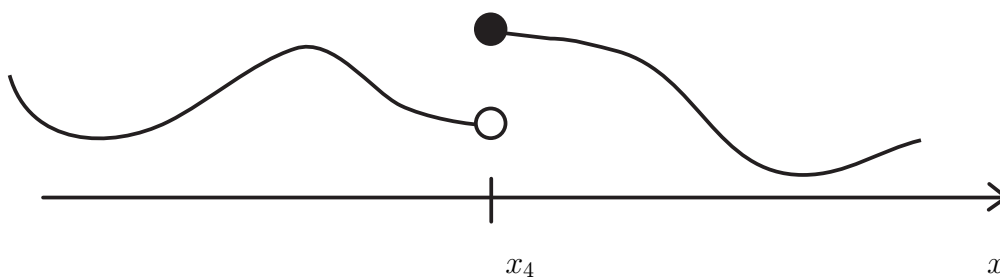
Obrázek 6.1: V bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu (DODEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).



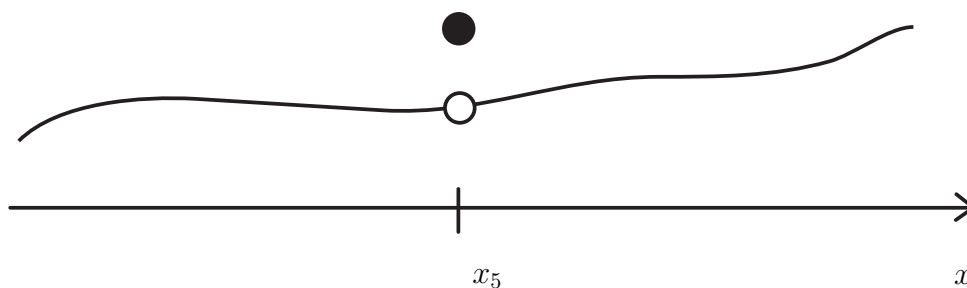
Obrázek 6.2: V bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menší než limita zprava, obě jsou vlastní (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



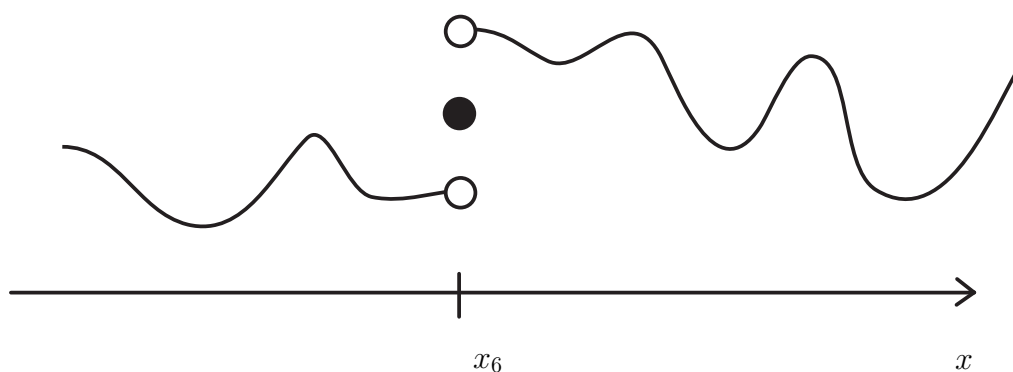
Obrázek 6.3: V bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



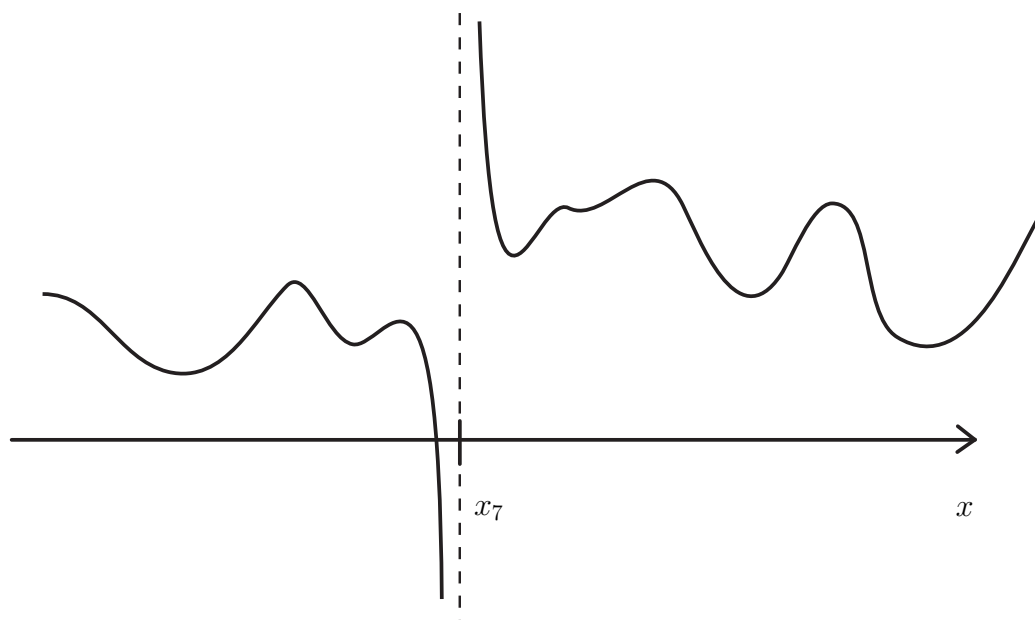
Obrázek 6.4: V bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



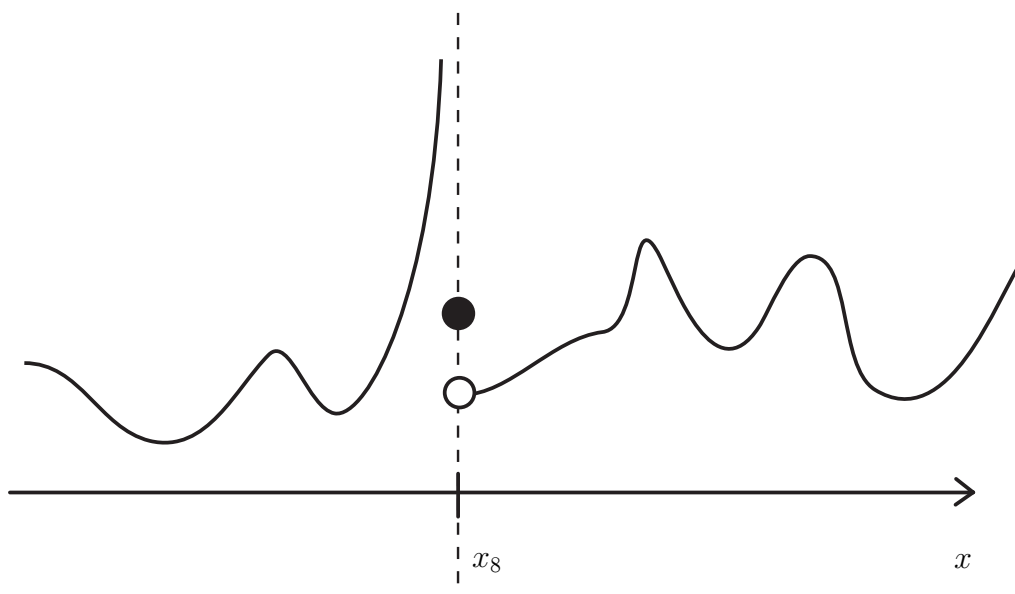
Obrázek 6.5: V bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota (PŘEDEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).



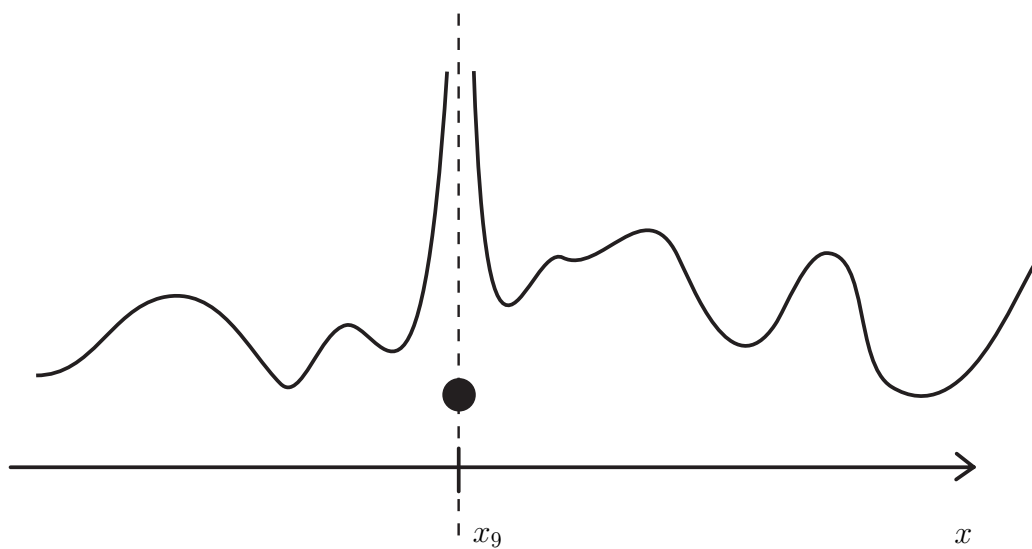
Obrázek 6.6: V bodě $x_6 \in D(f)$, limita zleva je menší než $f(x_6)$, limita zprava je větší než $f(x_6)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



Obrázek 6.7: V bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).



Obrázek 6.8: V bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).



Obrázek 6.9: V bodě $x_9 \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).

Dále uvádíme přehled základních vět o spojitosti v bodě x_0

V případě, že tento bod je hromadným bodem $D(f)$, plynou tyto věty z vět o limitách.

Věta 6.1.10. *Jsou-li funkce*

- f, g spojité v bodě x_0 a $c \in \mathbb{R}$,

pak jsou v tomto bodě spojité též funkce

- $f + g$,
- $f - g$,
- $c \cdot f$,
- $f \cdot g$,
- $|f|$
- a pro $g(x_0) \neq 0$ i $\frac{f}{g}$.

(Pro součty, rozdíly a součiny platí tato vlastnost při libovolném konečném počtu členů resp. činitelů.)

Věta 6.1.11. *Je-li funkce φ spojitá v bodě x_0 , funkce f spojitá v bodě $a = \varphi(x_0)$, pak složená funkce $f \circ \varphi$ je spojitá v bodě x_0 .*

Věta 6.1.12. *Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 , pak existuje okolí $U(x_0)$ tak, že na $D(f) \cap U(x_0)$ je f omezená (je to tzv. lokální omezenost spojitě funkce).*

Věta 6.1.13. *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$, funkce f je spojitá v x_0 a $f(x_0) \neq 0$.*

Pak existuje okolí $U(x_0)$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in U(x_0) \cap D(f) \implies \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0).$$

Věta 6.1.14. *Nechť x_0 je oboustranný hromadný bod $D(f)$.*

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \iff$ je v něm spojitá zleva i zprava.

Věta 6.1.15 (Pravidlo ε - δ). *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$.*

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in U(x_0, \delta) \cap D(f) \implies f(x) \in (f(x_0), \varepsilon).$$

Poznámka 6.1.16. • Tato vlastnost se též nazývá *Cauchyova definice spojitosti*; tedy takto lze definovat spojitost funkce v hromadném bodě $D(f)$ bez použití pojmu limita.

- V uvedeném pravidle ε - δ je ovšem pojem limity fakticky obsažen, viz pravidlo ε - δ pro limitu funkce.
- Podobně následující větu lze chápat jako Heineho definici spojitosti.

