

Matematická analýza 1

Jiří Fišer

2. října 2009

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Topologická definice okolí bodu

Definice

Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a : $U(a)$.

Věta (vlastnosti okolí)

Okolí bodu a má tyto vlastnosti:

- (1) Pro každé $U(a)$ je $a \in U(a)$.
- (2) Ke každým dvěma okolím $U_1(a)$, $U_2(a)$ existuje okolí $U(a)$ tak, že $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$.
- (3) Je-li $b \in U(a)$, pak existuje $U_1(b)$ tak, že $U_1(b) \subset U(a)$.
- (4) Pro libovolná $a \neq b$ existují $U_1(a)$, $U_2(b)$ tak, že $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$.

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Topologická definice okolí bodu

Definice

Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a : $U(a)$.

Věta (vlastnosti okolí)

Okolí bodu a má tyto vlastnosti:

- (1) Pro každé $U(a)$ je $a \in U(a)$.
- (2) Ke každým dvěma okolím $U_1(a)$, $U_2(a)$ existuje okolí $U(a)$ tak, že $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$.
- (3) Je-li $b \in U(a)$, pak existuje $U_1(b)$ tak, že $U_1(b) \subset U(a)$.
- (4) Pro libovolná $a \neq b$ existují $U_1(a)$, $U_2(b)$ tak, že $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$.

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Topologická definice okolí bodu

Definice

Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a : $U(a)$.

Věta (vlastnosti okolí)

Okolí bodu a má tyto vlastnosti:

- (1) Pro každé $U(a)$ je $a \in U(a)$.
- (2) Ke každým dvěma okolím $U_1(a)$, $U_2(a)$ existuje okolí $U(a)$ tak, že $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$.
- (3) Je-li $b \in U(a)$, pak existuje $U_1(b)$ tak, že $U_1(b) \subset U(a)$.
- (4) Pro libovolná $a \neq b$ existují $U_1(a)$, $U_2(b)$ tak, že $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$.

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Topologická definice okolí bodu

Definice

Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a : $U(a)$.

Věta (vlastnosti okolí)

Okolí bodu a má tyto vlastnosti:

- (1) Pro každé $U(a)$ je $a \in U(a)$.*
- (2) Ke každým dvěma okolím $U_1(a)$, $U_2(a)$ existuje okolí $U(a)$ tak, že $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$.*
- (3) Je-li $b \in U(a)$, pak existuje $U_1(b)$ tak, že $U_1(b) \subset U(a)$.*
- (4) Pro libovolná $a \neq b$ existují $U_1(a)$, $U_2(b)$ tak, že $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$.*

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Topologická definice okolí bodu

Definice

Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a : $U(a)$.

Věta (vlastnosti okolí)

Okolí bodu a má tyto vlastnosti:

- (1) Pro každé $U(a)$ je $a \in U(a)$.
- (2) Ke každým dvěma okolím $U_1(a)$, $U_2(a)$ existuje okolí $U(a)$ tak, že $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$.
- (3) Je-li $b \in U(a)$, pak existuje $U_1(b)$ tak, že $U_1(b) \subset U(a)$.
- (4) Pro libovolná $a \neq b$ existují $U_1(a)$, $U_2(b)$ tak, že $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$.

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Metrická definice okolí bodu

Definice

ε -**okolím bodu** a , kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nazýváme interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; označení: $U(a, \varepsilon)$ nebo též $U(a)$.

Lehce ověříme, že ε -okolí má všechny uvedené vlastnosti okolí. Místo $x \in U(a, \varepsilon)$ lze rovněž psát $|x - a| < \varepsilon$.

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Metrická definice okolí bodu

Definice

ε -**okolím bodu** a , kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nazýváme interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; označení: $U(a, \varepsilon)$ nebo též $U(a)$.

Lehce ověříme, že ε -okolí má všechny uvedené vlastnosti okolí. Místo $x \in U(a, \varepsilon)$ lze rovněž psát $|x - a| < \varepsilon$.

