

## Matematická analýza 1

Jiří Fišer

16. října 2007

# Několik vět o reálných číslech a číselných množinách

## Věta (o aritmetickém a geometrickém průměru)

*Jsou-li  $a, b$  libovolná reálná nezáporná čísla, pak jejich aritmetický průměr  $(\frac{a+b}{2})$  je větší nebo roven jejich průměru geometrickému  $(\sqrt{ab})$ , přičemž rovnost průměrů nastává právě při rovnosti obou čísel  $a, b$ .*

## Věta (o aritmetickém a geometrickém průměru)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0 : \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \left( \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b \right).$$

## Princip důkazu přímého (syntetického).

- nechť  $a \geq b$ ,
- vyjde se z platné nerovnosti  $\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0$ ,
- její úpravou dostaneme tvrzení.



# Několik vět o reálných číslech a číselných množinách

## Věta (o aritmetickém a geometrickém průměru)

*Jsou-li  $a, b$  libovolná reálná nezáporná čísla, pak jejich aritmetický průměr  $(\frac{a+b}{2})$  je větší nebo roven jejich průměru geometrickému  $(\sqrt{ab})$ , přičemž rovnost průměrů nastává právě při rovnosti obou čísel  $a, b$ .*

## Věta (o aritmetickém a geometrickém průměru)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0 : \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \left( \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b \right).$$

## Princip důkazu přímého (syntetického).

- nechť  $a \geq b$ ,
- vyjde se z platné nerovnosti  $\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0$ ,
- její úpravou dostaneme tvrzení.



# Několik vět o reálných číslech a číselných množinách

## Věta (o aritmetickém a geometrickém průměru)

*Jsou-li  $a, b$  libovolná reálná nezáporná čísla, pak jejich aritmetický průměr  $(\frac{a+b}{2})$  je větší nebo roven jejich průměru geometrickému  $(\sqrt{ab})$ , přičemž rovnost průměrů nastává právě při rovnosti obou čísel  $a, b$ .*

## Věta (o aritmetickém a geometrickém průměru)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0 : \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \left( \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow a = b \right).$$

## Princip důkazu přímého (syntetického).

- necht'  $a \geq b$ ,
- vyjde se z platné nerovnosti  $\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0$ ,
- její úpravou dostaneme tvrzení.



## Věta (Bernoulliho nerovnost)

$\forall h \in \mathbb{R}, h > -1, h \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  platí

$$V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh.$$

### Princip důkazu.

Matematickou indukcí:

- 1)  $V(2) : (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h,$
- 2)  $V(n) \Rightarrow V(n + 1),$ 
  - ▶ obě strany  $V(n)$  násobíme výrazem  $(1 + h),$
  - ▶ na pravé straně vynecháme člen  $nh^2.$



Bernoulliho nerovnost se používá např. při některých důkazech vlastností posloupností.

## Věta (Bernoulliho nerovnost)

$\forall h \in \mathbb{R}, h > -1, h \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  platí

$$V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh.$$

## Princip důkazu.

Matematickou indukcí:

- 1)  $V(2) : (1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h,$
- 2)  $V(n) \Rightarrow V(n + 1),$ 
  - ▶ obě strany  $V(n)$  násobíme výrazem  $(1 + h),$
  - ▶ na pravé straně vynecháme člen  $nh^2.$



Bernoulliho nerovnost se používá např. při některých důkazech vlastností posloupností.

## Věta (o rovnosti reálných čísel)

*Necht'  $p, q \in \mathbb{R}$ . Jestliže  $\forall \varepsilon > 0$  platí  $|p - q| < \varepsilon$ , pak  $p = q$ .*

### Důkaz (sporem).

- Kdyby  $p \neq q$ , bylo by  $|p - q| > 0$ .
- Zvolíme-li  $\varepsilon = |p - q|$ , dostáváme, že

$$|p - q| < \varepsilon \quad \text{a současně} \quad |p - q| = \varepsilon,$$

což dává spor. Proto  $p = q$ .



Tato jednoduchá věta usnadňuje některé důkazy, např. důkaz následující věty o vložených intervalech.