Věta 6.1.17. *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$.*

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \iff$

$$\forall x_n, x_n \in D(f), x_n \rightarrow x_0 \text{ platí } f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

Věta 6.1.18. ZÁKLADNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE JSOU SPOJITÉ VE VŠECH BODECH, V NICHŽ JSOU DEFINOVÁNY.

Úloha 6.1.19. *Pro které funkce naleznete důkaz věty 6.1.18 v příkladech předchozí kapitoly?*

6.2 Funkce spojité na množině

Spojitosť funkce na množině je globální vlastností funkce.

Definice 6.2.1. Říkáme, že funkce f **je spojitá na množině** $M \subset D(f) \iff$ je spojitá v každém bodě množiny M .

Zápis: $f \in C(M)$.

Říkáme, že funkce f **je spojitá** $\iff$ f je spojitá na $D(f)$.

Poznámka 6.2.2. Je třeba rozlišovat spojitost na $D(f)$ a spojitost na uzávěru $\overline{D(f)}$. Například funkce $f : y = 1/x$ je podle výše uvedené definice spojitá, neboť je spojitá na $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ale není spojitá na množině $\mathbb{R} = \overline{D(f)}$.

Někdy lze požadavek na spojitost funkce poněkud „oslabit“ a uvažovat funkce jen „po částech spojitě“ (viz například Newtonův vzorec v kapitole Riemannův určitý integrál).

Definice 6.2.3. Funkce f se nazývá **po částech spojitá** na $M \iff$

- je spojitá ve všech bodech množiny M
- s výjimkou konečného počtu bodů M ,
 - v nichž je definovaná
 - a má zde nespojitost 1. druhu

– nebo nespojitost odstranitelnou.

K tomu, abychom mohli spojitosti prakticky využívat, je třeba se přesvědčit, které z běžně používaných funkcí jsou spojité. Především i zde přirozeně platí:

Věta 6.2.4. VŠECHNY ZÁKLADNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE JSOU SPOJITÉ.

- Z vlastností spojitosti (věty 6.1.10, 6.1.11 a 6.1.18) plyne, že jsou spojité i všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí dostaneme konečným počtem aritmetických operací a skládání funkcí.
- Nejdůležitějším zvláštním případem spojitosti na M je spojitost na intervalu.

Přitom spojitost na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ znamená, že

- f je spojitá na (a, b) ,
- v levém krajním bodě a je spojitá zprava
- a v pravém krajním bodě b je spojitá zleva.

6.3 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

Věta 6.3.1 (1. Weierstrassova věta). *Je-li funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je na tomto intervalu omezená.*

Důkaz (sporem). • Kdyby funkce f nebyla omezená na $\langle a, b \rangle$ (například shora), pak by ke každému $n \in \mathbb{N}$ existoval bod $x_n \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(x_n) > n$.

- Posloupnost $\{x_n\} \subset \langle a, b \rangle$ je omezená, takže podle Bolzano–Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{x'_n\}$ s limitou x_0 , pro niž též $f(x'_n) > n$.
- Proto $f(x_0)$ je (podle Heineho definice spojitosti a podle věty o limitě nerovnosti)
 - jednak $+\infty$
 - a jednak reálné číslo vzhledem ke spojitosti f v každém bodě $\langle a, b \rangle$, tedy i v x_0 ,

a to je spor.

□

Úloha 6.3.2. *Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 1. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení.*

Věta 6.3.3 (2. Weierstrassova věta). *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak na tomto intervalu nabývá své největší i nejmenší hodnoty.*

Tedy existují body $c_1, c_2 \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$f(c_1) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), \quad f(c_2) = \min_{x \in \langle a, b \rangle} f(x).$$

Důkaz (části o maximu). • Podle 1. Weierstrassovy věty je f shora omezená, takže existuje konečné

$$\sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) = M.$$

- Stačí tedy dokázat, že existuje $c_1 \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(c_1) = M$.
- Kdyby takový bod c_1 neexistoval, byla by funkce

$$g(x) = M - f(x)$$

na $\langle a, b \rangle$ spojitá a kladná.

- Proto i funkce $\frac{1}{g(x)}$ by byla na $\langle a, b \rangle$ spojitá,
- tedy podle 1. Weierstrassovy věty omezená kladnou konstantou

$$L : \frac{1}{g(x)} < L \implies g(x) > \frac{1}{L} \implies f(x) < M - \frac{1}{L};$$

- dostali jsme spor se 2. vlastností suprema,
- takže $g(x)$ nemůže být stále kladná,
- tedy uvažovaný bod c_1 existuje.

□

Úloha 6.3.4. *Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 2. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení. (Například uvažte funkci $y = x$ na intervalu $(-1, 1)$.)*

Věta 6.3.5 (Bolzano-Cauchyova). *Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$ a platí-li*

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

pak existuje bod $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(\xi) = 0$.

Důkaz (Bolzanovou metodou půlení intervalů). • Interval $\langle a, b \rangle$ rozpůlíme bodem c_1 .

- Pokud $f(c_1) = 0$, je $\xi = c_1$.
- Jinak označíme $\langle a_1, b_1 \rangle$ tu polovinu, kde $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.
- Interval $\langle a_1, b_1 \rangle$ rozpůlíme bodem $c_2 \dots$
- Buď $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\xi = c_n$
- nebo dostáváme posloupnost vložených intervalů, které mají podle věty o vložených intervalech jediný společný bod ξ ; o něm se dokáže $f(\xi) = 0$.
 - Nemůže být $f(\xi) > 0$, neboť by existovalo okolí $U(\xi)$ tak, že $\forall x \in U(\xi)$ by bylo $f(x) > 0$
 - a to je spor (pro dosti velké n by bylo $\langle a_n, b_n \rangle \subset U(\xi)$).
 - Stejně tak nemůže platit, že $f(\xi) < 0$, proto $f(\xi) = 0$.

□

Této věty se užívá např. při řešení rovnic k důkazu existence řešení.

Úloha 6.3.6. *Dokažte, že rovnice $x + \sin(x - 1) = 0$ má alespoň jeden kořen.*

Řešení. Uvažujeme například $a = -2$, $b = 2$ (najděte menší interval!) □

Věta 6.3.7 (věta o mezihodnotě). *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b \rangle$,*

$$f(a) \neq f(b).$$

Pak funkce f nabývá každé hodnoty q mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Princip důkazu. Bolzano-Cauchyovu větu použijeme na funkci

$$g(x) = f(x) - q.$$

□

Důsledek 6.3.8. *Je-li funkce f spojitá na intervalu J , pak $f(J)$ je interval nebo jednobodová množina.*

Věta 6.3.9 (vztah mezi monotónností a prostotou u funkcí spojitých na intervalu). *Je-li funkce f spojitá na intervalu J , pak f je prostá právě tehdy, když je monotónní.*

Princip důkazu. • Vztah „ryze monotónní“ $\Rightarrow$ „prostá“ platí zřejmě i pro nespojitě funkce.

- Vztah „prostá“ $\Rightarrow$ „ryze monotónní“ se dokáže sporem.
 - Kdyby (prostá) funkce nebyla ryze monotónní, existovaly by tři body c_1, c_2, c_3 tak, že $f(c_2)$ by bylo větší (nebo menší) než $f(c_1)$ a $f(c_3)$.

- Z věty o mezihodnotě plyne existence bodů $x_1 \in (c_1, c_2)$, $x_2 \in (c_2, c_3)$ tak, že $f(x_1) = f(x_2)$,
- a to je spor s vlastností prostoty.

□

Úloha 6.3.10. *Sestrojte náčrtek k poslední části důkazu předchozí věty.*

Věta 6.3.11 (o spojitosti inverzní funkce). *Je-li funkce f na intervalu J spojitá a prostá, pak inverzní funkce f je též spojitá.*

Důkaz. Používá se ryzí monotónnost funkce f a důsledek věty o mezihodnotě. □

6.4 Stejnoměrná spojitost

Jako jsme vlastnost spojitosti „zmírnili“ spojitostí po částech, můžeme tuto vlastnost zase „zprísňovat“.

Definice 6.4.1. *Funkce f se nazývá **stejnoměrně spojitá** na množině $M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že pro každé dva body $x', x'' \in M$ platí:*

$$|x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Předně uvážíme, že stejnoměrná spojitost má smysl jen na množině (zejména na intervalu), neexistuje nějaká stejnoměrná spojitost v bodě. Je to tedy vlastnost globální.

V definici si dále uvědomíme, že δ závisí pouze na ε , tj. nezávisí na poloze bodů x', x'' v M ; u spojitosti na množině M obecně δ závisí také na bodu x_0 , tedy i když je funkce spojitá v každém bodě množiny M , nelze obecně k danému $\varepsilon > 0$ najít takové $\delta > 0$, které by bylo stejné, ať zvolíme x_0 kdekoli na M .

Například u funkce $y = \operatorname{tg} x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, když volíme x_0 „stále blíže“ k $\frac{\pi}{2}$, pak pro dané ε (třeba = 1) musíme volit δ stále menší a menší, aby pro $x \in U(x_0, \delta)$ zůstaly funkční hodnoty $f(x)$ v ε -okolí hodnoty $f(x_0)$.

Stejnoměrnou spojitost lze charakterizovat také ještě pomocí tzv. *oscilace funkce*.

Definice 6.4.2. *Nechť funkce f je definovaná a omezená na množině M . Číslo*

$$\omega = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x)$$

*se nazývá **oscilace funkce** f na množině M .*

Je-li funkce spojitá na uzavřeném intervalu, pak místo rozdílu suprema a infima můžeme vzít rozdíl maxima a minima.

Věta 6.4.3 (o oscilaci stejnoměrně spojitě funkce). *Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu J , právě když $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že na každém podintervalu $I \subset J$ délky menší než δ je oscilace funkce menší než ε .*

Vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti řeší následující dvě věty.

Věta 6.4.4 (vztah stejnoměrné spojitosti a spojitosti na množině M). *Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na M , pak je na M spojitá.*

Princip důkazu. Ze stejnoměrné spojitosti plyne spojitost v libovolném bodě x_0 , neboť $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in D(f)$ platí:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

□

Věta 6.4.5 (Cantorova věta). *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.*

Důkaz se provádí užitím Borelovy věty o pokrytí: Je-li uzavřený interval $\langle a, b \rangle$ pokryt systémem S_ν otevřených intervalů, pak existuje konečný podsystem $S_k \subset S_\nu$, který také pokrývá interval $\langle a, b \rangle$.

— * —

Kapitola 7

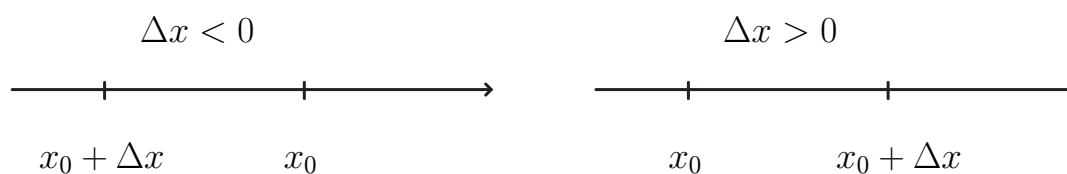
Derivace funkce

Derivace funkce patří mezi nejpoužívanější pojmy matematické analýzy. Derivace vyjadřuje rychlost změny a stojí proto i v základu četného praktického použití matematické analýzy.

7.1 Pojem derivace funkce

Mějme funkci f , která je definována v nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0 .

- Postoupíme-li z bodu x_0 o nějaké Δx (Δx je *přírůstek nezávisle proměnné*), dostaneme novou hodnotu nezávisle proměnné $x_0 + \Delta x$ ($\in U(x_0)$);
 - pro $\Delta x < 0$ je tato hodnota vlevo
 - a pro $\Delta x > 0$ je vpravo od x_0 .

