

Matematická analýza 1

Jiří Fišer

16. října 2007

Zimní semestr

1. Supremum a infimum
2. Číselné posloupnosti a jejich vlastnosti
3. Limita číselné posloupnosti
4. Číslo e , jeho definice, výpočet a užití
5. Funkce a jejich vlastnosti
6. Limita funkce podle Heineho a podle Cauchyho
7. Vlastnosti limit funkcí
8. Spojitost a nespojitost funkce
9. Funkce spojité na intervalu
10. Derivace funkce
11. Derivace vyšších řádů, Leibnizův vzorec
12. Diferenciál funkce, jeho vlastnosti a užití
13. Věty o střední hodnotě diferenciálního počtu a jejich užití
14. Vztah derivace a vlastností funkcí (monotónnost, konvexnost, konkávnost, inflexe)
15. Lokální extrémy a globální extrémy
16. Průběh funkce

Studijní materiály

- St. Trávníček: Matematická analýza
kag.upol.cz/travnicек/1-MatAn.
- J. Kuben, P. Šarmanová: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné www.studopory.vsb.cz.
- V. MÁDROVÁ: Matematická analýza I. VUP, Olomouc, 2004.
- J. BRABEC, F. MARTAN, Z. ROZENSKÝ: Matematická analýza I. SNTL, Praha, 1989.
- J. KŘENEK, J. OSTRAVSKÝ: Diferenciální a integrální počet funkce jedné proměnné Zlín, 2001.
- J. KOPÁČEK: Matematická analýza pro fyziky I., SPN, Praha (skripta MFF UK).

Studijní materiály

- V. MÁDROVÁ, J. MAREK Řešené příklady a cvičení z matematické analýzy I. VUP Olomouc, 2004.
- J. KOJECKÁ, M. ZÁVODNÝ: Příklady z matematické analýzy I., II., VUP Olomouc.
- B. P. DĚMIDOVICH: Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy. Fragment, Praha, 2003.

Rozšiřující literatura:

- K. REKTORYS a kol.: Přehled užití matematiky SNTL, Praha, 1988.
- H. J. BARTSCH: Matematické vzorce, SNTL, Praha, 1983.

1. Číselná osa, supremum a infimum

- 1.1. Základní číselné množiny
- 1.2. Vlastnosti číselných množin
- 1.3. Supremum a infimum
- 1.4. Několik vět o reálných číslech a číselných množinách
- 1.5. Klasifikace bodů vzhledem k množině
- 1.6. Rozšířená reálná osa

Základní číselné množiny

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ je množina všech *přirozených* čísel.
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ je množina všech *celých* čísel.
- $\mathbb{Q}$ — množina všech zlomků $\left\{ \frac{k}{n}, \text{ kde } k \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N} \right\}$ je množinou všech čísel *racionálních*.

Racionální čísla

Úloha

Číslo $a = 1,5\overline{72}$ převeďte na obyčejný zlomek.

První způsob řešení

Periodická část desetinného rozvoje čísla a je vlastně geometrická řada, tedy:

$$a = 1,5 + \frac{72}{10^3} + \frac{72}{10^5} + \frac{72}{10^7} + \dots = 1,5 + \frac{72}{10^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \dots = \frac{173}{110}.$$

Racionální čísla

Úloha

Číslo $a = 1,5\overline{72}$ převedte na obyčejný zlomek.

Druhý způsob řešení

Využijeme nekonečného periodického opakování:

$$\begin{aligned}a &= 1,5\overline{72}, \\ 100a &= 157,2\overline{72},\end{aligned}$$

odkud po odečtení je

$$100a - a = 99a = 157,2\overline{72} - 1,5\overline{72} = 155,7,$$

tedy

$$a = \frac{1557}{990} = \frac{173}{110}.$$

Množina reálných čísel $\mathbb{R}$

- Základní číselná množina.
- Reálná čísla zobrazujeme na číselné (reálné) ose.
- Při rozšiřování pojmu *číslo* z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ vznikají dvě otázky:
 - zda existuje potřeba iracionálních čísel (a jak je zavést),
 - zda zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu je bijekce, tj. zda i každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

Potřebujeme iracionální čísla?

Věta

Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.

Důkaz (sporem)

- $\exists r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$.
- $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow r = \frac{p}{q}$ — zlomek v základním tvaru, $rq = p$.
- $rq = p \rightarrow r^2 q^2 = p^2$, tj. $2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ je sudé $\Rightarrow$ **p je sudé**
- p je sudé $\Rightarrow p = 2k \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow q^2$ je sudé $\Rightarrow$ **q je sudé**
- p a q je sudé $\Rightarrow$ zlomek $\frac{p}{q}$ lze krátit dvěma, a to je **spor** s předpokladem, že tento zlomek je v základním tvaru.

Iracionální čísla $\mathbb{Q}'$

- Bez iracionálních čísel bychom např. nedovedli změřit úhlopříčku jednotkového čtverce.
- Platí:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset \quad \text{a} \quad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'.$$

- Dekadický rozvoj iracionálních čísel: neukončený a neperiodický (pro iracionální čísla často známe jen konečný počet míst jejich dekadického rozvoje (např. pro číslo π)).

Mohutnost množin

- $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, a $\mathbb{Q}$ jsou spočetné (prvky těchto množin lze uspořádat do posloupnosti),
- $\mathbb{R}$ (a tedy i $\mathbb{Q}'$) spočetná není; říkáme, že $\mathbb{R}$ má *mohutnost kontinua*.

Komplexní čísla $\mathbb{C}$

- Komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině.

