Přednáška č. 4

Číselné posloupnosti — závěr
Funkce — úvod

Jiří Fišer

16. října 2007

Některé významné limity

Věta

$$\forall a > 0 : \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Princip důkazu.

- Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, zřejmě $u_n > 0$.
  Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud
  $0 < u_n < \frac{a-1}{n}$, podle V3L je $u_n \to 0$.
- Pro $a < 1$ použijeme předchozí pro $\frac{1}{a}$,
  pro $a = 1$ je výsledek zřejmý.

□

Věta (Bernoulliova nerovnost)

$\forall h \in \mathbb{R}$, $h > -1$, $h \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ *platí* $V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh$.

Některé významné limity

Věta

$\forall a > 0 : \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

Princip důkazu.

- Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, zřejmě $u_n > 0$.
  Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud
  $0 < u_n < \frac{a-1}{n}$, podle V3L je $u_n \to 0$.
- Pro $a < 1$ použijeme předchozí pro $\frac{1}{a}$,
  pro $a = 1$ je výsledek zřejmý.

□

Věta (Bernoulliova nerovnost)

$\forall h \in \mathbb{R}\ , h > -1, h \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *platí* $V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh.$

Některé významné limity

Věta

$\forall a > 0 : \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

Princip důkazu.

- Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, zřejmě $u_n > 0$.
  Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud
  $0 < u_n < \dfrac{a-1}{n}$, podle V3L je $u_n \to 0$.
- Pro $a < 1$ použijeme předchozí pro $\dfrac{1}{a}$,
  pro $a = 1$ je výsledek zřejmý.

□

Věta (Bernoulliova nerovnost)

$\forall h \in \mathbb{R}\ , h > -1, h \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *platí* $V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh.$

Některé významné limity

Věta

$\forall a > 0 : \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

Princip důkazu.

- Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, zřejmě $u_n > 0$.
  Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud
  $0 < u_n < \dfrac{a-1}{n}$, podle V3L je $u_n \to 0$.
- Pro $a < 1$ použijeme předchozí pro $\dfrac{1}{a}$,
  pro $a = 1$ je výsledek zřejmý.

□

Věta (Bernoulliova nerovnost)

$\forall h \in \mathbb{R}\ , h > -1, h \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *platí* $V(n) : (1 + h)^n > 1 + nh.$

Některé významné limity

Podobně lze užitím vhodných odhadů odvodit následující dvě limity:

Věta

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Věta

$$\forall a > 1, \forall k > 0 : \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty.$$

(Říkáme, že exponenciála a^n roste k $+\infty$ *rychleji* než mocnina n^k.)

Úloha

Dokažte, že $\forall a > 1 : \lim_{n \to +\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$

Řešení.

- Pro $\forall \varepsilon > 0$ je $a^\varepsilon > 1$, takže
- pro skoro všechna n platí $1 < \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$.
- zlogaritmováním nerovnosti při základu a dostaneme:

$$\log_a 1 < \log_a \sqrt[n]{n} < \log_a a^\varepsilon, \qquad \log_a 1 < \log_a n^{\frac{1}{n}} < \log_a a^\varepsilon,$$

$$0 < \frac{1}{n} \log_a n < \varepsilon \log_a a, \qquad 0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon,$$

□

Úloha

Vypočtěte $\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!}$, *kde* $q > 0$.

Říkáme, že faktoriál roste k $+\infty$ *rychleji než exponenciála* q^n.

Řešení.

- Pro $q \leq 1$ je tato limita rovna 0.
- Pro $q > 1$ jde o typ $\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$ (nelze použít větu o limitě podílu).
- Označme $a_n = \frac{q^n}{n!}$; pak $a_{n+1} = \frac{q}{n+1} a_n$,
- pro skoro všechna n je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a zdola omezená (nulou), takže má limitu; označme ji a.
- Přejdeme-li v rovnosti k limitě, máme $a = 0$.

Úloha

Ukažte, že každé iracionální číslo je limitou neklesající posloupnosti racionálních čísel; najděte tyto posloupnosti pro $r = \pi$, $s = \sqrt{2}$.

Řešení.