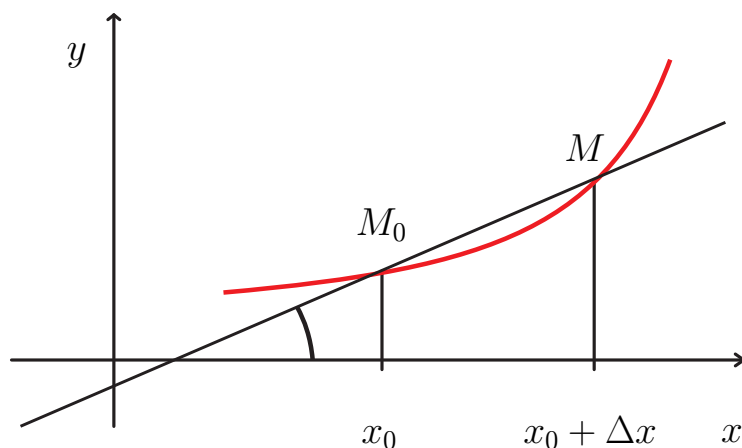


Obrázek 7.1: Přírůstky nezávisle proměnné.

- Funkční hodnota se přitom změní z hodnoty $f(x_0)$ na hodnotu $f(x_0 + \Delta x)$ o rozdíl $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
 - Δy je tzv. *přírůstek funkce*.
 - Podíl $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ je tzv. *diferenciální podíl*;
 - jeho geometrickým významem je směrnice sečny ke grafu funkce,

– tj. $\operatorname{tg} \alpha$, kde α je úhel, který svírá sečna M_0M s osou x .

Úloha 7.1.1. Doplňte do obrázku 7.2 označení: α , Δx , a Δy .



Obrázek 7.2: Sečna grafu.

Pro spojitou funkci f platí

$$\Delta x \rightarrow 0 \implies \Delta y \rightarrow 0,$$

takže pro $\Delta x \rightarrow 0$ je diferenciální podíl $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ výraz typu $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Definice 7.1.2. Říkáme, že **funkce f má v bodě x_0 derivaci**, právě když je f definována na nějakém okolí bodu x_0 a existuje (vlastní) limita

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tuto limitu nazýváme **derivace funkce f v bodě x_0** a značíme ji $f'(x_0)$.

Derivace v bodě je tedy nějaké číslo.

Geometrický význam derivace funkce v bodě:

$f'(x_0)$ znamená směrnici tečny grafu funkce v bodě M_0 , tj. $\operatorname{tg} \varphi$, kde φ je úhel který svírá tečna v bodě M_0 s osou x .

Úloha 7.1.3. Načrtněte dle obrázku 7.2 obrázek, v němž vyznačíte geometrický význam derivace funkce v bodě.

Fyzikální význam derivace v bodě:

Je-li zákon dráhy $s = s(t)$, pak diferenciální podíl $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ znamená průměrnou rychlost a $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$ znamená okamžitou rychlost.

Úloha 7.1.4. Podle definice vypočtete derivaci funkce $y = x^2$ v bodě $x_0 = 3$.

Jestliže v definici derivace nahradíme limitu jednostrannou limitou, dostaneme definice jednostranných derivací (derivace zleva, zprava), které označujeme $f'(x_0-)$ a $f'(x_0+)$.

Je-li $f'(x_0) = k$, pak existují obě jednostranné derivace a jsou rovny číslu k ; také naopak, existují-li obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a rovnají se témuž číslu k , pak existuje derivace funkce f v bodě x_0 a je rovna k , jak plyne z vět o limitách.

Úloha 7.1.5. Vypočtete obě jednostranné derivace funkce $f : y = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

Z výpočtu plyne, že funkce $y = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci.

Jestliže limita diferenciálního podílu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ je pro $\Delta x \rightarrow 0$ rovna $+\infty$ nebo $-\infty$, pak mluvíme o nevlastních derivacích (též zleva, zprava).

Výrok „existuje derivace“ však bude vždy znamenat „existuje vlastní derivace“.

Úloha 7.1.6. Je dána funkce $f : y = \sqrt{1-x^2}$. Ověřte, že $f'(1-) = +\infty$.

Úloha 7.1.7. Určete derivaci funkce $y = x^2$ v bodě x .

Derivace jako funkce

Definice 7.1.8. Má-li funkce f derivaci v každém bodě x nějaké množiny M , říkáme, že **má derivaci na množině** M ; značíme ji f' nebo $f'(x)$.

- Vidíme, že derivace funkce na množině M je opět funkce.
- Například dle úlohy 7.1.7 derivací funkce $y = x^2$ na $\mathbb{R}$ je funkce $y = 2x$.
- Chceme-li pak zjistit derivaci $f'(x_0)$ v nějakém bodě x_0 , stačí do $f'(x)$ dosadit x_0 za x .
- Například pro f z úlohy 7.1.7 je $f'(3) = (2x)_{x=3} = 6$ (srovnej s úlohou 7.1.4).

Přehled označení derivací:

v bodě:	jako funkce:	původ označení:
$f'(x_0)$	$y', f', f'(x)$	Lagrange
$\frac{df(x_0)}{dx}, \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$	$\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x))$	Leibniz
$Df(x_0)$	$Dy, Df(x)$	Cauchy

- Každé z těchto označení má své výhody.
- Například v Leibnizově je dobře vidět, podle které proměnné se derivuje, takže se dobře uplatňuje například při manipulacích s funkcemi složenými a inverzními;
- Cauchyovo označování je vhodné například při řešení diferenciálních rovnic operátorovou metodou;
- operaci definovanou operátorem D nazýváme zpravidla *derivování* (podle dané proměnné).
- Chceme-li v Lagrangeově označení zdůraznit proměnnou, podle níž se derivuje, napíšeme tuto proměnnou jako index, například f'_u .

Věta 7.1.9 (vztah mezi derivací a spojitostí). *Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v něm spojitá.*

Princip důkazu. Dokážeme, že platí $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$. □

Úloha 7.1.10. *Dle definice derivace stanovte derivace funkce $y = x^n$ pro $n \in \mathbb{N}$.*

Úloha 7.1.11. *Dle definice derivace stanovte derivace funkce $y = \sin x$ [pozor na to, jak se přitom využije spojitosti funkce kosinus].*

7.2 Vlastnosti derivací

Věta 7.2.1 (základní vlastnosti derivací). *Nechť funkce $u = f(x)$, $v = g(x)$ mají na množině M derivace $u' = f'(x)$, $v' = g'(x)$ a $c \in \mathbb{R}$.*

Pak funkce $c \cdot f$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ a pro $g(x) \neq 0$ i $\frac{f}{g}$ mají na M derivace a platí:

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,
2. $(u + v)' = u' + v'$, $(u - v)' = u' - v'$,
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Důkaz. Provádí se podle definice derivace, u součinu a podílu se přidá a odečte určitá pomocná funkce, využívá se tu též spojitosti. $\square$

Pravidla pro sčítání a pro násobení lze matematickou indukcí rozšířit na n členů (činitelů), $n \in \mathbb{N}$. Pro násobení tří funkcí tak například máme

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Věta 7.2.2 (derivace složené funkce). *Nechť existuje složená funkce $f \circ \varphi$ a nechť*

- 1) *funkce $u = \varphi(x)$ má v bodě x derivaci $\varphi'(x)$,*
- 2) *funkce $y = f(u)$ má v odpovídajícím bodě $u (= \varphi(x))$ derivaci $f'(u)$.*

Pak funkce $f \circ \varphi$ má v bodě x derivaci

$$(f \circ \varphi)'(x) = (f'(u) \cdot \varphi'(x)) = (f \circ \varphi)'_u(x) \cdot \varphi'(x).$$

Úloha 7.2.3. *Užitím věty o derivaci složené funkce máme najít derivaci funkce $y = \sin^2 x$.*

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci složené funkce tvar, jako úprava zlomků: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$.

Věta 7.2.4 (derivace inverzní funkce). *Nechť f je ryze monotónní na intervalu J a má tu derivaci f' . Pak inverzní funkce f^{-1} má derivaci na $f(J)$ a platí*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Důkaz. U obou vět se provádí dle definice derivace a používá se fakt, že

$$\Delta y \rightarrow 0 \iff \Delta x \rightarrow 0.$$

$\square$

Úloha 7.2.5. *Užitím předchozí věty zjistěte derivaci funkce $y = \arcsin x$.*

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci inverzní funkce tvar, jako úprava zlomku:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

7.3 Derivace elementárních funkcí

Věta 7.3.1 (přehled vzorců pro derivace elementárních funkcí).

- $(c)' = 0$ (derivace konstanty);
- $(x^m)' = mx^{m-1}$ (platí pro libovolné $m \neq 0$); zvláště $(x)' = 1$;
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; zejména $(e^x)' = e^x$;
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; zejména $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$;
- $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{cotg} x)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$;
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;
- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$;
- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
- $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; $(\operatorname{coth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$;
- $(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $(\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

Důkaz. Provádí se užitím definice derivace (někde i s užitím speciálních limit), vlastností derivací, vět o derivaci složené funkce a inverzní funkce. $\square$

Úloha 7.3.2. Určete derivaci funkce $y = (\cos x)^{\sin x}$ pro x v 1. kvadrantu.

7.4 Diferenciál funkce

Řešíme problém: funkci f v okolí bodu x_0 aproximovat lineární funkcí g , tj. nalézt takovou lineární funkci g , aby platila podmínka

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

Označme $x = x_0 + h$; zřejmě $g(x) = f(x_0) + ah$, takže čitatel posledního zlomku lze zapsat jako

$$\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ah.$$

Výše uvedenou podmínku lze tak zapsat jako

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

Z definice funkce $\omega(h)$ plyne, že přírůstek funkce $\Delta f(x_0)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\Delta f(x_0) (= f(x_0 + h) - f(x_0)) = ah + \omega(h).$$

Definice 7.4.1. *Lineární část přírůstku funkce, tedy funkci ah , nazýváme **diferenciál funkce f v bodě x_0** , označujeme jej $df(x_0)$ a funkci, která má diferenciál v bodě x_0 , nazýváme **diferencovatelnou v bodě x_0** . Funkci, která má diferenciál v každém bodě množiny M , nazýváme **diferencovatelnou na množině M** .*

Věta 7.4.2 (existence a jednoznačnost diferenciálu). *Funkce f je diferencovatelná v bodě $x_0 \iff$ má v bodě x_0 vlastní derivaci. Diferenciál $df(x_0)$ funkce f v bodě x_0 je pak jednoznačně určen vzorcem*

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h,$$

kde $h \in \mathbb{R}$ je přírůstek nezávisle proměnné.

Předchozí věta tedy říká, že výroky „ f má v bodě x_0 (vlastní) derivaci“ a „ f je v bodě x_0 diferencovatelná“ jsou ekvivalentní, znamenají totéž. (U funkcí více proměnných je tomu jinak.)

Místo h používáme pro přírůstek nezávisle proměnné též označení Δx nebo dx a název *diferenciál nezávisle proměnné*. Je to motivováno skutečností, že diferenciál lineární funkce $y = x$ je $dx = 1 \cdot h (= 1 \cdot \Delta x)$. Diferenciál funkce pak též zapisujeme $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$. Výše uvedené poznatky nám umožňují definovat diferenciál funkce přímo uvedeným vzorcem.

Definice 7.4.3. *Diferenciálem funkce f v bodě x_0 nazýváme výraz*

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx,$$

kde $dx (= \Delta x)$ je konstantní přírůstek (diferenciál) nezávisle proměnné.