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Další typy okolí bodu

Definice

Prstencovým (redukovaným) okolím bodu a nazýváme množinu $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

- Podobně $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.
- Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu a jako interval (c, a) nebo $(a - \varepsilon, a)$ resp. $\langle a, d \rangle$ nebo $\langle a, a + \varepsilon \rangle$; jsou to tzv. **jednostranná okolí**.
- Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová (redukovaná) okolí* — to když z jednostranného okolí vypustíme bod a .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Další typy okolí bodu

Definice

Prstencovým (redukovaným) okolím bodu a nazýváme množinu $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

- Podobně $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.
- Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu a jako interval (c, a) nebo $(a - \varepsilon, a)$ resp. $\langle a, d \rangle$ nebo $\langle a, a + \varepsilon \rangle$; jsou to tzv. **jednostranná okolí**.
- Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová (redukovaná) okolí* — to když z jednostranného okolí vypustíme bod a .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Další typy okolí bodu

Definice

Prstencovým (redukovaným) okolím bodu a nazýváme množinu $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

- Podobně $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.
- Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu a jako interval (c, a) nebo $(a - \varepsilon, a)$ resp. $\langle a, d \rangle$ nebo $\langle a, a + \varepsilon \rangle$; jsou to tzv. **jednostranná okolí**.
- Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová (redukovaná) okolí* — to když z jednostranného okolí vypustíme bod a .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Další typy okolí bodu

Definice

Prstencovým (redukovaným) okolím bodu a nazýváme množinu $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

- Podobně $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$.
- Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu a jako interval (c, a) nebo $(a - \varepsilon, a)$ resp. $\langle a, d \rangle$ nebo $\langle a, a + \varepsilon \rangle$; jsou to tzv. **jednostranná okolí**.
- Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová (redukovaná) okolí* — to když z jednostranného okolí vypustíme bod a .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z $\mathbb{R}$ vzhledem k dané číselné množině M .

- **Vnitřní bod množiny M :** Bod množiny M , který do M patří i s některým svým okolím.
- **Vnitřek množiny M :** Množina všech vnitřních bodů množiny M .
- **Hraniční bod množiny M :** V každém jeho okolí existuje bod množiny M a též bod, který do M nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do M .)
- **Hranice množiny M :** Množina všech hraničních bodů množiny M .
- **Vnější bod množiny (vzhledem k množině) M :** Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny M .
- **Vnějšek množiny M :** Množina všech vnějších bodů množiny M .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z $\mathbb{R}$ vzhledem k dané číselné množině M .

- **Vnitřní bod množiny M :** Bod množiny M , který do M patří i s některým svým okolím.
- **Vnitřek množiny M :** Množina všech vnitřních bodů množiny M .
- **Hraniční bod množiny M :** V každém jeho okolí existuje bod množiny M a též bod, který do M nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do M .)
- **Hranice množiny M :** Množina všech hraničních bodů množiny M .
- **Vnější bod množiny (vzhledem k množině) M :** Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny M .
- **Vnějšek množiny M :** Množina všech vnějších bodů množiny M .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z $\mathbb{R}$ vzhledem k dané číselné množině M .

- **Vnitřní bod množiny M :** Bod množiny M , který do M patří i s některým svým okolím.
- **Vnitřek množiny M :** Množina všech vnitřních bodů množiny M .
- **Hraniční bod množiny M :** V každém jeho okolí existuje bod množiny M a též bod, který do M nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do M .)
- **Hranice množiny M :** Množina všech hraničních bodů množiny M .
- **Vnější bod množiny (vzhledem k množině) M :** Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny M .
- **Vnějšek množiny M :** Množina všech vnějších bodů množiny M .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z $\mathbb{R}$ vzhledem k dané číselné množině M .

- **Vnitřní bod množiny M :** Bod množiny M , který do M patří i s některým svým okolím.
- **Vnitřek množiny M :** Množina všech vnitřních bodů množiny M .
- **Hraniční bod množiny M :** V každém jeho okolí existuje bod množiny M a též bod, který do M nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do M .)
- **Hranice množiny M :** Množina všech hraničních bodů množiny M .
- **Vnější bod množiny (vzhledem k množině) M :** Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny M .
- **Vnějšíšek množiny M :** Množina všech vnějších bodů množiny M .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

- Množina M je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- *Uzávěr $\overline{M}$ množiny M* : Sjednocení množiny M a její hranice.
- *Hromadný bod a množiny M* : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M .
- *Izolovaný bod množiny M* : Bod množiny M , který není jejím hromadným bodem.
- *Diskrétní množina*: Všechny její body jsou izolované.
- *Derivace M' množiny M* : Množina všech hromadných bodů množiny M .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

