

Matematická analýza 1

Jiří Fišer

8. října 2009

Věty o limitách

Věta

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz (sporem).

Kdyby existovaly dvě limity a, b , pak by existovala disjunkttní okolí $U(a), U(b)$ tak, že pro skoro všechna n by mělo platit současně $a_n \in U(a), a_n \in U(b)$, což je spor. □

Věty o limitách

Věta

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz (sporem).

Kdyby existovaly dvě limity a, b , pak by existovala disjunkttní okolí $U(a), U(b)$ tak, že pro skoro všechna n by mělo platit současně $a_n \in U(a), a_n \in U(b)$, což je spor. □

Věty o limitách

Věta

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu, pak každá posloupnost $\{b_n\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu.

Důkaz.

Označme tuto limitu a ; pak $\forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
 $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též
 $b_m = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m . □

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo
pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Věty o limitách

Věta

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu, pak každá posloupnost $\{b_n\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu.

Důkaz.

Označme tuto limitu a ; pak $\forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
 $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též
 $b_m = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m . □

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo
pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Věty o limitách

Věta

Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu, pak každá posloupnost $\{b_n\}$ vybraná z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu.

Důkaz.

Označme tuto limitu a ; pak $\forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že
 $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též
 $b_m = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m . □

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Věty o limitách

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

- 1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a
- 2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.
 - Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.
 - Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věty o limitách

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

- 1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a
- 2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.
 - Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.
 - Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věty o limitách

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

- 1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a
- 2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.
 - Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.
 - Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věty o limitách

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

- 1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a
- 2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.
 - Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.
 - Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věty o limitách

Věta

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz.

- Označme limitu a ; zvolme $\varepsilon = 1$.
- Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ pak platí $a \geq \min \{ \min M, a - 1 \}$, $a \leq \max \{ \max M, a + 1 \}$.



Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní.

Věty o limitách

Věta

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz.

- Označme limitu a ; zvolme $\varepsilon = 1$.
- Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ pak platí $a \geq \min \{ \min M, a - 1 \}$, $a \leq \max \{ \max M, a + 1 \}$.



Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní.

Věty o limitách

Věta

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz.

- Označme limitu a ; zvolme $\varepsilon = 1$.
- Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná.
- $\forall n \in \mathbb{N}$ pak platí $a \geq \min \{ \min M, a - 1 \}$, $a \leq \max \{ \max M, a + 1 \}$.



Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní.

Věty o limitách

Větší hloubku pohledu do vztahu mezi omezeností a konverencí dává následující věta.

Věta (Bolzano–Weierstrassova)

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Princip důkazu B–W věty

Bolzanova metoda půlení intervalů:

- Je dána posloupnost $\{a_n\}$;
- ježto je omezená, $\exists \langle K_1, L_1 \rangle$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \langle K_1, L_1 \rangle$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, **atd.**
- Označíme **a** (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, *atd.*
- Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, *atd.*
- Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, **atd.**
- Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, **atd.**
- Označíme **a** (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Princip důkazu B–W věty

Konstrukce vybrané posloupnosti:

- Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, necht' v ní má index k_1 .
- Interval $\langle K_1, L_1 \rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2 \rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.
- V $\langle K_2, L_2 \rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.
- Interval $\langle K_2, L_2 \rangle$ rozpůlíme, **atd.**
- Označíme **a** (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n \rangle$ (podle věty o vložených intervalech).
- Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n \rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \rightarrow a$.

Věty o limitách

Věta

Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

Princip důkazu.

- Mějme danu posloupnost $\{a_n\}$;
- z omezenosti množiny $M = \{a_1, a_1, \dots\}$ plyne existence vlastního suprema $a = \sup M$.
- Ze druhé vlastnosti suprema plyne, že v libovolném levém okolí $U(a-)$ leží alespoň jedno a_n ,
- takže vzhledem k monotónnosti $\{a_n\}$ leží v $U(a-)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$.



Věty o limitách

Věta

Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

Princip důkazu.

- Mějme danu posloupnost $\{a_n\}$;
- z omezenosti množiny $M = \{a_1, a_1, \dots\}$ plyne existence vlastního suprema $a = \sup M$.
- Ze druhé vlastnosti suprema plyne, že v libovolném levém okolí $U(a-)$ leží alespoň jedno a_n ,
- takže vzhledem k monotónnosti $\{a_n\}$ leží v $U(a-)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$.