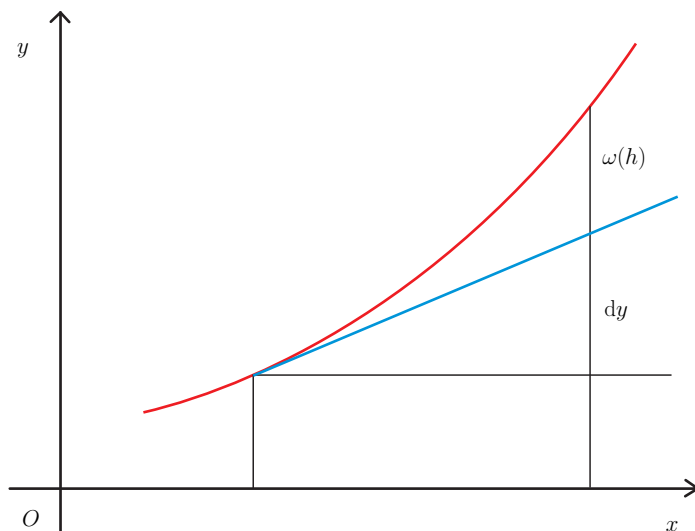
Diferenciálem funkce f na množině M nazýváme funkci

$$dy = f'(x) \cdot dx,$$

kde $x \in M$.

Ze vztahu $dy = f'(x) \cdot dx$ vidíme, že Leibnizův symbol $\frac{dy}{dx}$ pro derivaci funkce je skutečným zlomkem — podílem diferenciálu funkce a diferenciálu nezávisle proměnné. Také vzorce pro derivaci složené funkce a inverzní funkce (viz 7.2) lze chápat jako operace se skutečnými zlomky.

Úloha 7.4.4. *Doplňte obrázek 7.3, který znázorňuje geometrický význam diferenciálu funkce jako přibližné hodnoty přírůstku funkce stanovené na tečně ke grafu funkce.*



Obrázek 7.3: Geometrický význam diferenciálu funkce.

Užití diferenciálu

Užití diferenciálu *v přibližných výpočtech* je založeno na přibližné rovnosti

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Úloha 7.4.5. Pomocí diferenciálu funkce vypočítejte přibližnou hodnotu $\sqrt{0,982}$.

Řešení.

$$\sqrt{0,982} = f(0,982) = f(1 - 0,018) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

$$\sqrt{0,982} \approx f(1) + f'(1) \cdot (-0,018) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(-0,018) = 1 - \frac{0,018}{2} = 0,991.$$

□

Užití diferenciálu *při odhadu chyb* je založeno na tom, že když h (tedy dx) položíme rovno absolutní chybě měření, udává df přibližnou hodnotu absolutní chyby vypočtené hodnoty $y = f(x)$.

Úloha 7.4.6. Počítáme objem koule, jejíž průměr x jsme změřili s chybou δx . Určete chybu výsledku.

Řešení. Vzorec pro objem koule o poloměru r , resp. průměru x :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi x^3.$$

Pokud x měříme s chybou δx , dostaneme při označení $\hat{x} = x + \delta x$:

$$\hat{V} = \frac{1}{6}\pi\hat{x}^3 = \frac{1}{6}\pi(x + \delta x)^3 \approx \frac{1}{6}\pi x^3 + \left[\frac{1}{6}\pi x^3\right]' \cdot \delta x = V + \left[\frac{1}{2}\pi x^2\right] \cdot \delta x = V + \delta V.$$

Přibližná chyba výsledku je tedy $\delta V = \frac{1}{2}\pi x^2 \delta x$, přičemž přibližná relativní chyba výsledku je

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2 \delta x}{\frac{1}{6}\pi x^3} = 3 \frac{\delta x}{x},$$

a tedy relativní chyba výsledku je rovna trojnásobku relativní chyby měření průměru. $\square$

Diferenciál složené funkce

Mějme funkci $y = f(u)$, kde u je nezávisle proměnná. Pak její diferenciál je

$$df (= dy) = f'(u) \cdot du.$$

Určeme nyní df v případě, že u není nezávisle proměnná, ale $u = \varphi(x)$. Pak

$$df = [f \circ \varphi(x)]' \cdot dx = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = f'(u) \cdot du,$$

neboť $du = \varphi'(x) dx$.

Vidíme, že diferenciál funkce je invariantní při přechodu na složenou funkci. (Tuto vlastnost má pouze 1. diferenciál, viz 7.5, a používáme ji zejména při výpočtu neurčitých integrálů.)

7.5 Derivace a diferenciály vyšších řádů

Funkce $y = \sin x$ má derivaci $y' = \cos x$. Toto je opět funkce, která má derivaci a platí $(y')' = -\sin x$.

Definice 7.5.1. Má-li funkce f' v bodě x (na množině M) derivaci $(f')'$, označíme tuto derivaci f'' a nazveme **derivace druhého řádu (druhá derivace)** funkce f . Podobně **derivaci n -tého řádu (n -tou derivaci)** $f^{(n)}$ definujeme vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Označení podle Leibnize: $\frac{d^2 f}{dx^2}$ (čti „d dvě f podle dx na druhou“), $\frac{d^2 f}{dy^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$, $\frac{d^n f}{dx^n}$, $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)_{x=x_0}$, apod.

Označení podle Cauchyho: $D^2 f$, $D^n y$, apod.

Úloha 7.5.2. Určete všechny derivace funkce $y = 3x^2 - 2x - 1$.

Úloha 7.5.3. Určete 2. derivaci funkce $y = \sin x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Derivace $y'', \dots, y^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, nazýváme *derivace vyšších řádů*. Upotřebíme je např. při vyšetřování průběhu funkce (viz kapitolu 9) nebo při určování koeficientů Taylorova rozvoje (viz kapitolu 8). Má proto smysl uvažovat o vzorcích, které usnadní výpočet n -té derivace.

Některé vzorce pro n -tou derivaci elementárních funkcí

- 1) Funkce $e^x : \forall n \in \mathbb{N}$ je $(e^x)^{(n)} = e^x$;
podobně pro funkci a^x máme $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$.
- 2) Funkce $\sin x, \cos x$.
Platí: $f^{(n+4)} = f^{(n)}$, takže takto lze zjistit derivaci libovolného řádu. Platí též vzorec $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ a podobný pro $(\cos x)^{(n)}$.
- 3) Funkce $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$. Zde $f^{(n+2)} = f^{(n)}$.
- 4) Funkce x^n , $n \in \mathbb{N}$. Zde $(x^n)^{(n)} = n!$, $(x^n)^{(m)} = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > n$.

Leibnizovo pravidlo pro n -tou derivaci součinu:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2}u^{(n-2)}v'' + \dots + \binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

Úloha 7.5.4. Určete 120. derivaci funkce $y = x^2 e^x$.

Řešení.

$$e^x(x^2 + 240x + 14280).$$

□

Diferenciály vyšších řádů

Podobně jako u derivací je možno definovat *diferenciál 2. řádu* (2. diferenciál) jako diferenciál diferenciálu funkce (diferenciál funkce pak nazýváme 1. diferenciál funkce).

Je-li x nezávisle proměnná, je dx konstantní přírůstek, takže pro funkci $y = f(x)$ je

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x) \cdot dx) = (f'(x) \cdot dx)' \cdot dx = f''(x) \cdot dx^2.$$

Vidíme, že v Leibnizově označení 2. derivace je $\frac{d^2y}{dx^2}$ skutečný podíl 2. diferenciálu a 2. mocniny dx .

Definice 7.5.5. *Diferenciál n -tého řádu (n -tý diferenciál) funkce f je definován rekurentním vztahem:*

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Věta 7.5.6. *Za předpokladu existence vlastní derivace n -tého řádu funkce $f(x)$, kde x je nezávisle proměnná, je*

$$d^n f = f^{(n)}(x) \cdot dx^n.$$

Úloha 7.5.7. *Odvoďte vzorec pro druhý diferenciál složené funkce.*

Řešení. $d^2 y = f''(u) du^2 + f'(u) d^2 u$, kde $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. □

Z výsledku je vidět, že diferenciály vyšších řádů nejsou invariantní vzhledem ke skládání funkcí (při přechodu na složenou funkci přibývá další člen: $f'(u) d^2 u$).

7.6 Derivace různých typů funkcí

1) Funkce více proměnných

Derivujeme vždy podle jedné proměnné a ostatní považujeme za konstantu; dostáváme tzv. *parciální derivace* s označením (například pro funkci $z = f(x, y)$) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, atd.

Úloha 7.6.1. *Vypočtěte všechny parciální derivace 2. řádu pro funkci $z = x \sin xy$.*

2) Funkce dané parametricky

Nezávisle proměnná x i hodnota funkce y jsou vyjádřeny soustavou $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in (\alpha, \beta)$. Derivaci $\frac{dy}{dx}$ určíme pomocí diferenciálů (užitím uvedeného Leibnizova symbolu): $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t) dt}{\varphi'(t) dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ (tedy derivace je též funkcí parametru).

Úloha 7.6.2. *Odvoďte vzorec pro derivaci 2. řádu funkce dané parametricky.*

Řešení. $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$. □

Úloha 7.6.3. *Funkce f je dána parametricky: $\begin{matrix} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \end{matrix} t \in \langle 0, \pi \rangle$.*

Vypočtěte $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

3) Funkce dané implicitně

Funkce $y = y(x)$ nechť je dána implicitní rovnicí $f(x, y) = 0$ pro $x \in (a, b)$. Na daném intervalu tedy platí identicky $f(x, y(x)) = 0$. Proto také derivace levé strany podle x je identicky rovna nule, tj. $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$ a z toho vypočteme $\frac{dy}{dx}$. Derivaci $\frac{d^2y}{dx^2}$ vypočteme, když tuto rovnost znovu derivujeme podle x s tím, že $y = y(x)$.

Úloha 7.6.4. Vypočtěte 1. a 2. derivace funkce dané implicitní rovnicí $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Řešení. $y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$. □

4) Funkce dané graficky

Mějme funkci f danou na intervalu J „hladkým“ grafem, cílem je nalezení grafu derivace.

Zpravidla lze použít tento postup: Na J zvolíme přiměřeně „hustou“ množinu M bodů, do níž zahrneme zejména body, v nichž má funkce extrém nebo inflexi (viz kapitolu 9). Dále sestrojíme bod $T[-1; 0]$. Pro každý bod $x_i \in M$ pak:

- sestrojíme přímkou $x = x_i$ (na níž pak — po jejím zjištění — vyznačíme hodnotu derivace funkce v bodě x_i) a její průsečík A_i s grafem funkce f ;
- v bodě A_i sestrojíme tečnu t_i ke grafu funkce f ;
- bodem T s ní vedeme rovnoběžku $t'_i \parallel t_i$ a stanovíme průsečík B'_i přímky t'_i s osou y ; velikost orientované úsečky OB' je hodnotou $f'(x_i)$;
- úsečku OB' přeneseme na přímkou $x = x_i$ od bodu x_i (ležícího na ose x) a dostaneme bod B grafu derivace.

Úloha 7.6.5. Popsaný postup grafického zjištění derivace funkce použijte na načrtnutý graf funkce odpovídající přibližně funkci $y = -(x - 2)^2 + 2$.

