

Matematická analýza 1

Jiří Fišer

16. října 2009

Pojem funkce

Definice funkce

Každé zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) nazýváme

- **reálná funkce** jedné reálné proměnné.

Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $y = f(x)$;

- x se nazývá **nezávisle proměnná**,
- y **závisle proměnná**;
- říkáme též, že y je *funkcí* x .

Definice funkce

- Chceme-li vyjádřit, že y je (zatím nepojmenovanou) funkcí x , zapíšeme

- ▶ $y = y(x)$.

- Vedle vyjádření

- ▶ „funkce f “

se tolerují též zápisy

- ▶ „funkce $f(x)$ “

(chceme-li zdůraznit označení nezávisle proměnné) nebo

- ▶ „funkce $y = f(x)$ “

(chceme-li zdůraznit označení obou proměnných).

Důležité obory funkce

- **Definiční obor funkce:**

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \exists (x, y) \in f\},$$

- **Funkční obor (obor hodnot):**

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists (x, y) \in f\}.$$

Hodnoty funkce

- Hodnotu proměnné vyjadřujeme číslem nebo symbolem proměnné s indexem, například:

v bodě $x_0 = 2$ má funkce $y = 3x$ hodnotu $y_0 = 6$.

- Pro $M \subset D(f)$ definujeme

$f(M)$ označení pro $\{f(x); x \in M\}$ (Je tedy $H(f) = f(D(f))$).

- Pro $B \subset H(f)$ definujeme

$$f^{-1}(B) := \{x \in D(f); f(x) \in B\}.$$

Graf funkce (v kartézských souřadnicích)

- **Grafem funkce** f rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, pro jejichž souřadnice x, y platí

$$(x, y) \in f \iff y = f(x).$$

- Grafické znázornění pomáhá k pochopení vlastností a průběhu funkce.
- Pro některé funkce však graf **nedovedeme sestavit** (Dirichletova)
- Grafy funkcí lze uvažovat i v **jiných souřadnicových soustavách** (polární).

Způsoby definice funkce:

- Funkci f lze vyjádřit takto: $f = \{(x, y) \in D(f) \times \mathbb{R}; V(x, y)\}$.
- Zadáváme tedy
 - ▶ její definiční obor $D(f)$ a
 - ▶ jisté pravidlo $V(x, y)$,

jehož oborem pravdivosti je f a které stanovuje, jak k zadanému $x \in D(f)$ najít (vypočítat) hodnotu $f(x)$.

Například

$$f = \{(x, y) \in (-1; 1) \times \mathbb{R}; y = 2x + 1\}.$$

Způsoby definice funkce:

Podle pravidla $V(x, y)$ rozlišujeme tato zadání funkce:

- (explicitní) rovnicí,
- tabulkou,
- grafem,
- po částech,
- implicitní rovnicí,
- parametricky,

nebo i jinak.

Definice funkce (explicitní) rovnicí:

- **Precizně** například takto:

$$f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2 - 1 \right\},$$

- nebo jen **zjednodušeně**

$$f : y = x^2 - 1.$$

- **Není-li řečeno jinak,**

$D(f) :=$ nejširší množina, pro niž má rovnice smysl.

- Jiný definiční obor je třeba uvést, například

$$f : y = x - 1, x \in \mathbb{N}.$$

Definice funkce tabulkou:

- **Tabulkou:**

x	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3	8

- Rovnocenně **výčtem prvků**:

$$f = \{(-2; 3), (-1; 0), (0; -1), (1; 0), (2; 3), (3; 8)\}.$$

Definice funkce grafem:

- Zpravidla **kartézským**.
- **Další** (méně časté) **druhy** grafů:
 - ▶ **šachovnicový**,
 - ▶ **uzlový** nebo
 - ▶ graf v **polární** soustavě souřadnic.
- Grafem bývají často vyjadřovány ty funkce, jejichž průběh je zapisován v přístrojích graficky na papírová média nebo na displeji.