- Množina M je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr $\overline{M}$ množiny M** : Sjednocení množiny M a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny M** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M .
- **Izolovaný bod množiny M** : Bod množiny M , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace M' množiny M** : Množina všech hromadných bodů množiny M .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

- Množina M je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr $\overline{M}$ množiny M** : Sjednocení množiny M a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny M** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M .
- **Izolovaný bod množiny M** : Bod množiny M , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace M' množiny M** : Množina všech hromadných bodů množiny M .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

- Množina M je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr $\overline{M}$ množiny M** : Sjednocení množiny M a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny M** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M .
- **Izolovaný bod množiny M** : Bod množiny M , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace M' množiny M** : Množina všech hromadných bodů množiny M .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

- Množina M je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr $\overline{M}$ množiny M** : Sjednocení množiny M a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny M** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M .
- **Izolovaný bod množiny M** : Bod množiny M , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace M' množiny M** : Množina všech hromadných bodů množiny M .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

- Množina M je **otevřená**: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M je **uzavřená**: Obsahuje svou hranici.
- **Uzávěr $\overline{M}$ množiny M** : Sjednocení množiny M a její hranice.
- **Hromadný bod a množiny M** : V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M .
- **Izolovaný bod množiny M** : Bod množiny M , který není jejím hromadným bodem.
- **Diskrétní množina**: Všechny její body jsou izolované.
- **Derivace M' množiny M** : Množina všech hromadných bodů množiny M .

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

- Jelikož všechny tyto pojmy jsou založeny vlastně jen na pojmu okolí, setkáváme se s nimi ve všech prostorech, kde se pracuje s okolím.
- Na číselné ose (na rozdíl např. od roviny) však pracujeme i s pojmy „levé okolí“ a „pravé okolí“ a můžeme tedy např. definovat *levý hromadný bod* a *pravý hromadný bod* a těchto pojmů skutečně využíváme při definování jednostranných limit funkce.

Úloha

Všechny uvedené pojmy použijte pro množinu

$$M = \langle -1, 0 \rangle \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice důležitých pojmů

- Jelikož všechny tyto pojmy jsou založeny vlastně jen na pojmu okolí, setkáváme se s nimi ve všech prostorech, kde se pracuje s okolím.
- Na číselné ose (na rozdíl např. od roviny) však pracujeme i s pojmy „levé okolí“ a „pravé okolí“ a můžeme tedy např. definovat *levý hromadný bod* a *pravý hromadný bod* a těchto pojmů skutečně využíváme při definování jednostranných limit funkce.

Úloha

Všechny uvedené pojmy použijte pro množinu

$$M = \langle -1, 0 \rangle \cup \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Rozšířená reálná osa

- Číselnou osu rozšíříme o dvě **nevlastní čísla**: $+\infty$ a $-\infty$.
- Označení rozšířené reálné osy: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

Rozšířená reálná osa

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

- *Uspořádání:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$

zvláště

$$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

- *Okolí:* $U(+\infty)$ toto označení budeme používat pro každý interval $\langle c, +\infty \rangle \subset \mathbb{R}^*$, ale pokud budeme pracovat na $\mathbb{R}$, použijeme toto označení (pro zjednodušení vyjadřování) též pro intervaly $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$, což jsou vlastně prstencová okolí $P(+\infty)$ na $\mathbb{R}^*$. Podobně pro $U(-\infty)$ a $P(-\infty)$.

Rozšířená reálná osa

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

- *Uspořádání:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty,$$

zvláště

$$-\infty < +\infty, \quad -(-\infty) = +\infty, \quad -(+\infty) = -\infty,$$

$$|+\infty| = |-\infty| = +\infty.$$

- *Okolí:* $U(+\infty)$ toto označení budeme používat pro každý interval $\langle c, +\infty \rangle \subset \mathbb{R}^*$, ale pokud budeme pracovat na $\mathbb{R}$, použijeme toto označení (pro zjednodušení vyjadřování) též pro intervaly $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$, což jsou vlastně prstencová okolí $P(+\infty)$ na $\mathbb{R}^*$. Podobně pro $U(-\infty)$ a $P(-\infty)$.