5) Funkce dané tabulkou

Uvažujme tři po sobě jdoucí tabulkové hodnoty funkce f v bodech x_{-1}, x_0, x_1 . Derivaci zprava $Df(x_0+)$ nahradíme „pravým diferenciálním podílem“ $\delta f(x_0+)$, derivaci zleva $Df(x_0-)$ „levým diferenciálním podílem“ $\delta f(x_0-)$ a derivaci $Df(x_0)$ „aritmetickým průměrem hodnot“ $\delta f(x_0-)$ a $\delta f(x_0+)$, tedy

$$\delta f(x_0-) = \frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{x_0 - x_{-1}}, \quad \delta f(x_0+) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$Df(x_0) = \frac{1}{2}(\delta f(x_0-) + \delta f(x_0+)).$$

Úloha 7.6.6. *Funkce f je dána tabulkou $f(3, 7) = 50,653$, $f(3, 8) = 54,872$, $f(3, 9) = 59,319$. Vypočtete derivaci $f'(3, 8)$.*

Řešení. $\delta f(3, 8-) = 42,19$, $\delta f(3, 8+) = 44,47$, $Df(3, 8) = 43,33$; pro kontrolu: platí $f(x) = x^3$, takže $f'(3, 8) = 43,32$, chyba výpočtu je menší než 0,03%. $\square$

— * —

Kapitola 8

Základní věty diferenciálního počtu

8.1 Úvod

Věta 8.1.1 (Fermatova). *Nechť funkce f je definována na M a nabývá v některém vnitřním bodě $x_0 \in M$ své největší nebo nejmenší hodnoty. Má-li f v bodě x_0 derivaci, pak $f'(x_0) = 0$.*

Princip důkazu. Uvažujeme znaménko podílu $d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ v levém a pravém okolí bodu x_0 , v němž nabývá své největší (nejmenší) hodnoty. Z věty o limitě nerovnosti pak plyne $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} d(x) = 0$. $\square$

Fermatovu větu lze vztáhnout na lokální extrém a jeho okolí, tato věta má tedy lokální charakter a lze ji formulovat takto: má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a má v něm derivaci, pak se tato derivace rovná nule. Tedy:

Věta 8.1.2. *Nutnou podmínkou existence lokálního extrému funkce f v bodě x_0 je, že v něm derivace $f'(x_0)$ buď neexistuje nebo je rovna nule.*

Pro diferencovatelnou funkci f je nutnou podmínkou rovnost $f'(x_0) = 0$.

8.2 Věty o střední hodnotě

Uvedeme zde trojici vět (Rolleova, Lagrangeova, Cauchyova), které jsou obvykle nazývány větami o střední hodnotě diferenciálního počtu. Jádrem je věta Lagrangeova.

Věta 8.2.1 (Rolleova). *Nechť funkce f*

- 1) *je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,*

2) má derivaci na intervalu (a, b) ,

3) splňuje rovnost $f(a) = f(b)$.

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz. Podle 2. Weierstrassovy věty nabývá funkce f v nějakém bodě $c_1 \in \langle a, b \rangle$ své nejmenší hodnoty a v nějakém bodě $c_2 \in \langle a, b \rangle$ své největší hodnoty. Kdyby c_1 i c_2 byly oba krajními body intervalu $\langle a, b \rangle$, platilo by $f(x) = \text{konst.}$, takže za ξ bychom mohli vzít libovolný bod intervalu (a, b) . Je-li jeden z bodů c_1, c_2 vnitřním bodem intervalu (a, b) (označme jej c), pak tvrzení plyne z Fermatovy věty, kde $\xi = c$. $\square$

Takových bodů, v nichž je derivace funkce f rovna 0, může být i více; například funkce $\sin x$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$ splňuje předpoklady Rolleovy věty a její derivace je nulová v bodech $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$.

Úloha 8.2.2. Provedte grafickou ilustraci Rolleovy věty.

Úloha 8.2.3. Formou protipříkladů ukažte, že všechny tři předpoklady Rolleovy věty jsou nutné. Uveďte tedy příklady tří funkcí f_1, f_2, f_3 , pro něž neplatí tvrzení Rolleovy věty, a to tak, že

- 1) funkce f_1 je nespojitá v jediném bodě intervalu $\langle a, b \rangle$, ale předpoklady 2 a 3 jsou splněny;
- 2) funkce f_2 nemá derivaci v jediném bodě intervalu (a, b) , ale předpoklady 1 a 3 jsou splněny;
- 3) pro funkci f_3 platí $f_3(a) \neq f_3(b)$, ale předpoklady 1 a 2 jsou splněny.

Věta 8.2.4 (Lagrangeova). Nechť funkce f

- 1) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
- 2) má derivaci na intervalu (a, b) ,

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že platí $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

Důkaz. Zavedeme pomocnou funkci $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ a ověříme, že jsou pro ni splněny předpoklady Rolleovy věty. Z tvrzení Rolleovy věty pro funkci F pak plyne tvrzení věty Lagrangeovy. $\square$

Úloha 8.2.5. Provedte grafickou ilustraci Lagrangeovy věty.

Úloha 8.2.6. *Formou proti příkladů (dle 8.2.3) ukažte, že oba předpoklady Lagrangeovy věty jsou nutné.*

Lagrangeova věta se používá v různých tvarech; některé uvedeme.

Položíme-li $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$ a označíme-li θ číslo z intervalu $(0, 1)$, lze tvrzení upravit takto:

Pak existuje $\theta \in (0, 1)$ tak, že platí

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Označíme-li $x = x_0 + \Delta x$, lze vztah z Lagrangeovy věty zapsat ve tvaru

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

Jiný zápis:

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x,$$

ukazuje, proč se Lagrangeově větě říká též *věta o přírůstku funkce*.

Lagrangeova věta má četné důsledky, z nichž některé lze posuzovat jako samostatné a významné výsledky matematické analýzy (viz 8.3).

Věta 8.2.7 (Cauchyho věta, zvaná též *zobecněná věta o střední hodnotě*). *Nechť funkce f , g*

- 1) *jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$,*
- 2) *mají derivace na intervalu (a, b) ,*
- 3) *$g'(x) \neq 0$ na intervalu (a, b) .*

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Důkaz. Předně $g(a) \neq g(b)$, neboť jinak by podle Rolleovy věty existoval bod $\xi_r \in (a, b)$ tak, že by $g'(\xi_r) = 0$, což by bylo ve sporu s předpokladem 3. Zavedeme pomocnou funkci

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]$$

a ověříme, že jsou pro F na $\langle a, b \rangle$ splněny předpoklady Rolleovy věty. V (a, b) tedy existuje ξ tak, že $F'(\xi) = 0$, tedy

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) - f'(\xi) \cdot [g(b) - g(a)] = 0,$$

z čehož plyne tvrzení. □

Cauchyova věta se používá například k důkazu l'Hospitalova pravidla (viz 8.3). Všimněme si ještě vztahu uvedených tří vět o střední hodnotě: implikace

$$(R) \implies (L), \quad (R) \implies (C)$$

znázorňují, že pomocí Rolleovy věty jsme dokázali zbývající dvě. Avšak také je $(L) \implies (R)$, neboť tvrzení Rolleovy věty lze chápat jako zvláštní případ tvrzení věty Lagrangeovy, když platí $f(a) = f(b)$. Stejně tak lze ukázat, že Lagrangeova věta je zvláštním případem věty Cauchyovy, tj. $(C) \implies (L)$, jestliže $g(x) = x$. Jsou tedy všechny tři věty o střední hodnotě navzájem ekvivalentní.

8.3 Některé důsledky vět o střední hodnotě

Nejprve uvedeme dva typické důsledky vět o střední hodnotě; na jednom je založen pojem neurčitého integrálu, druhý umožňuje jednoduchý výpočet limit funkcí.

Věta 8.3.1 (o konstantní funkci). *Funkce f je na intervalu (a, b) konstantní $\iff$ má na (a, b) derivaci a $\forall x \in (a, b)$ platí $f'(x) = 0$.*

Důkaz. Z definice derivace plyne, že funkce konstantní na (a, b) má na (a, b) derivaci rovnu 0. Naopak nechť na (a, b) je $f'(x) = 0$. Dokážeme, že pro každé dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$ platí $f(x_1) = f(x_2)$. Zvolme označení tak, aby $x_1 < x_2$. Pak na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty, tedy existuje bod $\xi \in \langle x_1, x_2 \rangle$ tak, že je

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f'(\xi).$$

Rovnost $f(x_2) = f(x_1)$ plyne z toho, že derivace ve výše uvedeném vztahu je nulová. $\square$

Důsledek 8.3.2. *Mají-li dvě funkce f, g na (a, b) stejné derivace, tj. $f'(x) = g'(x)$, pak se na tomto intervalu liší jen o konstantu, tj. $\exists C \in \mathbb{R}$ tak, že na (a, b) je $f(x) = g(x) + C$.*

Tímto důsledkem jsou vytvořeny předpoklady k definici pojmu neurčitý integrál. Tedy primitivní funkcí například k funkci $\cos x$ je nejen funkce $\sin x$, ale také každá funkce tvaru $\sin x + C$, kde $C \in \mathbb{R}$. *Neurčitý integrál* jako množina všech primitivních funkcí k funkci f je podle důsledku Lagrangeovy věty množinou všech funkcí tvaru $F(x) + C$, kde F je jedna z primitivních funkcí k funkci f a C je libovolná (integrační) konstanta.

Následující věta se týká výpočtu limit typu $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right]$. Podobnou větu lze vyslovit i pro limity typu $\left[\begin{smallmatrix} \infty \\ \infty \end{smallmatrix} \right]$ a obě pak použít k výpočtu několika dalších typů limit.

Věta 8.3.3 (L'Hospitalovo pravidlo). *Nechť*

1) *funkce f, g mají derivace v $P(a)$, kde $a \in \mathbb{R}^*$,*

2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$

3) *existuje vlastní nebo nevlastní $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$.*

Pak existuje i $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a rovná se K .

Princip důkazu (pro $a \in \mathbb{R}, x \rightarrow a+$. Podle 2) lze doplnit definici funkcí f, g tak, aby byly spojité v $U(a)$, když položíme $f(a) = g(a) = 0$. Existuje pak interval $\langle a, b \rangle \subset U(a+)$ tak, že obě funkce f, g jsou na něm spojité a na (a, b) mají derivaci. Předpoklady Cauchyovy věty jsou tak splněny nejen na intervalu $\langle a, b \rangle$, ale na každém podintervalu $\langle a, x \rangle \subset \langle a, b \rangle$. Podle Cauchyovy věty pak na každém intervalu $\langle a, x \rangle$ existuje bod ξ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pro $x \rightarrow a+$ je též $\xi \rightarrow a+$. Podle předpokladu existuje $\lim_{\xi \rightarrow a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = K$ a vzhledem k rovnosti $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ má stejnou limitu pro $x \rightarrow a+$ i podíl na její levé straně. $\square$

Úloha 8.3.4. *Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arctg(x-2)}{x^2-4}$.* $\left[\frac{1}{4}\right]$

Úloha 8.3.5. *Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$.* $[1]$

Úloha 8.3.6. *Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+5x+4}{3x^3+2x^2+1}$.* $[2]$

Z důkazu věty je zřejmé, že l'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity, což už jsme měli i v úloze 8.3.6.

Úloha 8.3.7. *Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\cotg x}$.* $[0]$

L'Hospitalovo pravidlo neplatí naopak a to v tomto smyslu: z existence limity podílu funkcí neplyne existence limity podílu jejich derivací nebo, což je totéž, z neexistence limity podílu derivací ještě neplyne neexistence limity podílu funkcí.

Například $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{|x|} = 1$.

Někdy je potřebné použít l'Hospitalovo pravidlo i vícekrát, případně provádět při výpočtu úpravy, které postup zjednoduší.

Úloha 8.3.8. Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 x}$. $\left[\frac{9}{2}\right]$

Při výpočtu limit typu $[0 \cdot \infty]$ součinu funkcí $f \cdot g$ upravíme součin funkcí na podíl $f/(1/g)$ nebo naopak $g/(1/f)$ tak, aby to bylo vhodné pro použití l'Hospitalova pravidla (tedy například funkci logaritmickou je zpravidla nejvhodnější nechat v čitateli).

Úloha 8.3.9. Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x$. $[0]$

Počítáme-li limitu typu $[\infty - \infty]$ rozdílu funkcí $f - g$, upravíme rozdíl funkcí na podíl:

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}.$$

Úloha 8.3.10. Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$.

Řešení. $-\frac{2}{3}$; před použitím l'Hospitalova pravidla nejprve získaný zlomek vhodně rozložíme na součin funkcí. $\square$

U limit typu $[0^0]$, $[\infty^0]$ a $[1^\infty]$ pro funkce f^g postupujeme tak, že tuto funkci nejprve upravíme na tvar $e^{g \cdot \ln f(x)}$, limitu přeneseme do exponentu (podle věty o limitě složené funkce) a v exponentu dostaneme limitu typu $[0 \cdot \infty]$.