Pro číselné množiny platí:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Vlastnosti číselných množin

Definice

*Množina M se nazývá **shora omezená** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \leq L$. Toto číslo L se nazývá **horní odhad** (resp. horní závora).*

*Množina M se nazývá **zdola omezená** $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \geq K$. Toto číslo K se nazývá **dolní odhad** (resp. dolní závora).*

*Množina M se nazývá **omezená** $\Leftrightarrow$ je omezená shora i zdola.*

Největší a nejmenší prvek množiny

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M , pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej **max M** .

Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme **min M** .

Vlastnosti číselných množin

Definice

Množina M se nazývá **shora omezená** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \leq L$. Toto číslo L se nazývá **horní odhad** (resp. horní závora).

Množina M se nazývá **zdola omezená** $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \geq K$. Toto číslo K se nazývá **dolní odhad** (resp. dolní závora).

Množina M se nazývá **omezená** $\Leftrightarrow$ je omezená shora i zdola.

Největší a nejmenší prvek množiny

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M , pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej **max M** .

Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme **min M** .

Úloha

Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}, \quad M_2 = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots \right\},$$

$$M_3 = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Řešení

Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

Úloha

Určete největší a nejmenší prvek množiny

$$M_1 = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right\}, \quad M_2 = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots \right\},$$

$$M_3 = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Řešení

Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší.

Intervaly

Definice

$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$, definujeme

uzavřený interval $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,

otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,

a podobně $\langle a, b \rangle$ a (a, b) .

Všechny tyto intervaly mají délku $b - a$.

Definice

Množinu $\langle a, +\infty \rangle = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ nazýváme **neomezený interval**.

Podobně $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b)$.

Množinu $\mathbb{R}$ zapisujeme též jako $(-\infty, +\infty)$.

Absolutní hodnota

Definice

Absolutní hodnota čísla $a \in \mathbb{R}$ se označuje $|a|$ a je definována takto:

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta (vlastnosti absolutní hodnoty)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ platí

- 1 $|a| \geq 0$, přičemž $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- 2 $|-a| = |a|$,
- 3 $|a + b| \leq |a| + |b|$ (trojúhelníkovou nerovnost),
- 4 $|a - b| \geq |a| - |b|$,
- 5 $|ab| = |a| \cdot |b|$,
- 6 pro $b \neq 0$ je $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Absolutní hodnota

Definice

Absolutní hodnota čísla $a \in \mathbb{R}$ se označuje $|a|$ a je definována takto:

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta (vlastnosti absolutní hodnoty)

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ platí

- ❶ $|a| \geq 0$, přičemž $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- ❷ $|-a| = |a|$,
- ❸ $|a + b| \leq |a| + |b|$ (trojúhelníkovou nerovnost),
- ❹ $|a - b| \geq |a| - |b|$,
- ❺ $|ab| = |a| \cdot |b|$,
- ❻ pro $b \neq 0$ je $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Zobecněná trojúhelníková nerovnost pro absolutní hodnotu

Vlastnost 3 můžeme zobecnit (důkaz matematickou indukcí):

(3') $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a_i \in \mathbb{R} : |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$,
nebo zkráceně

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Absolutní hodnota

Geometrický význam absolutní hodnoty

- $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy,
- $|a - b|$ ($= |b - a|$) vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose.

Úloha

Řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x - 3| < 2,$

b) $2|x + 2| - 3|x| - 2x \geq 4,$

c) $-3 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}|x + 1| - \frac{3}{4}|x - 2| = 0.$

Absolutní hodnota

Geometrický význam absolutní hodnoty

- $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy,
- $|a - b|$ ($= |b - a|$) vzdálenost obrazů čísel a, b na číselné ose.

Úloha

Řešte nerovnice a rovnici:

a) $|x - 3| < 2,$

b) $2|x + 2| - 3|x| - 2x \geq 4,$

c) $-3 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}|x + 1| - \frac{3}{4}|x - 2| = 0.$

Supremum a infimum

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ nazýváme **supremum** množiny M a píšeme $\beta = \sup M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

- (1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,
- (2) $\forall \beta' < \beta \quad \exists x' \in M : x' > \beta'$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme **infimum** množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

- (1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,
- (2) $\forall \alpha' > \alpha \quad \exists x' \in M : x' < \alpha'$.

Supremum a infimum

Definice

Necht' $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ nazýváme **supremum** množiny M a píšeme $\beta = \sup M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

- (1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,
- (2) $\forall \beta' < \beta \quad \exists x' \in M : x' > \beta'$.

Definice

Necht' $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme **infimum** množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

- (1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,
- (2) $\forall \alpha' > \alpha \quad \exists x' \in M : x' < \alpha'$.

Supremum a infimum

Úloha

Určete $\sup M$ a $\inf M$ pro množinu $M = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$.

Řešení

Platí $\sup M = 1$, neboť všechny prvky množiny M jsou pravé zlomky a jsou tedy menší než 1; jestliže však vezmeme libovolné číslo $r < 1$, existuje vždy v M prvek $\frac{n}{n+1}$, který je větší než r .

Dále $\inf M = \frac{1}{2}$, neboť žádný prvek M není menší než $\frac{1}{2}$, a když zvolíme libovolné číslo $s > \frac{1}{2}$, pak vždy právě pro prvek $\frac{1}{2}$ platí $\frac{1}{2} < s$. Přitom $\sup M$ není a $\inf M$ je prvkem zadané množiny M .

Supremum a infimum

Věta (o existenci suprema a infima)

- 1) *Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.*
- 2) *Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.*

- Tuto větu bereme za axiom vyjadřující základní vlastnost číselné osy. Tedy: **existuje bijekce množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu.**
- Říkáme též: *číselná osa je spojitá.*
- Pojmy „číslo“ a „bod číselné osy“ považujeme za synonyma.
- Pojmy supremum a infimum a věta o existenci suprema a infima jsou pro matematickou analýzu velmi důležité.