Lze uvažovat například posloupnost dolních desetinných aproximací. □

Další typy posloupností v MA

- Posloupnosti množin (např. intervalů),
- posloupnosti funkcí, ad.
- Definice těchto posloupností vytvoříme podle stejného schématu.
- Například posloupnost funkcí definujeme jako zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny všech funkcí.
- Pracujeme-li s jinými posloupnostmi než s posloupnostmi číselnými, je třeba dbát na korektnost definice posloupnosti, případně její limity.

Eulerovo číslo e

Funkce $y = \mathrm{e}^x$ *a funkce* $y = \ln x$ $(= \log_{\mathrm{e}} x)$ *patří k nejdůležitějším funkcím v matematické analýze; v obou případech je základem Eulerovo číslo* e*.*

$$\mathrm{e} := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Abychom tuto definici mohli považovat za korektní, je třeba dokázat, že uvedená posloupnost $\{a_n\}$ je konvergentní:

1. dokážeme, že tato posloupnost je rostoucí,
2. dokážeme, že je shora omezená.

Existence konečné limity pak plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti.

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je rostoucí

Podle binomické věty je

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

První dva členy součtu na pravé straně jsou rovny 1, pro každý další člen provedeme úpravu

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Pro posloupnost $\{a_n\}$ tak platí, že každý její člen a_n je součtem $n+1$ kladných výrazů, v nichž jsou činitelé tvaru $\left(1-\frac{j}{n}\right)$.

$$a_n = \overbrace{1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}}^{n+1 \text{ výrazů s činiteli tvaru } \left(1 - \frac{j}{n}\right)}$$

$$a_{n+1} = \underbrace{1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \cdots + \binom{n+1}{n+1}\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}_{n+2 \text{ výrazů s činiteli tvaru } \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)}$$

Jelikož $\left(1 - \frac{j}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{j}{n}\right)$ a navíc v a_{n+1} je o jeden kladný sčítanec víc, je

$$a_{n+1} > a_n$$

a posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ je shora omezená

Ve výrazu pro a_n nahradíme všechny „závorky“ $\left(1-\frac{j}{n+1}\right)$ číslem 1

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}<\frac{1}{k!},$$

takže platí

$$a_n<b_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<3.$$

Závěr: Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existuje limita posloupnosti $\{a_n\}$; nazýváme ji Eulerovo číslo a označujeme ji e; z předchozího plyne, že $2<\mathrm{e}<3$.

Výpočet čísla e

Hodnotu čísla e lze vcelku snadno určit jako součet číselné řady. Vidíme, že pro konstantní $k < n$ platí

$$a_n > 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Odsud pro $n \to +\infty$ máme $\mathrm{e} \geq b_k$, takže platí $a_n < b_n \leq \mathrm{e}$; podle věty o třech limitách pak je $\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathrm{e}$. Přitom b_n je podle své definice tzv. n-tým částečným součtem řady, takže

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = 2,718\,281\,828\,459\,0\ldots$$

Tato řada „dosti rychle“ konverguje a má jednoduchý algoritmus výpočtu členů, takže výpočet hodnoty čísla e na zadaný počet desetinných míst lze provést vcelku rychle.

Pojem funkce

Definice funkce

Definice

Každé zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (tj. zobrazení v $\mathbb{R}$) nazýváme ***reálná funkce*** *jedné reálné proměnné. Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $y = f(x)$; x se nazývá* ***nezávisle proměnná***, *y* ***závisle proměnná***; *říkáme též, že y je funkcí x.*

- Chceme-li vyjádřit, že y je (zatím nepojmenovanou) funkcí x, zapíšeme $y = y(x)$.
- Vedle vyjádření „funkce f“ se tolerují též zápisy
  „funkce $f(x)$“ (chceme-li zdůraznit označení nezávisle proměnné)
  nebo
  „funkce $y = f(x)$“ (chceme-li zdůraznit označení obou proměnných).

Důležité obory funkce

definiční obor *funkce*:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \exists (x, y) \in f\},$$

funkční obor (***obor hodnot***):

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists (x, y) \in f\}.$$

Hodnoty funkce

- Hodnotu proměnné vyjadřujeme číslem nebo symbolem proměnné s indexem.
  Například v bodě $x_0 = 2$ má funkce $y = 3x$ hodnotu $y_0 = 6$.
- Je-li $M \subset D(f)$, je $f(M)$ označení pro $\{f(x); x \in M\}$.
  Je tedy $H(f) = f(D(f))$.
- Naopak, je-li $B \subset H(f)$, pak definujeme $f^{-1}(B)$ jako množinu $\{x \in D(f); f(x) \in B\}$.