Úloha 8.3.11. Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x}$. $[1]$

8.4 Taylorův vzorec

Mějme funkci f , $U(x_0) \subset D(f)$; h nechť je přírůstek nezávisle proměnné a nechť platí $f(x_0 + h) \in U(x_0)$. Hodnotu $f(x_0 + h)$ dovedeme vyjádřit přesně pomocí Lagrangeovy věty

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \theta h),$$

kde $\theta \in (0, 1)$, a přibližně užitím diferenciálu

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0).$$

1. vzorec je sice přesný, ale na závadu někdy může být (například při numerických výpočtech), že neznáme θ . Druhý vzorec dává aproximaci funkce f lineární funkcí, což je na jedné straně výhodné pro jednoduchost této aproximace, na druhé straně je lineární aproximace v některých případech nedostatečně přesná. Položme

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + R(h),$$

kde $R(h)$ je nějaký „zbytek“. Platí tedy

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \frac{R(h)}{h}, \quad \text{takže} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$$

Zbytek $R(h)$ je tedy „vyššího řádu“ než h , „jde k 0 rychleji než h “, například může být typu $a \cdot h^2$.

Chtěli bychom nyní zachovat jednoduchost aproximace hodnoty $f(x_0 + h)$, ale přitom zvýšit přesnost. Můžeme toho dosáhnout tím že $f(x_0 + h)$ aproximujeme mnohočlenem v h stupně n ; tento mnohočlen označíme $T_n(h)$. Při vhodném postupu bude zbytek, tedy rozdíl $f(x_0 + h) - T_n(h)$, záviset až na h^{n+1} .

Věta 8.4.1 (Taylorova). *Nechť funkce f má v $U(x_0)$ spojitě derivace až do řádu $n + 1$.*

*Pak pro každé $x \in U(x_0)$ platí (označíme-li $h = x - x_0$) tzv. **Taylorův vzorec**:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(h),$$

kde $R_n(h)$, tzv. **zbytek**, lze psát ve tvaru

$$\text{Lagrangeově: } R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \text{ kde } \theta \in (0, 1), \text{ nebo}$$

$$\text{Cauchyově: } R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \bar{\theta}h)}{n!}(1 - \bar{\theta})h^{n+1}, \text{ kde } \bar{\theta} \in (0, 1).$$

Důkaz. V důkazu se používají pomocné funkce a Rolleova věta. □

Druhý obvyklý tvar Taylorova vzorce dostaneme po dosazení $h = x - x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x - x_0),$$

Koeficienty $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ se nazývají **Taylorovy koeficienty**.

Položíme-li $x_0 = 0$, což je například u elementárních funkcí častý a přirozený požadavek, dostaneme zvláštní případ Taylorova vzorce pro okolí bodu 0, a tento vzorec se někdy nazývá **Maclaurinův** (čti mekloren):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

Prvních $n + 1$ členů na pravé straně Taylorova (Maclaurinova) vzorce tvoří Taylorův polynom $T_n(x)$, takže platí $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Pokud na nějakém $U(x_0)$ je $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, je Taylorův polynom aproximací funkce f . Polynom $T_n(x)$ se také nazývá **Taylorův (Maclaurinův) rozvoj** funkce f ; zde je to rozvoj podle vzorce, ale pracujeme rovněž s rozvojem funkce v mocninnou řadu.

Věta 8.4.2 (přehled Maclaurinových rozvojů některých elementárních funkcí).

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x)$
- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1!} + R_{2m-1}(x)$
- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$
- $(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \cdots + \binom{r}{n}x^n + R_n(x) \quad (\forall r \in \mathbb{R})$

Jestliže zjišťujeme, pro která x platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, dostaneme, že u funkcí e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ je to pro $x \in \mathbb{R}$, u funkce $\operatorname{arctg} x$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$, u funkce $\ln(1+x)$ pro $x \in (-1, 1)$ a u funkce $(1+x)^r$ pro $x \in (-1, 1)$ nebo na intervalu širším v závislosti na r .

Úlohy (na Maclaurinův rozvoj funkcí)

Úloha 8.4.3. Určete Taylorovy koeficienty rozvojů funkcí uvedených v předchozím přehledu (použitím obecného vzorce).

Řešení. V podstatě jde o využití vhodných pravidel pro výpočet derivací vyšších řádů pro zadanou funkci. □

Úloha 8.4.4. Najděte rozvoj funkcí e^{-x} , $\sin 3x$.

Úloha 8.4.5. Odvodte rozvoj funkcí $\frac{1}{1+x}$ a $\sqrt{1+x}$.

Úloha 8.4.6. Určete první členy rozvoje funkcí $(x+1) \cdot \operatorname{ch} 2x$, $x \cdot e^{-2x}$ až po členy s x^5 .

Úloha 8.4.7. *Zobrazte na grafickém kalkulátoru (nebo na počítači pomocí vhodného SW systému) funkci $y = \cos x$ společně s jejími aproximacemi danými Mac-laurinovým rozvojem:*

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}, \quad f_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad f_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}.$$

Sledujte, jak se rozšiřuje interval těch $x \in \mathbb{R}$, pro něž $\cos x \approx f_k(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Úloha 8.4.8. *Totéž proveďte pro funkce $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{arctg} x$, případně i pro jiné.*

— * —

Kapitola 9

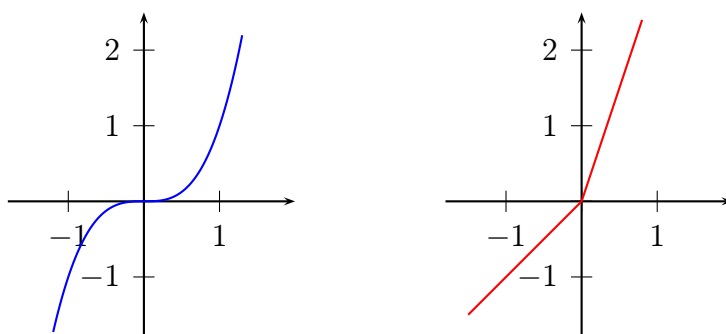
Užití diferenciálního počtu

9.1 Monotónnost funkce

Při vyšetřování průběhu funkce se mimo jiné zjišťuje, zda je daná funkce v některém intervalu (resp. v některém bodě) monotónní (definice viz v kap. 3). Velmi vhodným nástrojem pro zjišťování monotónnosti funkce je derivace funkce.

Věta 9.1.1. *Jestliže existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$ a $f'(x_0) > 0$, pak f je rostoucí v bodě x_0 .*

Princip důkazu. Ježto $f'(x_0) > 0$, má v jistém okolí $U(x_0)$ stejné znaménko i diferenciální podíl a z toho plyne i tvrzení věty. $\square$



Obrázek 9.1: Grafy funkcí $y = x^3$ a $y = 2x + |x|$.

Tato věta vyjadřuje jen postačující podmínku, neplatí obráceně. Funkce rostoucí v bodě může mít i nulovou derivaci (nebo derivaci nemít). Např. funkce $y = x^3$ je v bodě 0 rostoucí, ale má zde nulovou derivaci. Funkce $y = 2x + |x|$ je v bodě 0 rostoucí, ale derivaci v tomto bodě nemá.

Podobné výsledky platí i pro funkce klesající v bodě a pro zápornou derivaci.

Definice 9.1.2. Říkáme, že x_0 je stacionárním bodem funkce f , právě když $f'(x_0) = 0$.

Ve stacionárním bodě může být funkce rostoucí, klesající nebo v něm nemusí být monotónní.

Věta 9.1.3 (o monotónnosti na intervalu). Má-li funkce f derivaci na (a, b) , pak platí:

- 1) Funkce f je na (a, b) neklesající [nerostoucí], právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f'(x) \geq 0$ [≤ 0].
- 2) Funkce f je na (a, b) rostoucí [klesající], právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f'(x) > 0$ [< 0], přičemž neexistuje interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tak, aby $\forall x \in (\alpha, \beta)$ $f'(x) = 0$.

Princip důkazu (pro funkce neklesající, resp. rostoucí).

- (1)/1 Je-li f neklesající na (a, b) , je v každém bodě intervalu (a, b) diferenciální podíl nezáporný, tedy i $f'(x) \geq 0$.
- (1)/2 Je-li $f'(x) \geq 0$ na (a, b) , $x_1 < x_2$, jsou na $\langle x_1, x_2 \rangle$ splněny předpoklady Lagrangeovy věty, tedy $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$, odkud plyne $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- (2)/1 Je-li f rostoucí, je podle (1)/1 $f'(x) \geq 0$. Kdyby na nějakém (α, β) platilo $f'(x) = 0$, bylo by zde $f(x) = \text{konst.}$, což by byl spor.
- (2)/2 Nechť $f'(x) \geq 0$ na (a, b) , $x_1 < x_2$ a neexistuje $(\alpha, \beta) \dots$ Podle (1)/1 je $f(x_1) \leq f(x_2)$ a podle předpokladu o (α, β) existuje mezi x_1, x_2 bod x' tak, že $f'(x') > 0$, tj funkce f roste v x' , a z toho se pomocí okolí bodu x' a definice funkce rostoucí v bodě vyvodí, že $f(x_1) < f(x_2)$.

□

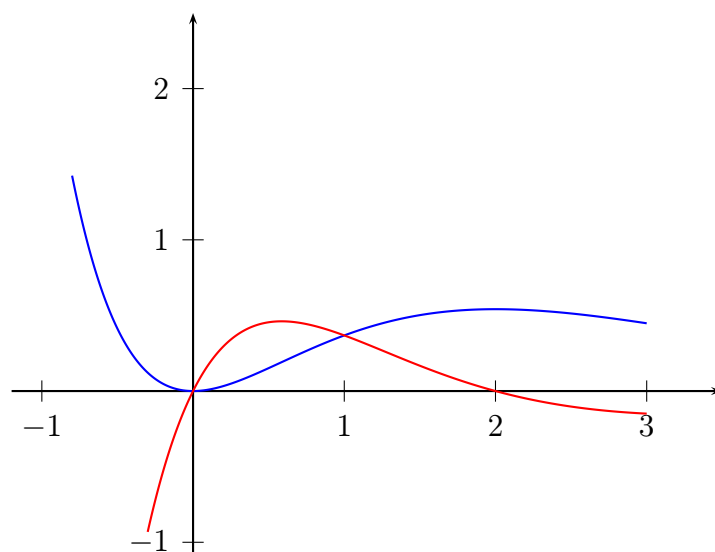
Tuto větu lze rozšířit na uzavřený interval tak, že pro f předpokládáme derivaci na (a, b) a spojitost na $\langle a, b \rangle$.

Úloha 9.1.4. Vyšetřete intervaly monotónnosti funkce $f : y = x^2 e^{-x}$.

Řešení. $D(f) = \mathbb{R}$. Máme $y' = (2x - x^2) e^{-x} = x(2 - x) e^{-x}$; ježto $e^{-x} > 0$, rozdělí se číselná osa body 0 a 2 na intervaly:

- (1) na intervalu $(-\infty, 0)$ je $y' \leq 0$, přičemž y' je nulová v jediném bodě, f je klesající,
- (2) na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ je $y' \geq 0$, přičemž y' je nulová ve dvou bodech, f je rostoucí,
- (3) na intervalu $\langle 2, +\infty \rangle$ je $y' \leq 0$, f je klesající (viz obrázek 9.2 na straně 104).

□



Obrázek 9.2: Grafy funkcí $y = x^2 e^{-x}$ a $y' = x(2 - x) e^{-x}$ z úlohy 9.1.4.