Aritmetické operace s posloupnostmi

Definice

Operace s posloupnostmi jsou definovány takto:

- **násobení reálným číslem c :** $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$;
- **aritmetické operace** (součet, rozdíl, součin, podíl):
 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$,
 $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n\} / \{b_n\} = \{a_n / b_n\}$, (pro $b_n \neq 0$);
- **opačná posloupnost** k $\{a_n\}$ je $\{-a_n\}$;
- **reciproká posloupnost** k $\{a_n\}$ je $\{1/a_n\}$ (pro $a_n \neq 0$).

Věty o limitách

Věta (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v $\mathbb{R}^$ smysl:*

- 1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
- 2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- 3) *pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ je* $\lim(a_n/b_n) = a/b$,
- 4) $\lim |a_n| = |a|$.

Důkaz.

Ukázka pro součet, kde a, b jsou vlastní limity:

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$: n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon/2),$
$: n \geq n_2 \Rightarrow b_n \in U(b, \varepsilon/2).$

Nechť $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ a $n \geq n_0$. Pak

$a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2,$
$b - \varepsilon/2 < b_n < b + \varepsilon/2.$

Po sečtení obou nerovností máme $(a_n + b_n) \in U(a + b, \varepsilon)$. □

Věty o limitách

Věta (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v $\mathbb{R}^$ smysl:*

- 1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,
- 2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- 3) *pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ je* $\lim(a_n/b_n) = a/b$,
- 4) $\lim |a_n| = |a|$.

Důkaz.

Ukázka pro součet, kde a, b jsou vlastní limity:

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$: n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon/2),$
$: n \geq n_2 \Rightarrow b_n \in U(b, \varepsilon/2).$

Nechť $n_0 = \max \{n_1, n_2\}$ a $n \geq n_0$. Pak

$a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2,$
$b - \varepsilon/2 < b_n < b + \varepsilon/2.$

Po sečtení obou nerovností máme $(a_n + b_n) \in U(a + b, \varepsilon)$. □

Věty o limitách

Úloha

Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a $b = +\infty$.

Věta (limita nerovnosti)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro nekonečně mnoho n platí $a_n \leq b_n$. Pak $a \leq b$.

Důkaz sporem.

Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a) \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. □

Věty o limitách

Úloha

Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a $b = +\infty$.

Věta (limita nerovnosti)

*Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro nekonečně mnoho n platí $a_n \leq b_n$.
Pak $a \leq b$.*

Důkaz sporem.

Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a) \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. □

Věty o limitách

Úloha

Dokažte větu pro součet, kde a je vlastní limita a $b = +\infty$.

Věta (limita nerovnosti)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ a pro nekonečně mnoho n platí $a_n \leq b_n$. Pak $a \leq b$.

Důkaz sporem.

Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a) \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. □

Věta o třech limitách

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

Věta (věta o třech limitách)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ a necht' pro skoro všechna n je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak $\lim c_n = a$.

Princip důkazu.

Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. $\square$

Věta o třech limitách

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

Věta (věta o třech limitách)

Nechť $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ a necht' pro skoro všechna n je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak $\lim c_n = a$.

Princip důkazu.

Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. $\square$

Věta o třech limitách

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

Věta (věta o třech limitách)

Necht' $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ a necht' pro skoro všechna n je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Pak $\lim c_n = a$.

Princip důkazu.

Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. $\square$

Věta o třech limitách

Pro nevlastní limity má věta o třech limitách (zvaná též věta o třech posloupnostech) speciální tvar. Je-li totiž $\lim a_n = +\infty$, lze brát za b_n posloupnost $\{+\infty\}$, proto z nerovnosti $a_n \leq c_n$ plyne $\lim c_n = +\infty$. Podobně lze větu o třech limitách upravit pro nevlastní limitu $-\infty$.

Nulové posloupnosti

- Jsou to posloupnosti, kde $\lim a_n = 0$.
- Nulové posloupnosti fakticky nejsou jen zvláštním případem konvergentních posloupností, ale i naopak,
- konvergenci bychom mohli definovat užitím nulových posloupností podle věty:

Věta

$$a_n \rightarrow a \Leftrightarrow (a_n - a) \rightarrow 0.$$

Věty o limitách nulových posloupností

Věta

Jestliže $a_n \rightarrow a$, pak $|a_n| \rightarrow |a|$.