Graf funkce

- Grafem funkce f v kartézských souřadnicích rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, pro jejichž souřadnice x, y platí $(x, y) \in f$.
- Grafické znázornění funkce často svou názorností pomáhá k pochopení vlastností a průběhu funkce;
- pro některé funkce však graf nedovedeme sestrojit, například pro Dirichletovu funkci, která má hodnotu 1 pro racionální a 0 pro iracionální čísla;
- Grafy funkcí lze uvažovat také v polární souřadnicové soustavě, kdy ovšem dostáváme jiné křivky.
- Neřekneme-li jinak, uvažujeme vždy graf v kartézských souřadnicích.

Způsoby definice funkce:

Funkci f lze vyjádřit takto:

$$f = \{(x, y) \in D(f) \times \mathbb{R}; V(x, y)\}.$$

Zadat (definovat) funkci f tedy znamená udat její definiční obor $D(f)$ a jisté pravidlo $V(x, y)$, jehož oborem pravdivosti je f a které stanovuje, jak k zadanému $x \in D(f)$ najít (vypočítat) hodnotu $f(x)$. Podle toho, jak je toto pravidlo formulováno, rozlišujeme tato zadání funkce: (explicitní) rovnicí, tabulkou, grafem, po částech, implicitní rovnicí, parametricky nebo i jinak.

Definice funkce (explicitní) rovnicí:

$$f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2 - 1 \right\},$$

nebo jednoduše $f : y = x^2 - 1$.

- Není-li řečeno jinak, bereme za $D(f)$ nejširší množinu, pro niž má rovnice smysl.
- Je-li předepsán jiný definiční obor, musíme jej uvést, například

$$f : y = x - 1, x \in \mathbb{N}.$$

Definice funkce tabulkou:

x	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3	8

Také zadání funkce *výčtem prvků* lze považovat za zadání tabulkou, jde jen o jinou formu zápisu; například

$$f = \{(-2;3), (-1;0), (0;-1), (1;0), (2;3), (3;8)\}.$$

Definice funkce grafem:

- Zpravidla kartézským.
- Další druhy grafů — šachovnicový, uzlový nebo graf v polární soustavě souřadnic — bývají méně časté.
- Grafem bývají často vyjadřovány ty funkce, jejichž průběh je zapisován v přístrojích graficky na papírová média nebo na displeji.

Definice funkce po částech:

Tak je definována například Dirichletova funkce $\chi(x)$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{Q}' \end{cases},$$

nebo

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad x < 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0, \\ 1 & \text{pro} \quad x > 0. \end{cases}.$$

Rovnice $y = \chi(x)$ a $y = \operatorname{sgn} x$ však již považujeme za rovnice funkcí.

Definice funkce Implicitní rovnicí:

$$x^2 + y^2 = 25;$$

- Takto se definují implicitní funkce $y = y(x)$, s nimiž je technika práce někdy poněkud odlišná.
- Zejména bývá vymezena množina $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pro niž má platit $(x, y) \in M$.
- Například u výše uvedené rovnice může být zadáno, že M je polorovina $y \geq 0$.

Definice funkce parametricky:

- Parametrické vyjádření je tvaru

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in J,$$

kde φ, ψ jsou funkce definované na množině (intervalu) J, přičemž funkce $y = f(x)$ je definována vztahem

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \exists t \in J \quad \text{tak, že} \quad x = \varphi(t) \wedge y = \psi(t)\}.$$

- Například $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.
- Parametrického vyjádření používáme ponejvíce při vyšetřování různých (například technických) křivek.

Definice funkce jinak:

- Někdy je pro výrokovou formu $V(x, y)$ dána jen slovní formulace.
- $V(x, y) =$„y je největší celé číslo, které není větší než x“ definuje funkci $[\,.\,]$ „celá část“
- Například $[3, 8] = 3$, $[-1] = -1$, $[-6, 7] = -7$.