## Věta (o rovnosti reálných čísel)

*Necht'  $p, q \in \mathbb{R}$ . Jestliže  $\forall \varepsilon > 0$  platí  $|p - q| < \varepsilon$ , pak  $p = q$ .*

### Důkaz (sporem).

- Kdyby  $p \neq q$ , bylo by  $|p - q| > 0$ .
- Zvolíme-li  $\varepsilon = |p - q|$ , dostáváme, že

$$|p - q| < \varepsilon \quad \text{a současně} \quad |p - q| = \varepsilon,$$

což dává spor. Proto  $p = q$ .



Tato jednoduchá věta usnadňuje některé důkazy, např. důkaz následující věty o vložených intervalech.



## Věta (o rovnosti reálných čísel)

*Necht'  $p, q \in \mathbb{R}$ . Jestliže  $\forall \varepsilon > 0$  platí  $|p - q| < \varepsilon$ , pak  $p = q$ .*

### Důkaz (sporem).

- Kdyby  $p \neq q$ , bylo by  $|p - q| > 0$ .
- Zvolíme-li  $\varepsilon = |p - q|$ , dostáváme, že

$$|p - q| < \varepsilon \quad \text{a současně} \quad |p - q| = \varepsilon,$$

což dává spor. Proto  $p = q$ .



Tato jednoduchá věta usnadňuje některé důkazy, např. důkaz následující věty o vložených intervalech.

# Věta o vložených intervalech

## Věta

*Necht'  $\{J_n\}$  je posloupnost omezených uzavřených intervalů*

$$J_n = \langle a_n, b_n \rangle \quad \text{takových, že} \quad J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \cdots .$$

*Pak existuje bod  $x_0$ , který leží ve všech intervalech  $J_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Jestliže navíc*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad |J_n| < \varepsilon,$$

*je takový bod  $x_0$  jediný.*

# Věta o vložených intervalech

## Princip důkazu.

- $A$  — množina všech levých krajních bodů  $a_n$  intervalů  $J_n$ ,
- $B$  — množina jejich pravých krajních bodů  $b_m$ ;
- pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n < b_m$ .
- Podle věty o existenci suprema tedy existuje  $\alpha = \sup A$ , pro nějž  $\alpha \leq b_m$ ;
- podobně existuje  $\beta = \inf B$  a pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n,$$

tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} : \langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle.$$

- Stačí volit  $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ .



# Věta o vložených intervalech

## Princip důkazu.

- $A$  — množina všech levých krajních bodů  $a_n$  intervalů  $J_n$ ,
- $B$  — množina jejich pravých krajních bodů  $b_m$ ;
- pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n < b_m$ .
- Podle věty o existenci suprema tedy existuje  $\alpha = \sup A$ , pro nějž  $\alpha \leq b_m$ ;
- podobně existuje  $\beta = \inf B$  a pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n,$$

tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} : \langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle.$$

- Stačí volit  $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ .



# Věta o vložených intervalech

## Princip důkazu.

- $A$  — množina všech levých krajních bodů  $a_n$  intervalů  $J_n$ ,
- $B$  — množina jejich pravých krajních bodů  $b_m$ ;
- pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n < b_m$ .
- Podle věty o existenci suprema tedy existuje  $\alpha = \sup A$ , pro nějž  $\alpha \leq b_m$ ;
- podobně existuje  $\beta = \inf B$  a pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n,$$

tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} : \langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle.$$

- Stačí volit  $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ .



# Věta o vložených intervalech

## Princip důkazu.

- $A$  — množina všech levých krajních bodů  $a_n$  intervalů  $J_n$ ,
- $B$  — množina jejich pravých krajních bodů  $b_m$ ;
- pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n < b_m$ .
- Podle věty o existenci suprema tedy existuje  $\alpha = \sup A$ , pro nějž  $\alpha \leq b_m$ ;
- podobně existuje  $\beta = \inf B$  a pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n,$$

tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} : \langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle.$$

- Stačí volit  $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ .



# Věta o vložených intervalech

## Princip důkazu.

- $A$  — množina všech levých krajních bodů  $a_n$  intervalů  $J_n$ ,
- $B$  — množina jejich pravých krajních bodů  $b_m$ ;
- pro všechna  $m, n \in \mathbb{N}$  platí  $a_n < b_m$ .
- Podle věty o existenci suprema tedy existuje  $\alpha = \sup A$ , pro nějž  $\alpha \leq b_m$ ;
- podobně existuje  $\beta = \inf B$  a pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí

$$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n,$$

tedy

$$\forall n \in \mathbb{N} : \langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle.$$

- Stačí volit  $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$ .