9.2 Lokální extrémy

V kap. 3 jsou definovány pojmy *(ostré) lokální maximum*, *(ostré) lokální minimum* — se souhrnným názvem *(ostré) lokální extrémy*. V kap. 8 byla odvozena *nutná podmínka existence lokálního extrému*: Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$. Funkce tedy může mít extrém jen ve stacionárním bodě nebo v bodě, v němž nemá derivaci (jako tomu je např. u funkce $y = |x|$).

Zjišťování lokálních extrémů funkcí má velký význam teoretický i praktický, proto je důležité znát správný postup. Máme několik základních možností.

Postup při určování lokálních extrémů

Najdeme body, v nichž může nastat extrém, tj. body, v nichž je derivace funkce rovna nule (body stacionární) nebo v nichž derivace neexistuje; dále takový bod označíme x_0 .

(1) Užití monotónnosti v okolí bodu x_0

Nechť f je spojitá v x_0 a existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$. Je-li f rostoucí v $P(x_0-)$ a klesající v $P(x_0+)$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum.

Podobně lze formulovat další případy: ostré lokální minimum, neostré extrémy a případ, kdy extrém neexistuje.

(2) Užití 1. derivace v okolí bodu x_0

Nechť f je spojitá v x_0 a existuje okolí $P(x_0) \subset D(f)$, v němž má funkce f derivaci. Je-li $f'(x) > 0$ v $P(x_0-)$ a $f'(x) < 0$ v $P(x_0+)$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum. Podobně lze formulovat další případy.

(3) Užití 2. derivace v bodě x_0

Nechť f má derivaci v nějakém okolí $U(x_0) \subset D(f)$ a existuje $f''(x_0)$. Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum, je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální minimum.

Pozor: Pokud $f''(x_0) = 0$, neznamená to, že extrém neexistuje, ale že musíme rozhodnout podle jiného pravidla.

Odvození postupu dle (1) plyne z definice extrému, (2) plyne z (1) užitím vztahu mezi monotónností a znaménkem derivace, (3) plyne z (2) uvažíme-li, že např. vlastnost $f''(x_0) < 0$ říká, že funkce f' je klesající v bodě x_0 , a protože $f'(x_0) = 0$, platí v nějakém $P(x_0-)$, že $f'(x) > 0$ a v $P(x_0+)$, že $f'(x) < 0$.

Úloha 9.2.1. Zjistěte extrém funkce $f : y = x e^{-x}$.

Řešení. Vypočteme derivaci $y' = (1 - x) e^{-x}$ a položíme ji rovnu 0; dostáváme stacionární bod $x_0 = 1$. Dále vypočteme $y'' = (x - 2) e^{-x}$. Ježto $y''(1) = -e^{-1} < 0$, má funkce f v bodě 1 lokální maximum. $\square$

(4) Užití Taylorova vzorce

Jestliže funkce f má derivace v $U(x_0)$ a platí ($n > 1$) $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, pak

(1) pro n sudé existuje v bodě x_0 extrém:

- lokální maximum pro $f^{(n)}(x_0) < 0$,
- lokální minimum pro $f^{(n)}(x_0) > 0$.

(2) pro n liché extrém v bodě x_0 neexistuje.

Tvrzení plyne z toho, že z Taylorova vzorce máme za daných předpokladů $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta \Delta x)}{n!} \Delta x^n$, přičemž okolí bodu x_0 , tedy $U(x_0)$, lze volit tak malé, že $f^{(n)}(x_0 + \theta \Delta x)$ má stejné znaménko jako $f^{(n)}(x_0)$.

Úloha 9.2.2. Vyšetřete extrém funkce $f : y = x^5$.

Řešení. Máme $y' = 5x^4$, stacionární bod 0. Dále pak $y'' = 20x^3$, $y''(0) = 0$, $y''' = 60x^2$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)} = 120x$, $y^{(4)}(0) = 0$, $y^{(5)} = 120 > 0$. První nenulová derivace je lichého řádu, tedy extrém neexistuje. $\square$

9.3 Největší a nejmenší hodnota funkce na intervalu

Mějme funkci f definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$. Podle 2. Weierstrassovy věty nabývá funkce f v některém bodě c_1 své největší hodnoty a v některém bodě c_2 své nejmenší hodnoty. Jiné názvy: *absolutní extrémy*, *globální extrémy*. Každý z bodů c_1 , c_2 přitom může být vnitřním nebo krajním bodem intervalu $\langle a, b \rangle$, viz obr. 9.3.1.

Pokud je c_i vnitřním bodem, je to současně bod, v němž nastává lokální extrém, tedy stacionární bod nebo bod, v němž neexistuje derivace. Z toho pak plyne:

obr. 9.3.1.

Postup při určování největší a nejmenší hodnoty funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$

- (1) Určíme všechny stacionární body a body, v nichž neexistuje derivace a vypočteme v nich funkční hodnoty.
- (2) Vypočteme funkční hodnoty v bodech a , b .
- (3) Maximum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je největší hodnotou funkce na $\langle a, b \rangle$,
- (4) minimum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je nejmenší hodnotou funkce na $\langle a, b \rangle$.

Tedy: není třeba určovat lokální extrémy dle 9.2.

Úloha 9.3.1. Máme určit největší a nejmenší hodnotu funkce $f : y = x^3 - 3x + 1$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Řešení. $y' = 3x^2 - 3$; f má na $\langle 0, 2 \rangle$ jediný stacionární bod 1. Vypočteme $f(1) = -1$ a dále $f(0) = 1$, $f(2) = 3$. Funkce f tedy nabývá největší hodnoty 3 v bodě 2 a nejmenší hodnoty -1 v bodě 1. $\square$

9.4 Konvexnost a konkávnost

Označme $k(u, v) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$; je-li f funkce spojitá, je pro $u \neq v$ také funkce $k(u, v)$ spojitá vzhledem k u i vzhledem k v . Geometrický význam: $k(u, v)$ je směrnice sečny grafu funkce f .

Definice 9.4.1. Funkce f se nazývá **konvexní** (**konkávní**) na intervalu $(a, b) \Leftrightarrow$ pro každé tři body $x_1, x, x_2 \in (a, b)$, kde $x_1 < x < x_2$, platí $k(x_1, x) < k(x, x_2)$ ($k(x_1, x) > k(x, x_2)$).

Funkce dle této definice je *ryze konvexní* nebo *konkávní*, při neostrých nerovnostech jde o neryzí vlastnosti.

Úloha 9.4.2. *Doplňte obrázek 9.4.1 (9.4.2), tak aby ilustroval definici funkce konvexní (konkávní).*

Věta 9.4.3 (1. věta o konvexnosti a konkávnosti). *Nechť funkce f má na intervalu (a, b) derivaci f' . Pak funkce f je na (a, b) konvexní (konkávní) $\Leftrightarrow$ je f' na (a, b) rostoucí (klesající).*

Důkaz. 1) Nechť f je konvexní. Zvolme libovolné $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$; dokážeme, že $f'(x_1) < f'(x_2)$. Mezi x_1 a x_2 zvolme další 3 body tak, aby platilo $x_1 < \bar{x}_1 < x_0 < \bar{x}_2 < x_2$. Pak platí $k(x_1, x_0) < k(x_0, x_2)$ a též $k(x_1, \bar{x}_1) < k(\bar{x}_1, x_0)$, $k(x_0, \bar{x}_2) < k(x_0, x_2)$. Přejdeme k limitám: $\lim_{\bar{x}_1 \rightarrow x_1+} k(x_1, \bar{x}_1) = f'(x_1+) = f'(x_1)$, $\lim_{\bar{x}_2 \rightarrow x_2-} k(\bar{x}_2, x_2) = f'(x_2-) = f'(x_2)$,

$\lim_{\bar{x}_1 \rightarrow x_1+} k(\bar{x}_1, x_0) = k(x_1, x_0)$, $\lim_{\bar{x}_2 \rightarrow x_2-} k(x_0, \bar{x}_2) = k(x_0, \bar{x}_2) = k(x_0, x_2)$
a z toho

$$f'(x_1) \leq k(x_1, x_0) < k(x_0, x_2) < f'(x_2).$$

2) Naopak nechť f' je rostoucí na (a, b) . Uvažujme libovolné dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$ a nechť $x \in (x_1, x_2)$. Dokážeme, že $k(x_1, x) < k(x, x_2)$ a to tak, že najdeme taková $\xi_1 < \xi_2$, že $f'(\xi_1) = k(x_1, x)$, $f'(\xi_2) = k(x, x_2)$. K tomu použijeme Lagrangeovu větu, podle níž existuje bod $\xi_1 \in \langle x_1, x \rangle$ tak, že $f'(\xi_1) = k(x_1, x)$, a podobně existuje $\xi_2 \in \langle x, x_2 \rangle$ tak, že $f'(\xi_2) = k(x, x_2)$, přičemž $x_1 < x < x_2$. Proto $k(x_1, x) = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = k(x, x_2)$, funkce je konvexní. □

Na funkci f' lze nyní použít větu o monotónnosti na intervalu (viz 9.1). Podle ní platí:

Věta 9.4.4 (2. věta o konvexnosti a konkávnosti). *Má-li funkce f druhou derivaci na (a, b) , pak tato funkce je na (a, b) konvexní [konkávní], právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f''(x) \geq 0$ [≤ 0], přičemž neexistuje interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tak, aby $\forall x \in (\alpha, \beta)$ bylo $f''(x) = 0$.*

9.5 Inflexe a inflexní body

Definice 9.5.1. *Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **inflexi** $\Leftrightarrow$ má derivaci $f'(x_0)$ a je v levém okolí $U(x_0-)$ konvexní [konkávní] a v pravém okolí $U(x_0+)$ konkávní [konvexní]. Bod $[x_0, f(x_0)]$ roviny se nazývá **inflexní bod** funkce f resp. grafu funkce f .*

Tedy v inflexním bodě přechází funkce z konvexního průběhu na konkávní nebo naopak. *Inflexní tečna*, tj. tečna ke grafu funkce f v inflexním bodě, má tu vlastnost, že v bodě dotyku graf přechází z jedné poloroviny do druhé. Např. osa x je inflexní tečnou ke grafu funkce $y = x^3$. Tím se inflexní tečna liší od tečen v bodech, které nejsou inflexní.

Věta 9.5.2. (*vztah inflexe a derivace*): Má-li funkce f v nějakém okolí $U(x_0)$ derivaci f' , pak má v bodě x_0 inflexi $\Leftrightarrow$ má f' v bodě x_0 lokální extrém.

Důkaz. 1) Nechtě f má v bodě x_0 inflexi. Pak nastává jedna z těchto možností:

- a) f je v $U(x_0-)$ konvexní (tj. f' je rostoucí) a v $U(x_0+)$ konkávní (tj. f' je klesající), takže f' má v bodě x_0 lokální maximum;
 - b) f je v $U(x_0-)$ konkávní (tj. f' je klesající) a v $U(x_0+)$ konvexní (tj. f' je rostoucí), takže f' má v bodě x_0 lokální minimum.
- 2) Má-li f' lokální extrém v bodě x_0 , je to buď lokální maximum nebo lokální minimum a podobnými úvahami (provedte je!) pro levé a pravé okolí dojdeme k existenci inflexe.

□

Věta 9.5.3 (nutná podmínka existence inflexe). Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi a existuje $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.

Důkaz. Plyne z nutné podmínky existence extrému funkce f' .

□

Vztah inflexe a derivace lze dalšími větami specifikovat pro případ existence druhé resp. i třetí derivace.

Věta 9.5.4 ((vztah inflexe a druhé derivace). Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f'' a má-li tato derivace v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$ různá znaménka, má funkce f v bodě x_0 inflexi. Má-li f'' stejné znaménko v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$, pak funkce f v bodě x_0 inflexi nemá.

Věta 9.5.5 (vztah inflexe a 3. derivace). Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f'' , platí $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak funkce f má v bodě x_0 inflexi.

Tuto větu bychom mohli rozšířit (podobně jako odpovídající pravidlo pro určování lokálního extrému) i na případ, kdy $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Pro k liché existuje v bodě x_0 inflexe, pro k sudé nikoli.

