

Číselné posloupnosti

Jiří Fišer

16. října 2007

Pojem posloupnosti

- Každé zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme **číselná posloupnost**.

$$1 \mapsto a_1, \quad 2 \mapsto a_2, \quad 3 \mapsto a_3, \quad \dots$$

- Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$;
- a_n se nazývá **n -tý člen** posloupnosti.

Pojem posloupnosti

- Každé zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme **číselná posloupnost**.

$$1 \mapsto a_1, \quad 2 \mapsto a_2, \quad 3 \mapsto a_3, \quad \dots$$

- Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$;
- a_n se nazývá **n -tý člen** posloupnosti.

Způsoby zadání posloupnosti

- několika prvními členy,
- n -tým členem,
- rekurentně.

Zadání posloupnosti několika prvními členy

Úloha

Je dána posloupnost $\frac{1}{1 \cdot 4}$, $\frac{3}{4 \cdot 7}$, $\frac{5}{7 \cdot 10}$, $\frac{7}{10 \cdot 13}$, $\dots$ Určete její n -tý člen.

Řešení.

$$a_n = \frac{2n-1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$$



Zadání posloupnosti několika prvními členy

Úloha

Je dána posloupnost $\frac{1}{1 \cdot 4}$, $\frac{3}{4 \cdot 7}$, $\frac{5}{7 \cdot 10}$, $\frac{7}{10 \cdot 13}$, $\dots$ Určete její n -tý člen.

Řešení.

$$a_n = \frac{2n-1}{(3n-2) \cdot (3n+1)}$$



Zadání posloupnosti n -tým členem

- $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\},$
- $\{(-1)^n \cdot n\},$
- $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\},$
- $\{a \cdot q^{n-1}\},$
- $\{a + (n-1)d\}.$

Vypočtěte členy a_1, a_2, a_3, a_4 .

Zadání posloupnosti rekurentně

Rekurentní definice

obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d.$$

Rekurentní definice geometrické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (q \notin \{0, 1, -1\}).$$

Zadání posloupnosti rekurentně

Rekurentní definice

obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n + d.$$

Rekurentní definice geometrické posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = a_n \cdot q \quad (q \notin \{0, 1, -1\}).$$

Zadání posloupnosti rekurentně

Úloha

Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána rekurentně takto: $a_1 = 1$,
 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{10}{a_n} \right)$; je to posloupnost aproximací čísla $\sqrt{10}$.
Vypočtěte první čtyři aproximace.

Úloha

Fibonacciho posloupnost $\{b_n\}$ je definována takto: $b_1 = 1$, $b_2 = 1$,
 $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. Vypočtěte prvních 10 členů této posloupnosti.

Zadání posloupnosti rekurentně

Úloha

Posloupnost $\{a_n\}$ je zadána rekurentně takto: $a_1 = 1$,
 $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{10}{a_n} \right)$; je to posloupnost aproximací čísla $\sqrt{10}$.
Vypočtěte první čtyři aproximace.

Úloha

Fibonacciho posloupnost $\{b_n\}$ je definována takto: $b_1 = 1$, $b_2 = 1$,
 $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. Vypočtěte prvních 10 členů této posloupnosti.

Množina (všech) členů posloupnosti

$\{a_n\} \times$ množina (všech) jejích členů

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \times \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\},$$

$$\{(-1)^n\} \times \{-1, 1\}.$$

Vybraná posloupnost

Definice

Posloupnost $\{b_n\}$ se nazývá **vybraná** z posloupnosti $\{a_n\}$ (nebo též **podposloupnost**) $\Leftrightarrow \exists$ posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $b_n = a_{k_n}$.

Např. posloupnost všech prvočísel
je vybraná z posloupnosti $\{n\}$ všech čísel přirozených,
ale není vybraná z posloupnosti $\{2n-1\}$ všech čísel lichých.