Rozšířená reálná osa

Vlastnosti nevlastních čísel

- *Supremum a infimum*: Pro množinu M , která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M , která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

- *Hromadné body*: Definice je formálně stejná, tedy $+\infty$ nazveme hromadným bodem množiny $M \subset \mathbb{R}^*$ $\Leftrightarrow$ v každém jeho okolí $P(+\infty)$ leží alespoň jeden bod množiny M . Podobně pro $-\infty$.

Např. množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel má hromadné body $+\infty$ a $-\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, ale samozřejmě $+\infty \notin \mathbb{Z}$, $-\infty \notin \mathbb{Z}$.

Rozšířená reálná osa

Vlastnosti nevlastních čísel

- *Supremum a infimum*: Pro množinu M , která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M , která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.

- *Hromadné body*: Definice je formálně stejná, tedy $+\infty$ nazveme hromadným bodem množiny $M \subset \mathbb{R}^*$ $\Leftrightarrow$ v každém jeho okolí $P(+\infty)$ leží alespoň jeden bod množiny M . Podobně pro $-\infty$.

Např. množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel má hromadné body $+\infty$ a $-\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, ale samozřejmě $+\infty \notin \mathbb{Z}$, $-\infty \notin \mathbb{Z}$.

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Sčítání a odčítání*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\begin{aligned}\pm x + (+\infty) &= (+\infty) \pm x = \pm x - (-\infty) = (+\infty) + (+\infty) = \\ &= (+\infty) - (-\infty) = +\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pm x + (-\infty) &= (-\infty) \pm x = \pm x - (+\infty) = (-\infty) + (-\infty) = \\ &= (-\infty) - (+\infty) = -\infty.\end{aligned}$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty) - (+\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \quad (-\infty) + (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty).$$

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Násobení*: $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = (+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Podobně pro $x < 0$.

- *Nedefinujeme*

$$0 \cdot (+\infty), \quad (+\infty) \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Dělení*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

Pro $x > 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

pro $x < 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \text{ atd.}, \quad \frac{x}{0} \text{ pro žádné } x \in \mathbb{R}, \text{ tj. ani } \frac{0}{0} \text{ nebo } \frac{\pm\infty}{0}.$$

Rozšířená reálná osa

Početní operace s nevlastními čísly

- *Mocniny*: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

Rozšířená reálná osa

Poznámka

Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ jen ∞ , takže např. místo výrazu $(+\infty) + (+\infty)$ lze napsat jen $\infty + \infty$. Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jedině komplexní nekonečno označované ∞ , musíme dát pozor na jeho odlišení od $+\infty$ z rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^$.*

Úloha

Vypočtete

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

Rozšířená reálná osa

Poznámka

Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ jen ∞ , takže např. místo výrazu $(+\infty) + (+\infty)$ lze napsat jen $\infty + \infty$. Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jedině komplexní nekonečno označované ∞ , musíme dát pozor na jeho odlišení od $+\infty$ z rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^$.*

Úloha

Vypočtěte

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

Číselné posloupnosti

Pojem posloupnosti

- Každé zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme **číselná posloupnost**.

$$1 \mapsto a_1, \quad 2 \mapsto a_2, \quad 3 \mapsto a_3, \quad \dots$$

- Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$;
- a_n se nazývá **n -tý člen** posloupnosti.

Pojem posloupnosti

- Každé zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme **číselná posloupnost**.

$$1 \mapsto a_1, \quad 2 \mapsto a_2, \quad 3 \mapsto a_3, \quad \dots$$

- Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$;
- a_n se nazývá **n -tý člen** posloupnosti.

Způsoby zadání posloupnosti

- několika prvními členy,
- n -tým členem,
- rekurentně.

Zadání posloupnosti několika prvními členy

Úloha

Je dána posloupnost $\frac{1}{1 \cdot 4}$, $\frac{3}{4 \cdot 7}$, $\frac{5}{7 \cdot 10}$, $\frac{7}{10 \cdot 13}$, $\dots$ Určete její n -tý člen.