Úloha 9.5.6. Stanovte konvexnost, konkávnost a inflexi funkce $y = xe^{-x}$.

Řešení. Tato funkce má potřebné derivace, vypočteme

$$y' = (1-x)e^{-x}, \quad y'' = (x-2)e^{-x}, \quad \text{kde } e^{-x} > 0.$$

Pro $x < 2$ je $y'' < 0$, funkce je konkávní, pro $x > 2$ je $y'' > 0$, funkce je konvexní. Pro $x = 2$ má funkce inflexi, inflexní bod je $[2; 2e^{-2}]$.

□

9.6 Asymptoty

Asymptoty jsou přímky a představujeme si je jako tečny ke grafu funkce v nekonečnu. Např. souřadnicové osy jsou asymptotami grafu funkce $y = 1/x$. Máme asymptoty dvou druhů a vyslovíme pro ně dvě různé definice, protože to je praktické, i když z hlediska geometrického jde o tentýž jev.

Definice 9.6.1. *Přímka $x = c$ se nazývá **vertikální asymptota** grafu funkce $f \Leftrightarrow$ funkce f má v bodě c alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní.*

Takových asymptot může mít funkce nekonečně mnoho, příkladem je funkce tangens. Kromě toho mohou pro danou funkci existovat ještě nejvýše dvě asymptoty s rovnicemi tvaru $y = kx + q$.

Definice 9.6.2. *Přímka $y = kx + q$ se nazývá **asymptota (se směrnicí)** grafu funkce $f \Leftrightarrow$ pro $x \rightarrow -\infty$ nebo pro $x \rightarrow +\infty$ je $\lim[f(x) - kx + q] = 0$.*

Asymptoty se směrnicí se zpravidla zjišťují podle následující věty.

Věta 9.6.3 (o výpočtu asymptot). *Přímka $y = kx + q$ je asymptotou grafu funkce $f \Leftrightarrow$ existují limity (pro $x \rightarrow -\infty$ nebo pro $x \rightarrow +\infty$) $\lim \frac{f(x)}{x} = k$ a $\lim[f(x) - kx] = q$.*

Důkaz. Všechny dále uvedené limity bereme pro $x \rightarrow -\infty$ nebo pro $x \rightarrow +\infty$.

- 1) Nechť přímka $y = kx + q$ je asymptotou. Pak $\lim[f(x) - (kx + q)] = 0$, tedy též $\lim \frac{f(x) - kx - q}{x} = 0$. Ježto $\frac{q}{x} \rightarrow 0$, platí $\lim \frac{f(x)}{x} - k = 0$, tedy $\lim \frac{f(x)}{x} = k$. Druhá rovnost je zřejmá, neboť ve vztahu $\lim[f(x) - (kx + q)] = 0$ lze provést rozdělení na dvě limity $\lim[f(x) - kx] - q = 0$.
- 2) Existují-li naopak limity pro k a pro q , plyne ze vztahu $\lim[f(x) - kx] = q$ definiční vztah $\lim[f(x) - (kx + q)] = 0$.

□

Praktický postup v běžných případech

- 1) Vyšetříme okolí těch hromadných bodů $D(f)$, které leží v $\mathbb{R} - D(f)$ (body nespojitosti - zejména izolované body množiny $\mathbb{R} - D(f)$ nebo krajní body intervalů, jež jsou součástí $D(f)$). Zjistíme ve kterém z těchto bodů existují alespoň jednostranné nevlastní limity.
- 2) Je-li $+\infty$ nebo $-\infty$ hromadným bodem $D(f)$, hledáme $\lim f(x)/x$. Jestliže tato limita (nebo obě) existuje, je to směrnice k asymptot, *pokud asymptoty existují*. Dále ještě hledáme $\lim[f(x) - kx]$ s oním k , jež bylo vypočteno v předchozí limitě. Existuje-li tato limita, je to q a asymptota existuje.

Při výpočtu $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ lze použít l'Hospitalova pravidla, z něhož $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$. Také tento vztah se často využívá k výpočtu směrnice asymptot (ovšem neexistuje-li $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$, neznamená to neexistenci asymptot).

Úloha 9.6.4. *Určete asymptoty pro funkci $y = 2x + \operatorname{arctg} x$.*

Řešení. $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 2$, neboť v posledním zlomku je funkce v čitateli omezená, takže tento zlomek konverguje k 0. Dále $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + \operatorname{arctg} x - 2x) = 0$. Existují tedy 2 asymptoty: $y = 2x - \pi/2$ pro $x \rightarrow -\infty$ a $y = 2x + \pi/2$ pro $x \rightarrow +\infty$. $\square$

Úloha 9.6.5. *Určete asymptoty pro funkci $y = x + \sqrt{x}$.*

Řešení. Zde je nevlastním hromadným bodem $D(f)$ jen $+\infty$. Počítáme $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 1$, $q = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty$, asymptota neexistuje. $\square$

9.7 Průběh funkce

O vyšetřování průběhu funkce lze pojednat dvěma způsoby:

- uvést věcně, ze kterých činností se vyšetřování průběhu funkce skládá,
- popsat praktický postup při vyšetřování průběhu funkce.

Dle 1. hlediska uvažujeme tyto složky:

- 1) Definiční obor, body nespojitosti.
- 2) Funkční obor, omezenost; nulové body funkce; intervaly, kde je funkce kladná, kde je záporná.
- 3) Funkční vlastnosti funkce: parita, periodičnost.
- 4) Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti funkce, v krajních bodech definičního oboru, resp. v $-\infty$, $+\infty$.
- 5) Intervaly monotonnosti (kde funkce roste, kde klesá) nebo konstantnosti.
- 6) Lokální extrémy funkce.
- 7) Intervaly konvexnosti a konkávnosti.
- 8) Inflexe, inflexní body grafu funkce.
- 9) Asymptoty grafu funkce.
- 10) Sestrojení grafu funkce.

Praktický postup při vyšetřování průběhu funkce sleduje v běžném případě i myšlenku správného a přehledného záznamu výsledků a mezivýsledků do tabulky. Proto postupujeme takto:

- A. Zjistíme údaje potřebné pro sestavení tabulky, sestavíme tabulku a zaznameníme do ní dosud známé údaje o funkci,
- B. postupně zjišťujeme další vlastnosti funkce a zaznamenáváme je do tabulky,
- C. doplníme údaje potřebné pro sestrojení grafu a sestrojíme graf funkce.

Lze tak doporučit toto pořadí prací:

- A1. Provedeme 1 (určíme $D(f)$ a body nespojitosti).
 - A2. Provedeme 3 (stanovení parity a periodičnosti), tj. zjistíme, zda bychom mohli zmenšit rozsah vyšetřování funkce tím, že se omezíme např. jen na interval $\langle 0, +\infty \rangle$ nebo jen na jednu periodu u funkce periodické.
 - A3. Vypočteme 1. derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme stacionární body. K nim přidáme ty body z $D(f)$, v nichž 1. derivace neexistuje. Má-li funkce lokální extrém, pak nastane v některém z těchto bodů.
 - A4. Vypočteme 2. derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme body, v nichž může mít funkce inflexi. K nim přidáme ty body z $D(f')$, v nichž 2. derivace neexistuje.
 - A5. Sestavíme tabulku, kde v horizontálním záhlaví zaznameníme rozčlenění číselné osy s ohledem na A1, A2, A3, A4; ve vertikálním záhlaví jsou řádky pro x , y , y' , y'' , a pro záznam vlastností funkce f . Do tabulky přeneseme údaje již zjištěné.
-
- B1. Užitím znaménka 1. derivace určíme 5 (intervaly monotonnosti).
 - B2. Na základě B1 zjistíme 6 (lokální extrémy), včetně funkčních hodnot v těchto bodech.
 - B3. Užitím znaménka 2. derivace určíme 7 (konvexnost a konkávnost).
 - B4. Na základě B3 zjistíme 8 (inflexi), včetně funkčních hodnot v těchto bodech a hodnot 1. derivací.
 - B5. Určíme 9 (asymptoty).
 - B6. Určíme 4 (limity), pokud je to po B5 ještě třeba.

B7. Určíme 2 (funkční obor, nulové body, znaménka funkce).

C1. Podle potřeby doplníme např. průsečík grafu funkce s osou y , hodnoty funkce v dalších bodech $D(f)$, případně i hodnoty derivací (připojíme k tabulce jako dodatek).

C2. Provedeme bod 10 (sestrojíme graf funkce).

Úloha 9.7.1. Sestavte tabulku pro vyšetření průběhu funkce $y = x + \frac{1}{x}$.

Řešení. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, funkce je lichá, tj. graf bude souměrný podle počátku.

$y' = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 1\}$ (stacionární body); $y'' = \frac{2}{x^3} \neq 0$. Sestavíme tabulku (např. jen) pro interval $\langle 0, +\infty \rangle$.

x	0	$\rightarrow 0+$	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$	$\rightarrow +\infty$
y	n.d.	$\rightarrow +\infty$	-	2	-	$\rightarrow +\infty$
y'	n.d.	$\rightarrow -\infty$	< 0	0	> 0	$\rightarrow +\infty$
y''	n.d.	-	> 0	> 0	> 0	-
$funkce$	n.d.	$\rightarrow +\infty$	klesá	lok.min.	roste	$\rightarrow +\infty$
		asymptota $x=0$	konvexní			asymptota $y=x$

Inflexní body neexistují. □

9.8 Užití extrémů funkcí

Na výpočet extrémů vede řada praktických úloh.

Úloha 9.8.1. Ze čtvercového listu papíru o straně a má být po vystřížení čtverečků v rozích složena krabice o maximálním objemu. Vypočtěte stranu čtverečků, jež mají být v rozích vystříženy a rozměry výsledné krabice (obr. 9.8.1).

Řešení. $V = (a - 2x)^2 x$, $V' = 12x^2 - 8ax + a^2 \Rightarrow x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$ (nevyhovuje praktické úloze); rozměry krabice jsou $\frac{2}{3}a \times \frac{2}{3}a \times \frac{1}{6}a$, výška je rovna čtvrtině šířky čtvercového dna. □

Úloha 9.8.2. Pracoviště je v konstantní vzdálenosti a od průmětu světla na vodorovnou rovinu. Při jaké výšce h světla (viz obr. 9.8.2) je osvětlení pracoviště maximální?

Řešení. Intenzita osvětlení závisí na vstupních podmínkách takto: $I = c \frac{\sin \varphi}{r^2}$, kde $\sin \varphi = \frac{h}{r}$ a $r = \sqrt{h^2 + a^2}$, takže $I = I(h)$; po dosazení $I = c \frac{h}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$.
 $I' = c \frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} (= 0) \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0,7a$. □

Úloha 9.8.3. Výkon Peltonova kola je $P = k \cdot u \cdot (v - u)$, kde u je obvodová rychlost Peltonova kola a v je rychlost vodního paprsku. Při jaké rychlosti u je výkon Peltonovy turbíny maximální?

Řešení. $P = P(u)$, $P' = kv - 2ku (= 0) \Rightarrow u = \frac{v}{2}$. □

Úloha 9.8.4. Určete rozměry konzerv tvaru rotačního válce o daném objemu V tak, aby se při jejich výrobě spotřebovalo co nejmenší množství plechu.

Řešení. Hledá se minimum funkce $S = 2\pi xv + 2\pi x^2$, kde x je poloměr dna konzervy a v výška konzervy, za podmínky, že $V = \pi x^2 v$ je zadané (tedy konstantní). Po dosazení za v z této podmínky máme $S = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2$, odkud $S' = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x$. Z rovnice $S' = 0$ máme $x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Odsud je $v_0 = \frac{V}{\pi x_0^2} = \dots = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2x_0$: výška konzervy je rovna průměru dna. □

— * —