Základní vlastnosti číselných posloupností

Definice

*Posloupnost se nazývá (**shora, zdola**) **omezená** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina všech jejích členů.*

- Např. posloupnost $\{2n - 1\}$ je zdola omezená, není omezená shora, není omezená.
- Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená shora i zdola, je omezená.
- Stacionární posloupnost $\{c\}$ je omezená.

Základní vlastnosti číselných posloupností

Definice

*Posloupnost se nazývá (**shora, zdola**) **omezená** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina všech jejích členů.*

- Např. posloupnost $\{2n - 1\}$ je zdola omezená, není omezená shora, není omezená.
- Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená shora i zdola, je omezená.
- Stacionární posloupnost $\{c\}$ je omezená.

Definice

Posloupnost a se nazývá

- **rostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,
- **klesající** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,
- **nerostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,
- **neklesající** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq a_{n+1}$.

*Společný název pro všechny tyto druhy posloupností: **posloupnosti monotonní** a pro první dva druhy: **posloupnosti ryze monotonní**.*

Definice

Operace s posloupnostmi jsou definovány takto:

- **násobení reálným číslem c :** $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$;
- **aritmetické operace** (součet, rozdíl, součin, podíl):
 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$,
 $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n\} / \{b_n\} = \{a_n / b_n\}$, (pro $b_n \neq 0$);
- **opačná posloupnost** $k \{a_n\}$ je $\{-a_n\}$;
- **reciproká posloupnost** $k \{a_n\}$ je $\{1/a_n\}$ (pro $a_n \neq 0$).

Limita posloupnosti

Definice

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ **má limitu** $a \Leftrightarrow$

$$\forall U(a) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a).$$

- Je-li $a \in \mathbb{R}$, nazývá se a **vlastní limita**
- a posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá **konvergentní**,
- pokud $a = \pm\infty$, nazývá se a **nevlastní limita**.
- Neexistuje-li vlastní limita, nazývá se posloupnost $\{a_n\}$ **divergentní**.

Zápisy: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$; $\lim a_n = a$; $a_n \rightarrow a$ pro $n \rightarrow +\infty$.

Limita posloupnosti

- Posloupnost tedy buď konverguje nebo
- diverguje ($+\infty$, $-\infty$ nebo *osciluje*).
- $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ je konvergentní, má limitu 1,
- stacionární posloupnost $\{c\}$ je konvergentní a má limitu c ,
- posloupnost $\left\{ \frac{n}{100} \right\}$ je divergentní, má nevlastní limitu $+\infty$,
- posloupnost $\{q^n\}$ je pro $q \leq -1$ divergentní, nemá limitu (osciluje).

Limita posloupnosti

Definice

Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow V(n))$$

*je pravdivý, pak říkáme, že $V(n)$ platí **pro skoro všechna** n .*

Definice

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $a \Leftrightarrow$ v každém okolí $U(a)$ leží skoro všechny členy této posloupnosti.

Limita posloupnosti

Definice

Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow V(n))$$

*je pravdivý, pak říkáme, že $V(n)$ platí **pro skoro všechna** n .*

Definice

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $a \Leftrightarrow$ v každém okolí $U(a)$ leží skoro všechny členy této posloupnosti.

Věty o limitách

Věta

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz (sporem).

Kdyby existovaly dvě limity a, b , pak by existovala disjunkttní okolí $U(a), U(b)$ tak, že pro skoro všechna n by mělo platit současně $a_n \in U(a), a_n \in U(b)$, což je spor. □

Věty o limitách

Věta

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz (sporem).

Kdyby existovaly dvě limity a, b , pak by existovala disjunktní okolí $U(a), U(b)$ tak, že pro skoro všechna n by mělo platit současně $a_n \in U(a), a_n \in U(b)$, což je spor. □

Věty o limitách

Věta

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu, pak každá posloupnost $\{b_n\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu.

Důkaz.

Označme tuto limitu a ; pak $\forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
 $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též
 $b_m = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m . □

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo
pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Věty o limitách

Věta

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu, pak každá posloupnost $\{b_n\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu.