# Věta o vložených intervalech

## Pokračování důkazu.

- Je-li interval  $\langle \alpha, \beta \rangle$  degenerovaný, dostáváme  $x_0$  jednoznačně. To nastává právě tehdy, když je splněna druhá podmínka věty, tedy když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad b_n - a_n < \varepsilon.$$

Jelikož je  $\beta - \alpha \leq b_n - a_n < \varepsilon$ , je podle věty o rovnosti reálných čísel  $\alpha = \beta$ .



- Podmínka věty, zajišťující jednoznačnost společného bodu  $x_0$  může být formulována i takto: „Jestliže posloupnost  $\{|J_n|\}$  délek intervalů  $J_n$  je nulová . . . “
- Větu o vložených intervalech používáme při důkazech některých důležitých vlastností posloupností a funkcí.



# Věta o vložených intervalech

## Pokračování důkazu.

- Je-li interval  $\langle \alpha, \beta \rangle$  degenerovaný, dostáváme  $x_0$  jednoznačně. To nastává právě tehdy, když je splněna druhá podmínka věty, tedy když

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad b_n - a_n < \varepsilon.$$

Jelikož je  $\beta - \alpha \leq b_n - a_n < \varepsilon$ , je podle věty o rovnosti reálných čísel  $\alpha = \beta$ .



- Podmínka věty, zajišťující jednoznačnost společného bodu  $x_0$  může být formulována i takto: „Jestliže posloupnost  $\{|J_n|\}$  délek intervalů  $J_n$  je nulová . . . “
- Větu o vložených intervalech používáme při důkazech některých důležitých vlastností posloupností a funkcí.

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Topologická definice okolí bodu

### Definice

**Okolím bodu** *a* nazveme každý otevřený interval  $(c, d)$  konečné délky, který obsahuje bod *a* (tj. kde  $a \in (c, d)$ ); označení okolí bodu *a*:  $U(a)$ .

### Věta (vlastnosti okolí)

Okolí bodu *a* má tyto vlastnosti:

- (1) Pro každé  $U(a)$  je  $a \in U(a)$ .
- (2) Ke každým dvěma okolím  $U_1(a)$ ,  $U_2(a)$  existuje okolí  $U(a)$  tak, že  $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$ .
- (3) Je-li  $b \in U(a)$ , pak existuje  $U_1(b)$  tak, že  $U_1(b) \subset U(a)$ .
- (4) Pro libovolná  $a \neq b$  existují  $U_1(a)$ ,  $U_2(b)$  tak, že  $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Topologická definice okolí bodu

### Definice

**Okolím bodu** *a* nazveme každý otevřený interval  $(c, d)$  konečné délky, který obsahuje bod *a* (tj. kde  $a \in (c, d)$ ); označení okolí bodu *a*:  $U(a)$ .

### Věta (vlastnosti okolí)

*Okolí bodu a má tyto vlastnosti:*

- (1) Pro každé  $U(a)$  je  $a \in U(a)$ .
- (2) Ke každým dvěma okolím  $U_1(a)$ ,  $U_2(a)$  existuje okolí  $U(a)$  tak, že  $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$ .
- (3) Je-li  $b \in U(a)$ , pak existuje  $U_1(b)$  tak, že  $U_1(b) \subset U(a)$ .
- (4) Pro libovolná  $a \neq b$  existují  $U_1(a)$ ,  $U_2(b)$  tak, že  $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Topologická definice okolí bodu

### Definice

**Okolím bodu**  $a$  nazveme každý otevřený interval  $(c, d)$  konečné délky, který obsahuje bod  $a$  (tj. kde  $a \in (c, d)$ ); označení okolí bodu  $a$ :  $U(a)$ .