Řešení.

$$a_n = \frac{2n-1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$$



Zadání posloupnosti několika prvními členy

Úloha

Je dána posloupnost $\frac{1}{1 \cdot 4}$, $\frac{3}{4 \cdot 7}$, $\frac{5}{7 \cdot 10}$, $\frac{7}{10 \cdot 13}$, $\dots$ Určete její n -tý člen.

Řešení.

$$a_n = \frac{2n-1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$$



Zadání posloupnosti n -tým členem

- $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\},$
- $\{(-1)^n \cdot n\},$
- $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\},$
- $\{a \cdot q^{n-1}\},$
- $\{a + (n - 1)d\}.$

Vypočtěte členy a_1, a_2, a_3, a_4 .

Zadání posloupnosti rekurentně

Rekurentní definice

obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d.$$

Rekurentní definice geometrické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (q \notin \{0, 1, -1\}).$$

Zadání posloupnosti rekurentně

Rekurentní definice

obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d.$$

Rekurentní definice geometrické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (q \notin \{0, 1, -1\}).$$

Zadání posloupnosti rekurentně

Úloha

Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána rekurentně takto: $a_1 = 1$,
 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{10}{a_n} \right)$; je to posloupnost aproximací čísla $\sqrt{10}$.
Vypočtěte první čtyři aproximace.

Úloha

Fibonacciho posloupnost $\{b_n\}$ je definována takto: $b_1 = 1$, $b_2 = 1$,
 $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. Vypočtěte prvních 10 členů této posloupnosti.

Zadání posloupnosti rekurentně

Úloha

Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána rekurentně takto: $a_1 = 1$,
 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{10}{a_n} \right)$; je to posloupnost aproximací čísla $\sqrt{10}$.
Vypočtěte první čtyři aproximace.

Úloha

Fibonacciho posloupnost $\{b_n\}$ je definována takto: $b_1 = 1$, $b_2 = 1$,
 $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. Vypočtěte prvních 10 členů této posloupnosti.

Množina (všech) členů posloupnosti

$\{a_n\} \times$ množina (všech) jejích členů

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\},$$

$$\{(-1)^n\} \times \{-1, 1\}.$$

Vybraná posloupnost

Definice

Posloupnost $\{b_n\}$ se nazývá **vybraná** z posloupnosti $\{a_n\}$ (nebo též **podposloupnost**) $\Leftrightarrow \exists$ posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $b_n = a_{k_n}$.

Např. posloupnost všech prvočísel
je vybraná z posloupnosti $\{n\}$ všech čísel přirozených,
ale není vybraná z posloupnosti $\{2n-1\}$ všech čísel lichých.

Základní vlastnosti číselných posloupností

Definice

*Posloupnost se nazývá (**shora, zdola**) **omezená** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina všech jejích členů.*

- Např. posloupnost $\{2n - 1\}$ je zdola omezená, není omezená shora, není omezená.
- Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená shora i zdola, je omezená.
- Stacionární posloupnost $\{c\}$ je omezená.

Základní vlastnosti číselných posloupností

Definice

*Posloupnost se nazývá (**shora, zdola**) **omezená** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina všech jejích členů.*

- Např. posloupnost $\{2n - 1\}$ je zdola omezená, není omezená shora, není omezená.
- Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená shora i zdola, je omezená.
- Stacionární posloupnost $\{c\}$ je omezená.

Definice

Posloupnost a se nazývá

- **rostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,
- **klesající** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,
- **nerostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
- **neklesající** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.

*Společný název pro všechny tyto druhy posloupností: **posloupnosti monotonní** a pro první dva druhy: **posloupnosti ryze monotonní**.*

Limita posloupnosti

Definice

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu** $a \Leftrightarrow$

$$\forall U(a) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a).$$

- Je-li $a \in \mathbb{R}$, nazývá se *a vlastní limita*
- a posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá **konvergentní**,
- pokud $a = \pm\infty$, nazývá se *a nevlastní limita*.
- Neexistuje-li vlastní limita, nazývá se posloupnost $\{a_n\}$ **divergentní**.

Zápisy: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$; $\lim a_n = a$; $a_n \rightarrow a$ pro $n \rightarrow +\infty$.