Důkaz.

Označme tuto limitu a ; pak $\forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
 $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též
 $b_m = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m . □

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo
pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Věty o limitách

Věta

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu, pak každá posloupnost $\{b_n\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu.

Důkaz.

Označme tuto limitu a ; pak $\forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
 $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též
 $b_m = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m . □

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Věty o limitách

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

- 1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a
- 2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.
 - Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.
 - Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věty o limitách

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

- 1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a
- 2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.
 - Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.
 - Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věty o limitách

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

- 1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a
- 2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.
 - Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.
 - Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věty o limitách

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

- 1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a
- 2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.
 - Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.
 - Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věty o limitách

Věta

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz.

- Označme limitu a ; zvolme $\varepsilon = 1$.
- Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ pak platí $a \geq \min \{ \min M, a - 1 \}$, $a \leq \max \{ \max M, a + 1 \}$.



Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní.

Věty o limitách

Věta

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz.

- Označme limitu a ; zvolme $\varepsilon = 1$.
- Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ pak platí $a \geq \min \{ \min M, a - 1 \}$, $a \leq \max \{ \max M, a + 1 \}$.



Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní.

Věty o limitách

Věta

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz.

- Označme limitu a ; zvolme $\varepsilon = 1$.
- Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ pak platí $a \geq \min \{ \min M, a - 1 \}$, $a \leq \max \{ \max M, a + 1 \}$.



Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní.

Věty o limitách

Větší hloubku pohledu do vztahu mezi omezeností a konvergencí dává následující věta.

Věta (Bolzano–Weierstrassova)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Princip důkazu B–W věty

Bolzanova metoda půlení intervalů:

- Je dána posloupnost $\{a_n\}$;
- ježto je omezená, $\exists \langle K_1, L_1 \rangle$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \langle K_1, L_1 \rangle$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, **atd.**
- Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, *atd.*
- Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, *atd.*
- Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, **atd.**
- Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, **atd.**
- Označíme **a** (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, **atd.**
- Označíme **a** (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Věty o limitách

Věta

Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

Princip důkazu.

- Mějme danu posloupnost $\{a_n\}$;
- z omezenosti množiny $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ plyne existence vlastního suprema $a = \sup M$.
- Ze druhé vlastnosti suprema plyne, že v libovolném levém okolí $U(a-)$ leží alespoň jedno a_n ,
- takže vzhledem k monotónnosti $\{a_n\}$ leží v $U(a-)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$.



Věty o limitách

Věta

Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

Princip důkazu.

- Mějme danu posloupnost $\{a_n\}$;
- z omezenosti množiny $M = \{a_1, a_2, \dots\}$ plyne existence vlastního suprema $a = \sup M$.
- Ze druhé vlastnosti suprema plyne, že v libovolném levém okolí $U(a-)$ leží alespoň jedno a_n ,
- takže vzhledem k monotónnosti $\{a_n\}$ leží v $U(a-)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$.



Věty o limitách

Věta (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v $\mathbb{R}^$ smysl:*

- 1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
- 2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- 3) *pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ je* $\lim(a_n/b_n) = a/b$,
- 4) $\lim |a_n| = |a|$.

Důkaz.

Ukázka pro součet, kde a, b jsou vlastní limity:

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$: n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon/2),$
$: n \geq n_2 \Rightarrow b_n \in U(b, \varepsilon/2).$

Nechť $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ a $n \geq n_0$. Pak

$a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2,$
$b - \varepsilon/2 < b_n < b + \varepsilon/2.$

Po sečtení obou nerovností máme $(a_n + b_n) \in U(a + b, \varepsilon)$. □

Věty o limitách

Věta (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v $\mathbb{R}^$ smysl:*

- 1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
- 2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- 3) *pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ je* $\lim(a_n/b_n) = a/b$,
- 4) $\lim |a_n| = |a|$.

Důkaz.