### Věta (vlastnosti okolí)

*Okolí bodu  $a$  má tyto vlastnosti:*

- (1) Pro každé  $U(a)$  je  $a \in U(a)$ .
- (2) Ke každým dvěma okolím  $U_1(a)$ ,  $U_2(a)$  existuje okolí  $U(a)$  tak, že  $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$ .
- (3) Je-li  $b \in U(a)$ , pak existuje  $U_1(b)$  tak, že  $U_1(b) \subset U(a)$ .
- (4) Pro libovolná  $a \neq b$  existují  $U_1(a)$ ,  $U_2(b)$  tak, že  $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Topologická definice okolí bodu

### Definice

**Okolím bodu**  $a$  nazveme každý otevřený interval  $(c, d)$  konečné délky, který obsahuje bod  $a$  (tj. kde  $a \in (c, d)$ ); označení okolí bodu  $a$ :  $U(a)$ .

### Věta (vlastnosti okolí)

*Okolí bodu  $a$  má tyto vlastnosti:*

- (1) Pro každé  $U(a)$  je  $a \in U(a)$ .
- (2) Ke každým dvěma okolím  $U_1(a)$ ,  $U_2(a)$  existuje okolí  $U(a)$  tak, že  $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$ .
- (3) Je-li  $b \in U(a)$ , pak existuje  $U_1(b)$  tak, že  $U_1(b) \subset U(a)$ .
- (4) Pro libovolná  $a \neq b$  existují  $U_1(a)$ ,  $U_2(b)$  tak, že  $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Topologická definice okolí bodu

### Definice

**Okolím bodu**  $a$  nazveme každý otevřený interval  $(c, d)$  konečné délky, který obsahuje bod  $a$  (tj. kde  $a \in (c, d)$ ); označení okolí bodu  $a$ :  $U(a)$ .

### Věta (vlastnosti okolí)

Okolí bodu  $a$  má tyto vlastnosti:

- (1) Pro každé  $U(a)$  je  $a \in U(a)$ .
- (2) Ke každým dvěma okolím  $U_1(a)$ ,  $U_2(a)$  existuje okolí  $U(a)$  tak, že  $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$ .
- (3) Je-li  $b \in U(a)$ , pak existuje  $U_1(b)$  tak, že  $U_1(b) \subset U(a)$ .
- (4) Pro libovolná  $a \neq b$  existují  $U_1(a)$ ,  $U_2(b)$  tak, že  $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

Metrická definice okolí bodu

## Definice

$\varepsilon$ -**okolím bodu**  $a$ , kde  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , nazýváme *interval*  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ; označení:  $U(a, \varepsilon)$  nebo též  $U(a)$ .

Lehce ověříme, že  $\varepsilon$ -okolí má všechny uvedené vlastnosti okolí. Místo  $x \in U(a, \varepsilon)$  lze rovněž psát  $|x - a| < \varepsilon$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Metrická definice okolí bodu

### Definice

$\varepsilon$ -**okolím bodu**  $a$ , kde  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ , nazýváme *interval*  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ; označení:  $U(a, \varepsilon)$  nebo též  $U(a)$ .

Lehce ověříme, že  $\varepsilon$ -okolí má všechny uvedené vlastnosti okolí. Místo  $x \in U(a, \varepsilon)$  lze rovněž psát  $|x - a| < \varepsilon$ .



# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Další typy okolí bodu

### Definice

**Prstencovým (redukovaným) okolím** bodu  $a$  nazýváme množinu  $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$ .

- Podobně  $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ .
- Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu  $a$  jako interval  $(c, a)$  nebo  $(a - \varepsilon, a)$  resp.  $\langle a, d \rangle$  nebo  $\langle a, a + \varepsilon \rangle$ ; jsou to tzv. **jednostranná okolí**.
- Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová (redukovaná) okolí* — to když z jednostranného okolí vypustíme bod  $a$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Další typy okolí bodu

### Definice

**Prstencovým (redukovaným) okolím** bodu  $a$  nazýváme množinu  $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$ .

- Podobně  $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ .
- Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu  $a$  jako interval  $(c, a)$  nebo  $(a - \varepsilon, a)$  resp.  $\langle a, d \rangle$  nebo  $\langle a, a + \varepsilon \rangle$ ; jsou to tzv. **jednostranná okolí**.
- Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová (redukovaná) okolí* — to když z jednostranného okolí vypustíme bod  $a$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Další typy okolí bodu

### Definice

**Prstencovým (redukovaným) okolím** bodu  $a$  nazýváme množinu  $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$ .