Definice funkce — závěr:

- Výroková forma $V(x, y)$ je tedy jisté „pravidlo“ („předpis“), které ke každému číslu x z jisté množiny $D \subset \mathbb{R}$ přiřazuje právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$.
- Pojem funkce se někdy (z důvodů didaktických) ztotožňuje přímo s tímto pravidlem, podle nějž rozhodujeme, zda $(x, y) \in f$, nebo s jehož pomocí k danému x počítáme příslušnou funkční hodnotu $f(x)$.
- I při našem pojetí funkce však toto pravidlo chápeme jako atribut a druhou stránku pojmu funkce.
- Pro toto pravidlo $V(x, y)$ tak proto lze používat stejné označení f jako pro funkci a zkráceně říkat a psát například „funkce $f : y = x^2 - 1$“ nebo prostě „funkce $y = x^2 - 1$“.

Řešení rovnic a nerovnic

Při vyšetřování vlastností (průběhu) funkcí se setkáváme s několika typickými úlohami, jež vedou na řešení rovnic a nerovnic resp. jejich soustav. Některé dále uvádíme.

Stanovení definičního oboru

- Je-li funkce f určena rovnicí a její definiční obor není zadán, je třeba zjistit $D(f)$ jako množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž je daná rovnice definována.
- Úlohy na definiční obor zpravidla vedou na řešení nerovnic nebo soustav nerovnic.

Úloha

Určete definiční obor funkce $y = \dfrac{\ln\left(4 - x^2\right)}{1 - x}$.

Řešení.

Čitatel je definován pro $4 - x^2 > 0$, tj. na množině $M_1 = (-2, 2)$, jmenovatel je definován pro $1 - x \neq 0$, tj. na množině $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pravá strana rovnice funkce je tedy definována na množině $D(f) = M_1 \cap M_2 = (-2, 1) \cup (1, 2)$. □

Zjištění nulových bodů funkce

- Tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce:
- při hledání průsečíků grafu funkce s osou x zjišťujeme nulové body funkce f,
- dále též při výpočtu extrémů funkcí zjišťujeme nulové body 1. derivace, tj. stacionární body,
- při zkoumání inflexe zjišťujeme zpravidla nulové body 2. derivace funkce.

Zjištění nulových bodů funkce

Úloha

Určete nulové body funkce $y = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x$.

Řešení.

Máme $y = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$. Hledáme body, v nichž $y = 0$, tj. řešíme goniometrickou rovnici $\cos x - \sin x = 0$, jež je ekvivalentní s rovnicí $\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x = 0$ (neboť $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$) a tedy i s rovnicí $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0$. Nulové body dané funkce jsou tedy $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$. □

Zjištění intervalů, kde je funkce kladná (záporná)

- Také tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce
- (při zjišťování intervalů monotónnosti řešíme nerovnice typu $y' > 0$,
- při zjišťování intervalů konvexnosti a konkávnosti řešíme nerovnice typu $y'' > 0$).

Úloha

Určete intervaly, kde je funkce $y = (6x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$ *kladná a kde je záporná.*

Řešení.

Rovnici upravíme na tvar $y = (6 - x)x\,\mathrm{e}^{-x}$. Pro $x > 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. na intervalu $(0, 6)$ je daná funkce kladná, pro $x > 0 \wedge 6 - x < 0$, tj. na intervalu $(6, +\infty)$ je funkce záporná, pro $x < 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. též na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce záporná. □

Zjištění průsečíků grafů dvou funkcí

Úloha

Jsou dány funkce $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$. Stanovte průsečíky grafů těchto funkcí.

Řešení.

Řešíme rovnici

$$x^2 - 1 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, x_2 = 2,$$

takže průsečíky jsou body $A[-1;0]$ a $B[2;3]$. □

Porovnání hodnot dvou funkcí

Úloha

Jsou dány funkce $f_1 : y = x^2$, $f_2 : y = 4 - 2x - x^2$. Porovnejte hodnoty těchto funkcí.

Řešení.

$$f_1(x) < f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 4 - 2x - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 < 0,$$

tedy na intervalu (-2, 1); podobně $f_1(x) > f_2(x)$ na množině $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ a obě funkce mají stejné funkční hodnoty v bodech -2 a 1. □