Limita posloupnosti

- Posloupnost tedy buď konverguje nebo
- diverguje ($+\infty$, $-\infty$ nebo *osciluje*).
- $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ je konvergentní, má limitu 1,
- stacionární posloupnost $\{c\}$ je konvergentní a má limitu c ,
- posloupnost $\left\{ \frac{n}{100} \right\}$ je divergentní, má nevlastní limitu $+\infty$,
- posloupnost $\{q^n\}$ je pro $q \leq -1$ divergentní, nemá limitu (osciluje).

Limita posloupnosti

Definice

Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow V(n))$$

*je pravdivý, pak říkáme, že $V(n)$ platí **pro skoro všechna** n .*

Definice

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $a \Leftrightarrow$ v každém okolí $U(a)$ leží skoro všechny členy této posloupnosti.

Limita posloupnosti

Definice

Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow V(n))$$

*je pravdivý, pak říkáme, že $V(n)$ platí **pro skoro všechna** n .*

Definice

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $a \Leftrightarrow$ v každém okolí $U(a)$ leží skoro všechny členy této posloupnosti.

Posloupnost aritmetická

Aritmetická posloupnost

- je dána svým prvním členem a_1 , konstantní diferencí d a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d.$$

- Posloupnost, u níž rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní.
- n -tý člen:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

- Vidíme, že aritmetická posloupnost má pro $d > 0$ limitu $+\infty$, pro $d < 0$ limitu $-\infty$.

Posloupnost aritmetická

Úloha

V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně $a_1 = 325$ tisíc Kč, $a_2 = 354$ tisíc Kč a $a_3 = 383$ tisíc Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci?

Řešení.

Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tisíc Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tisíc Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tisíc Kč. (Samořejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.)



Posloupnost aritmetická

Úloha

V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně $a_1 = 325$ tisíc Kč, $a_2 = 354$ tisíc Kč a $a_3 = 383$ tisíc Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci?

Řešení.

Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tisíc Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tisíc Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tisíc Kč. (Samozřejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.)



Posloupnost aritmetická

Součet s_n prvních n členů

Vyjádříme s_n dvěma způsoby:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d),$$

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d).$$

Po sečtení máme

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n), \quad \text{takže} \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Posloupnost aritmetická

Úloha

Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour?

Řešení.

Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11 \cdot (-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6 \cdot (26 + 15) = 246$ rour. □

Posloupnost aritmetická

Úloha

Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour?

Řešení.

Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11 \cdot (-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6 \cdot (26 + 15) = 246$ rour. □

Posloupnost geometrická

Geometrická posloupnost

je dána svým 1. členem a_1 , konstantním kvocientem $q \neq 0$ a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Geometrickou posloupnost lze tedy rovněž definovat jako posloupnost, u níž podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

(Dokazuje se jednoduše například matematickou indukcí).

Posloupnost geometrická

Úloha

V prvním měsíci roku činil obrat 300 000 Kč a v každém dalším měsíci byl o 5% větší než v měsíci předchozím. Určete předpokládaný listopadový obrat.

Řešení.

Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 300\,000$, $q = 1,05$, $n = 11$.
Pak

$$a_{11} = 300\,000 \cdot 1,05^{10} \approx 300\,000 \cdot 1,629 = 489\,000 \text{ Kč.}$$



Posloupnost geometrická

Limity GP

Je-li $a_1 > 0$, pak geometrická posloupnost $\{a_1 \cdot q^{n-1}\}$ má limitu:

- 0 (pro $|q| < 1$) nebo
- a_1 (pro $q = 1$) nebo
- $+\infty$ (pro $q > 1$) a nebo
- nemá limitu (pro $q < -1$).

Posloupnost geometrická

Součet prvních n členů GP

- Vyjádříme s_n a $q \cdot s_n$:

$$\begin{aligned}s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}, \\ q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n.\end{aligned}$$

- Po odečtení je $s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$, takže

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{tj. též} \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Posloupnost geometrická

Úloha

Vynálezce šachové hry požadoval podle pověsti odměnu za každé ze 64 polí šachovnice takto: za 1. pole jedno obilní zrna, za 2. pole 2 zrna, za 3. pole 4 zrna, atd., za každé další vždy dvojnásobek. Kolik zrn obilí měl dostat?

Řešení.

Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$. Proto

$$s_{64} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1,845 \cdot 10^{19}$$

a to je více obilí, než se kdy na Zemi urodilo.