- Podobně  $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ .
- Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu  $a$  jako interval  $(c, a)$  nebo  $(a - \varepsilon, a)$  resp.  $\langle a, d \rangle$  nebo  $\langle a, a + \varepsilon \rangle$ ; jsou to tzv. **jednostranná okolí**.
- Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová (redukovaná) okolí* — to když z jednostranného okolí vypustíme bod  $a$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Další typy okolí bodu

### Definice

**Prstencovým (redukovaným) okolím** bodu  $a$  nazýváme množinu  $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$ .

- Podobně  $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$ .
- Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu  $a$  jako interval  $(c, a)$  nebo  $(a - \varepsilon, a)$  resp.  $\langle a, d \rangle$  nebo  $\langle a, a + \varepsilon \rangle$ ; jsou to tzv. **jednostranná okolí**.
- Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová (redukovaná) okolí* — to když z jednostranného okolí vypustíme bod  $a$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z  $\mathbb{R}$  vzhledem k dané číselné množině  $M$ .

- **Vnitřní bod množiny  $M$ :** Bod množiny  $M$ , který do  $M$  patří i s některým svým okolím.
- **Vnitřek množiny  $M$ :** Množina všech vnitřních bodů množiny  $M$ .
- **Hraniční bod množiny  $M$ :** V každém jeho okolí existuje bod množiny  $M$  a též bod, který do  $M$  nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do  $M$ .)
- **Hranice množiny  $M$ :** Množina všech hraničních bodů množiny  $M$ .
- **Vnější bod množiny (vzhledem k množině)  $M$ :** Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny  $M$ .
- **Vnějšek množiny  $M$ :** Množina všech vnějších bodů množiny  $M$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z  $\mathbb{R}$  vzhledem k dané číselné množině  $M$ .

- **Vnitřní bod množiny  $M$ :** Bod množiny  $M$ , který do  $M$  patří i s některým svým okolím.
- **Vnitřek množiny  $M$ :** Množina všech vnitřních bodů množiny  $M$ .
- **Hraniční bod množiny  $M$ :** V každém jeho okolí existuje bod množiny  $M$  a též bod, který do  $M$  nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do  $M$ .)
- **Hranice množiny  $M$ :** Množina všech hraničních bodů množiny  $M$ .
- **Vnější bod množiny (vzhledem k množině)  $M$ :** Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny  $M$ .
- **Vnějšek množiny  $M$ :** Množina všech vnějších bodů množiny  $M$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z  $\mathbb{R}$  vzhledem k dané číselné množině  $M$ .

- **Vnitřní bod množiny  $M$ :** Bod množiny  $M$ , který do  $M$  patří i s některým svým okolím.
- **Vnitřek množiny  $M$ :** Množina všech vnitřních bodů množiny  $M$ .
- **Hraniční bod množiny  $M$ :** V každém jeho okolí existuje bod množiny  $M$  a též bod, který do  $M$  nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do  $M$ .)
- **Hranice množiny  $M$ :** Množina všech hraničních bodů množiny  $M$ .
- **Vnější bod množiny (vzhledem k množině)  $M$ :** Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny  $M$ .
- **Vnějšek množiny  $M$ :** Množina všech vnějších bodů množiny  $M$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z  $\mathbb{R}$  vzhledem k dané číselné množině  $M$ .

- **Vnitřní bod množiny  $M$ :** Bod množiny  $M$ , který do  $M$  patří i s některým svým okolím.
- **Vnitřek množiny  $M$ :** Množina všech vnitřních bodů množiny  $M$ .
- **Hraniční bod množiny  $M$ :** V každém jeho okolí existuje bod množiny  $M$  a též bod, který do  $M$  nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do  $M$ .)
- **Hranice množiny  $M$ :** Množina všech hraničních bodů množiny  $M$ .
- **Vnější bod množiny (vzhledem k množině)  $M$ :** Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny  $M$ .
- **Vnějšek množiny  $M$ :** Množina všech vnějších bodů množiny  $M$ .



# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

- Množina  $M$  je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina  $M$  je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr  $\overline{M}$  množiny  $M$** : Sjednocení množiny  $M$  a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny  $M$** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny  $M$ .
- **Izolovaný bod množiny  $M$** : Bod množiny  $M$ , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace  $M'$  množiny  $M$** : Množina všech hromadných bodů množiny  $M$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

- Množina  $M$  je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina  $M$  je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr  $\overline{M}$  množiny  $M$** : Sjednocení množiny  $M$  a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny  $M$** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny  $M$ .
- **Izolovaný bod množiny  $M$** : Bod množiny  $M$ , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace  $M'$  množiny  $M$** : Množina všech hromadných bodů množiny  $M$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

- Množina  $M$  je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina  $M$  je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr  $\overline{M}$  množiny  $M$** : Sjednocení množiny  $M$  a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny  $M$** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny  $M$ .
- **Izolovaný bod množiny  $M$** : Bod množiny  $M$ , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace  $M'$  množiny  $M$** : Množina všech hromadných bodů množiny  $M$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

- Množina  $M$  je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina  $M$  je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr  $\overline{M}$  množiny  $M$** : Sjednocení množiny  $M$  a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny  $M$** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny  $M$ .
- **Izolovaný bod množiny  $M$** : Bod množiny  $M$ , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace  $M'$  množiny  $M$** : Množina všech hromadných bodů množiny  $M$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

- Množina  $M$  je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina  $M$  je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr  $\overline{M}$  množiny  $M$** : Sjednocení množiny  $M$  a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny  $M$** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny  $M$ .
- **Izolovaný bod množiny  $M$** : Bod množiny  $M$ , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace  $M'$  množiny  $M$** : Množina všech hromadných bodů množiny  $M$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

- Množina  $M$  je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina  $M$  je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr  $\overline{M}$  množiny  $M$** : Sjednocení množiny  $M$  a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny  $M$** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny  $M$ .
- **Izolovaný bod množiny  $M$** : Bod množiny  $M$ , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace  $M'$  množiny  $M$** : Množina všech hromadných bodů množiny  $M$ .

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

- Jelikož všechny tyto pojmy jsou založeny vlastně jen na pojmu okolí, setkáváme se s nimi ve všech prostorech, kde se pracuje s okolím.
- Na číselné ose (na rozdíl např. od roviny) však pracujeme i s pojmy „levé okolí“ a „pravé okolí“ a můžeme tedy např. definovat *levý hromadný bod* a *pravý hromadný bod* a těchto pojmů skutečně využíváme při definování jednostranných limit funkce.

## Úloha

*Všechny uvedené pojmy použijte pro množinu*

$$M = \langle -1, 0 \rangle \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

# Klasifikace bodů vzhledem k množině

## Definice důležitých pojmů

- Jelikož všechny tyto pojmy jsou založeny vlastně jen na pojmu okolí, setkáváme se s nimi ve všech prostorech, kde se pracuje s okolím.
- Na číselné ose (na rozdíl např. od roviny) však pracujeme i s pojmy „levé okolí“ a „pravé okolí“ a můžeme tedy např. definovat *levý hromadný bod* a *pravý hromadný bod* a těchto pojmů skutečně využíváme při definování jednostranných limit funkce.

## Úloha

*Všechny uvedené pojmy použijte pro množinu*

$$M = \langle -1, 0 \rangle \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$



# Rozšířená reálná osa

- Číselnou osu rozšíříme o dvě **nevlastní čísla**:  $+\infty$  a  $-\infty$ .
- Označení rozšířené reálné osy:  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .
- Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

# Rozšířená reálná osa

## Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na  $\mathbb{R}$ .

- *Uspořádání:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$

zvláště

$$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

- *Okolí:*  $U(+\infty)$  toto označení budeme používat pro každý interval  $\langle c, +\infty \rangle \subset \mathbb{R}^*$ , ale pokud budeme pracovat na  $\mathbb{R}$ , použijeme toto označení (pro zjednodušení vyjadřování) též pro intervaly  $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$ , což jsou vlastně prstencová okolí  $P(+\infty)$  na  $\mathbb{R}^*$ . Podobně pro  $U(-\infty)$  a  $P(-\infty)$ .

# Rozšířená reálná osa

## Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na  $\mathbb{R}$ .

- *Uspořádání:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$

zvláště

$$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

- *Okolí:*  $U(+\infty)$  toto označení budeme používat pro každý interval  $\langle c, +\infty \rangle \subset \mathbb{R}^*$ , ale pokud budeme pracovat na  $\mathbb{R}$ , použijeme toto označení (pro zjednodušení vyjadřování) též pro intervaly  $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$ , což jsou vlastně prstencová okolí  $P(+\infty)$  na  $\mathbb{R}^*$ . Podobně pro  $U(-\infty)$  a  $P(-\infty)$ .