Ukázka pro součet, kde a, b jsou vlastní limity:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \begin{array}{l} : n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon/2), \\ : n \geq n_2 \Rightarrow b_n \in U(b, \varepsilon/2). \end{array}$$

Nechť $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ a $n \geq n_0$. Pak
$$\begin{array}{l} a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2, \\ b - \varepsilon/2 < b_n < b + \varepsilon/2. \end{array}$$

Po sečtení obou nerovností máme $(a_n + b_n) \in U(a + b, \varepsilon)$. □

Věty o limitách

Úloha

Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a $b = +\infty$.

Věta (limita nerovnosti)

*Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro nekonečně mnoho n platí $a_n \leq b_n$.
Pak $a \leq b$.*

Důkaz sporem.

Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a) \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. □

Věty o limitách

Úloha

Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a $b = +\infty$.

Věta (limita nerovnosti)

*Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro nekonečně mnoho n platí $a_n \leq b_n$.
Pak $a \leq b$.*

Důkaz sporem.

Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a) \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. □

Věty o limitách

Úloha

Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a $b = +\infty$.

Věta (limita nerovnosti)

*Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro nekonečně mnoho n platí $a_n \leq b_n$.
Pak $a \leq b$.*

Důkaz sporem.

Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a) \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. □

Věta o třech limitách

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

Věta (věta o třech limitách)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ a necht' pro skoro všechna n je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak $\lim c_n = a$.

Princip důkazu.

Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. $\square$

Věta o třech limitách

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

Věta (věta o třech limitách)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ a necht' pro skoro všechna n je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak $\lim c_n = a$.

Princip důkazu.

Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. $\square$

Věta o třech limitách

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

Věta (věta o třech limitách)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ a necht' pro skoro všechna n je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak $\lim c_n = a$.

Princip důkazu.

Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. $\square$

Věta o třech limitách

Pro nevlastní limity má věta o třech limitách (zvaná též věta o třech posloupnostech) speciální tvar. Je-li totiž $\lim a_n = +\infty$, lze brát za b_n posloupnost $\{+\infty\}$, proto z nerovnosti $a_n \leq c_n$ plyne $\lim c_n = +\infty$. Podobně lze větu o třech limitách upravit pro nevlastní limitu $-\infty$.

Nulové posloupnosti

- Jsou to posloupnosti, kde $\lim a_n = 0$.
- Nulové posloupnosti fakticky nejsou jen zvláštním případem konvergentních posloupností, ale i naopak,
- konvergenci bychom mohli definovat užitím nulových posloupností podle věty:

Věta

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow (a_n - a) \rightarrow 0.$$

Věty o limitách nulových posloupností

Věta

Jestliže $a_n \rightarrow a$, pak $|a_n| \rightarrow |a|$.

Tato věta neplatí pro $a \neq 0$ naopak, ale pro $a = 0$ ano.

Věty o limitách nulových posloupností

Věta

Jestliže $|a_n| \rightarrow +\infty$, je $\frac{1}{a_n}$ posloupnost nulová.

Jestliže jmenovatel zlomku konverguje k nule, je situace složitější:

Věta

*Je-li $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0, a_n \rightarrow 0$, pak $1/a_n \rightarrow +\infty$,
 $a_n < 0, a_n \rightarrow 0$, pak $1/a_n \rightarrow -\infty$,
 $a_n \neq 0, a_n \rightarrow 0$, pak $1/|a_n| \rightarrow \infty$.*

Věty o limitách nulových posloupností

Nulových posloupností se s výhodou využívá při výpočtech limit.

- Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 + n}{4n^2 + 5}$.
- Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 \cdot 2^{2n} + 5 \cdot 2^n - 4}{2^{2n+1} - 2^n + 15}$.
- Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n + 150}{n^2 - 0,25}$.
- Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 8n}{9n^2 + 10}$.