Tato věta neplatí pro $a \neq 0$ naopak, ale pro $a = 0$ ano.

Věty o limitách nulových posloupností

Věta

Jestliže $|a_n| \rightarrow +\infty$, je $\frac{1}{a_n}$ posloupnost nulová.

Jestliže jmenovatel zlomku konverguje k nule, je situace složitější:

Věta

Je-li $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > 0, a_n \rightarrow 0$, pak $1/a_n \rightarrow +\infty$,
 $a_n < 0, a_n \rightarrow 0$, pak $1/a_n \rightarrow -\infty$,
 $a_n \neq 0, a_n \rightarrow 0$, pak $1/|a_n| \rightarrow \infty$.

Věty o limitách nulových posloupností

Nulových posloupností se s výhodou využívá při výpočtech limit.

- Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6n^2 + n}{4n^2 + 5}$.
- Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6 \cdot 2^{2n} + 5 \cdot 2^n - 4}{2^{2n+1} - 2^n + 15}$.
- Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n + 150}{n^2 - 0,25}$.
- Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 8n}{9n^2 + 10}$.

Posloupnosti v praxi

- Uspořádané n -tice používá název *konečné posloupnosti*, který zčásti navozuje použití posloupností v praxi.
- Známe několik prvních členů $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ nějaké posloupnosti.
- Pomocí této znalosti chceme zjistit, zkonstruovat nebo předpovědět její další člen a_{n+1} .
- Může jít o posloupnost peněžních částek, (časovou) posloupnost údajů o objemu výroby, posloupnost časových termínů nebo intervalů ad.
- Problémem je, *jak* určit další člen (nebo alespoň jeho přibližnou hodnotu) ze znalosti předchozích.
- Může jít o nalezení vzorce pro n -tý člen, rekurentního pravidla nebo i o jiný postup.

Některé významné limity

Věta

$$\forall a > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Princip důkazu.

- Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, zřejmě $u_n > 0$.
Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud
 $0 < u_n < \frac{a - 1}{n}$, podle V3L je $u_n \rightarrow 0$.
- Pro $a < 1$ použijeme předchozí pro $\frac{1}{a}$,
pro $a = 1$ je výsledek zřejmý.



Věta (Bernoulliova nerovnost)

$$\forall h \in \mathbb{R}, h > -1, h \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ platí } V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh.$$

Některé významné limity

Věta

$$\forall a > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Princip důkazu.

- Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, zřejmě $u_n > 0$.
Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud
 $0 < u_n < \frac{a - 1}{n}$, podle V3L je $u_n \rightarrow 0$.
- Pro $a < 1$ použijeme předchozí pro $\frac{1}{a}$,
pro $a = 1$ je výsledek zřejmý.



Věta (Bernoulliova nerovnost)

$$\forall h \in \mathbb{R}, h > -1, h \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ platí } V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh.$$

Některé významné limity

Věta

$$\forall a > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Princip důkazu.

- Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, zřejmě $u_n > 0$.
Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud
 $0 < u_n < \frac{a - 1}{n}$, podle V3L je $u_n \rightarrow 0$.
- Pro $a < 1$ použijeme předchozí pro $\frac{1}{a}$,
pro $a = 1$ je výsledek zřejmý.



Věta (Bernoulliova nerovnost)

$$\forall h \in \mathbb{R}, h > -1, h \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ platí } V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh.$$

Některé významné limity

Věta

$$\forall a > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Princip důkazu.

- Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, zřejmě $u_n > 0$.
Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud
 $0 < u_n < \frac{a - 1}{n}$, podle V3L je $u_n \rightarrow 0$.
- Pro $a < 1$ použijeme předchozí pro $\frac{1}{a}$,
pro $a = 1$ je výsledek zřejmý.



Věta (Bernoulliova nerovnost)

$$\forall h \in \mathbb{R}, h > -1, h \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ platí } V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh.$$

Některé významné limity

Podobně lze užitím vhodných odhadů odvodit následující dvě limity:

Věta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Věta

$$\forall a > 1, \forall k > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty.$$

(Říkáme, že exponenciála a^n roste k $+\infty$ *rychleji* než mocnina n^k .)

Úloha

Dokažte, že $\forall a > 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

Řešení.