# Rozšířená reálná osa

## Vlastnosti nevlastních čísel

- *Supremum a infimum*: Pro množinu  $M$ , která není shora omezená, je  $\sup M = +\infty$ , pro množinu  $M$ , která není zdola omezená, je  $\inf M = -\infty$ .

- *Hromadné body*: Definice je formálně stejná, tedy  $+\infty$  nazveme hromadným bodem množiny  $M \subset \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$  v každém jeho okolí  $P(+\infty)$  leží alespoň jeden bod množiny  $M$ . Podobně pro  $-\infty$ .

Např. množina  $\mathbb{Z}$  všech celých čísel má hromadné body  $+\infty$  a  $-\infty$ ,  $\sup \mathbb{Z} = +\infty$ ,  $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ , ale samozřejmě  $+\infty \notin \mathbb{Z}$ ,  $-\infty \notin \mathbb{Z}$ .

# Rozšířená reálná osa

## Vlastnosti nevlastních čísel

- *Supremum a infimum*: Pro množinu  $M$ , která není shora omezená, je  $\sup M = +\infty$ , pro množinu  $M$ , která není zdola omezená, je  $\inf M = -\infty$ .
- *Hromadné body*: Definice je formálně stejná, tedy  $+\infty$  nazveme hromadným bodem množiny  $M \subset \mathbb{R}^*$   $\Leftrightarrow$  v každém jeho okolí  $P(+\infty)$  leží alespoň jeden bod množiny  $M$ . Podobně pro  $-\infty$ .

Např. množina  $\mathbb{Z}$  všech celých čísel má hromadné body  $+\infty$  a  $-\infty$ ,  $\sup \mathbb{Z} = +\infty$ ,  $\inf \mathbb{Z} = -\infty$ , ale samozřejmě  $+\infty \notin \mathbb{Z}$ ,  $-\infty \notin \mathbb{Z}$ .

# Rozšířená reálná osa

## Početní operace s nevlastními čísly

- *Sčítání a odčítání*:  $\forall x \in \mathbb{R}$  definujeme

$$\begin{aligned}\pm x + (+\infty) &= (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = \\ &= (+\infty) - (-\infty) = +\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pm x + (-\infty) &= (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = \\ &= (-\infty) - (+\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty).$$

# Rozšířená reálná osa

## Početní operace s nevlastními čísly

- *Násobení*:  $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$  definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Podobně pro  $x < 0$ .

- *Nedefinujeme*

$$0 \cdot (+\infty), \quad (+\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

# Rozšířená reálná osa

## Početní operace s nevlastními čísly

- *Dělení*:  $\forall x \in \mathbb{R}$  definujeme

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

Pro  $x > 0$  je

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

pro  $x < 0$  je

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \text{ atd.}, \quad \frac{x}{0} \text{ pro žádné } x \in \mathbb{R}, \text{ tj. ani } \frac{0}{0} \text{ nebo } \frac{\pm\infty}{0}.$$



# Rozšířená reálná osa

## Početní operace s nevlastními čísly

- *Mocniny*:  $\forall n \in \mathbb{N}$  definujeme

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

# Rozšířená reálná osa

## Poznámka

*Z praktických důvodů se někdy píše místo  $+\infty$  jen  $\infty$ , takže např. místo výrazu  $(+\infty) + (+\infty)$  lze napsat jen  $\infty + \infty$ . Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jedině komplexní nekonečno označované  $\infty$ , musíme dát pozor na jeho odlišení od  $+\infty$  z rozšířené reálné osy  $\mathbb{R}^*$ .*

## Úloha

Vypočtete

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

# Rozšířená reálná osa

## Poznámka

*Z praktických důvodů se někdy píše místo  $+\infty$  jen  $\infty$ , takže např. místo výrazu  $(+\infty) + (+\infty)$  lze napsat jen  $\infty + \infty$ . Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jedině komplexní nekonečno označované  $\infty$ , musíme dát pozor na jeho odlišení od  $+\infty$  z rozšířené reálné osy  $\mathbb{R}^*$ .*

## Úloha

Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$