Posloupnosti v praxi

- Uspořádané n -tice používá název *konečné posloupnosti*, který zčásti navozuje použití posloupností v praxi.
- Známe několik prvních členů $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ nějaké posloupnosti.
- Pomocí této znalosti chceme zjistit, zkonstruovat nebo předpovědět její další člen a_{n+1} .
- Může jít o posloupnost peněžních částek, (časovou) posloupnost údajů o objemu výroby, posloupnost časových termínů nebo intervalů ad.
- Problémem je, *jak* určit další člen (nebo alespoň jeho přibližnou hodnotu) ze znalosti předchozích.
- Může jít o nalezení vzorce pro n -tý člen, rekurentního pravidla nebo i o jiný postup.

Posloupnost aritmetická

Aritmetická posloupnost

- je dána svým prvním členem a_1 , konstantní diferencí d a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d.$$

- Posloupnost, u níž rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní.
- n -tý člen:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

- Vidíme, že aritmetická posloupnost má pro $d > 0$ limitu $+\infty$, pro $d < 0$ limitu $-\infty$.

Posloupnost aritmetická

Úloha

V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně $a_1 = 325$ tisíc Kč, $a_2 = 354$ tisíc Kč a $a_3 = 383$ tisíc Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci?

Řešení.

Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tisíc Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tisíc Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tisíc Kč. (Samozřejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.)



Posloupnost aritmetická

Úloha

V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně $a_1 = 325$ tisíc Kč, $a_2 = 354$ tisíc Kč a $a_3 = 383$ tisíc Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci?

Řešení.

Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tisíc Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tisíc Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tisíc Kč. (Samozřejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.)



Posloupnost aritmetická

Součet s_n prvních n členů

Vyjádříme s_n dvěma způsoby:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d),$$

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d).$$

Po sečtení máme

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n), \quad \text{takže} \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Posloupnost aritmetická

Úloha

Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour?

Řešení.

Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11 \cdot (-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6 \cdot (26 + 15) = 246$ rour. □

Posloupnost aritmetická

Úloha

Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour?

Řešení.

Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11 \cdot (-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6 \cdot (26 + 15) = 246$ rour. □

Posloupnost geometrická

Geometrická posloupnost

je dána svým 1. členem a_1 , konstantním kvocientem $q \neq 0$ a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Geometrickou posloupnost lze tedy rovněž definovat jako posloupnost, u níž podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n -tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

(Dokazuje se jednoduše například matematickou indukcí).

Posloupnost geometrická

Úloha

V prvním měsíci roku činil obrat 300 000 Kč a v každém dalším měsíci byl o 5% větší než v měsíci předchozím. Určete předpokládaný listopadový obrat.

Řešení.

Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 300\,000$, $q = 1,05$, $n = 11$.
Pak

$$a_{11} = 300\,000 \cdot 1,05^{10} \approx 300\,000 \cdot 1,629 = 489\,000 \text{ Kč.}$$



Posloupnost geometrická

Limity GP

Je-li $a_1 > 0$, pak geometrická posloupnost $\{a_1 \cdot q^{n-1}\}$ má limitu:

- 0 (pro $|q| < 1$) nebo
- a_1 (pro $q = 1$) nebo
- $+\infty$ (pro $q > 1$) a nebo
- nemá limitu (pro $q < -1$).

Posloupnost geometrická

Součet prvních n členů GP

- Vyjádříme s_n a $q \cdot s_n$:

$$\begin{aligned}s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}, \\ q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n.\end{aligned}$$

- Po odečtení je $s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$, takže

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{tj. též} \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Posloupnost geometrická

Úloha

Vynálezce šachové hry požadoval podle pověsti odměnu za každé ze 64 polí šachovnice takto: za 1. pole jedno obilní zrna, za 2. pole 2 zrna, za 3. pole 4 zrna, atd., za každé další vždy dvojnásobek. Kolik zrn obilí měl dostat?

Řešení.

Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$. Proto

$$s_{64} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1,845 \cdot 10^{19}$$

a to je více obilí, než se kdy na Zemi urodilo.