- Pro $\forall \varepsilon > 0$ je $a^\varepsilon > 1$, takže
- pro skoro všechna n platí $1 < \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$.
- zlogaritmováním nerovnosti při základu a dostaneme:

$$\log_a 1 < \log_a \sqrt[n]{n} < \log_a a^\varepsilon, \quad \log_a 1 < \log_a n^{\frac{1}{n}} < \log_a a^\varepsilon,$$

$$0 < \frac{1}{n} \log_a n < \varepsilon \log_a a, \quad 0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$



Úloha

Vypočtete $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!}$, kde $q > 0$.

Říkáme, že faktoriál roste k $+\infty$ rychleji než exponenciála q^n .

Řešení.

- Pro $q \leq 1$ je tato limita rovna 0.
- Pro $q > 1$ jde o typ $\left[\frac{+\infty}{+\infty} \right]$ (nelze použít větu o limitě podílu).
- Označme $a_n = \frac{q^n}{n!}$; pak $a_{n+1} = \frac{q}{n+1} a_n$,
- pro skoro všechna n je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a zdola omezená (nulou), takže má limitu; označme ji a .
- Přejdeme-li v rovnosti k limitě, máme $a = 0$.



Úloha

Ukažte, že každé iracionální číslo je limitou neklesající posloupnosti racionálních čísel; najděte tyto posloupnosti pro $r = \pi$, $s = \sqrt{2}$.

Řešení.

Lze uvažovat například posloupnost dolních desetinných aproximací.



Další typy posloupností v MA

- Posloupnosti množin (např. intervalů),
- posloupnosti funkcí, ad.
- Definice těchto posloupností vytvoříme podle stejného schématu.
- Například posloupnost funkcí definujeme jako zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny všech funkcí.
- Pracujeme-li s jinými posloupnostmi než s posloupnostmi číselnými, je třeba dbát na korektnost definice posloupnosti, případně její limity.

Eulerovo číslo e

Funkce $y = e^x$ a funkce $y = \ln x (= \log_e x)$ patří k nejdůležitějším funkcím v matematické analýze; v obou případech je základem Eulerovo číslo e.

$$e := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Abychom tuto definici mohli považovat za korektní, je třeba dokázat, že uvedená posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní:

- 1 dokážeme, že tato posloupnost je rostoucí,
- 2 dokážeme, že je shora omezená.

Existence konečné limity pak plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti.

$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ je rostoucí

Podle binomické věty je

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}$$

První dva členy součtu na pravé straně jsou rovny 1, pro každý další člen provedeme úpravu

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Pro posloupnost $\{a_n\}$ tak platí, že každý její člen a_n je součtem $n+1$ kladných výrazů, v nichž jsou činitelé tvaru $\left(1 - \frac{j}{n}\right)$.

$n + 1$ výrazů s činiteli tvaru $\left(1 - \frac{j}{n}\right)$

$$a_n = \overbrace{1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \cdots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n}}$$

$$a_{n+1} = \underbrace{1 + \binom{n+1}{1} \frac{1}{n+1} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}}$$

$n + 2$ výrazů s činiteli tvaru $\left(1 - \frac{j}{n+1}\right)$

Jelikož $\left(1 - \frac{j}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{j}{n}\right)$ a navíc v a_{n+1} je o jeden kladný sčítanec víc, je

$$a_{n+1} > a_n$$

a posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ je shora omezená

Ve výrazu pro a_n nahradíme všechny „závorky“ $\left(1 - \frac{j}{n+1}\right)$ číslem 1

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} < \frac{1}{k!},$$

takže platí

$$a_n < b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Závěr: Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existuje limita posloupnosti $\{a_n\}$; nazýváme ji **Eulerovo číslo** a označujeme ji **e**; z předchozího plyne, že **2 < e < 3**.

Výpočet čísla e

Hodnotu čísla e lze vcelku snadno určit jako součet číselné řady. Vidíme, že pro konstantní $k < n$ platí

$$a_n > 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!}.$$

Odsud pro $n \rightarrow +\infty$ máme $e \geq b_k$, takže platí $a_n < b_n \leq e$; podle věty o třech limitách pak je $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = e$. Přitom b_n je podle své definice tzv. n -tým částečným součtem řady, takže

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = 2,718\,281\,828\,459\,0 \dots$$

Tato řada „dosti rychle“ konverguje a má jednoduchý algoritmus výpočtu členů, takže výpočet hodnoty čísla e na zadaný počet desetinných míst lze provést vcelku rychle.