Definice funkce po částech:

- Tak je definována například Dirichletova funkce $\chi(x)$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & x \in \mathbb{Q}' \end{cases},$$

nebo

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}.$$

- Rovnice

$$y = \chi(x) \quad \text{a} \quad y = \operatorname{sgn} x$$

však **již** považujeme za **rovnice funkcí**.

Definice funkce Implicitní rovnicí:

- Implicitní rovnicí

$$x^2 + y^2 = 25$$

definujeme implicitní funkci $y = y(x)$.

- Práce s nimi je někdy poněkud odlišná.

Definice funkce parametricky:

- Parametrické vyjádření je tvaru

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t),\end{aligned} \quad t \in J,$$

- ▶ funkce φ, ψ jsou definované na J ,
- ▶ funkce $y = f(x)$ je definována vztahem

$$f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \exists t \in J \text{ tak, že } x = \varphi(t) \wedge y = \psi(t) \right\}.$$

- Například

$$\begin{aligned}x &= 4 \cos t, \\ y &= 4 \sin t,\end{aligned} \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

- Parametrického **vyjádření** používáme ponejvíce při vyšetřování různých (například technických) **křivek**.

Definice funkce jinak:

- Někdy je pro výrokovou formu $V(x,y)$ dána

- ▶ jen **slovní formulace**.

- ▶ Například:

$V(x,y) =$ „ y je největší celé číslo, které není větší než x “

definuje funkci $[.]$ „**celá část**“:

$[3, 8]$	$=$	$3,$
$[-1]$	$=$	$-1,$
$[-6, 7]$	$=$	$-7.$

Definice funkce — závěr:

- Pojem **funkce** se někdy **ztotožňuje** přímo s **pravidlem** $V(x, y)$,
 - ▶ podle něj rozhodujeme, zda $(x, y) \in f$,
 - ▶ nebo k danému x počítáme $f(x)$.
- I při našem pojetí funkce však toto pravidlo chápeme jako atribut a druhou stránku pojmu funkce.
- Pro $V(x, y)$ tak lze používat stejné označení f jako pro funkci, například:
 - ▶ „**funkce** $f : y = x^2 - 1$ “
 - ▶ nebo prostě „**funkce** $y = x^2 - 1$ “.

Řešení rovnic a nerovnic

Při vyšetřování vlastností (průběhu) funkcí se setkáváme s několika typickými úlohami, jež vedou na řešení rovnic a nerovnic resp. jejich soustav. Některé dále uvádíme.

Stanovení definičního oboru

- Je-li funkce f určena rovnicí a její definiční obor není zadán, je třeba zjistit $D(f)$ jako množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž je daná rovnice definována.
- Úlohy na definiční obor zpravidla vedou na řešení nerovnic nebo soustav nerovnic.

Úloha

Určete definiční obor funkce $y = \frac{\ln(4 - x^2)}{1 - x}$.

Řešení.

Čitatel je definován pro $4 - x^2 > 0$, tj. na množině $M_1 = (-2, 2)$,
jmenovatel je definován pro $1 - x \neq 0$, tj. na množině $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Pravá strana rovnice funkce je tedy definována na množině
 $D(f) = M_1 \cap M_2 = (-2, 1) \cup (1, 2)$. □

Zjištění nulových bodů funkce

- Tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce:
- při hledání průsečíků grafu funkce s osou x zjišťujeme nulové body funkce f ,
- dále též při výpočtu extrémů funkcí zjišťujeme nulové body 1. derivace, tj. stacionární body,
- při zkoumání inflexe zjišťujeme zpravidla nulové body 2. derivace funkce.

Zjištění nulových bodů funkce

Úloha

Určete nulové body funkce $y = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$.

Řešení.

Máme $y = e^{-x}(\cos x - \sin x)$. Hledáme body, v nichž $y = 0$, tj. řešíme goniometrickou rovnici $\cos x - \sin x = 0$, jež je ekvivalentní s rovnicí $\sin \frac{\pi}{4} \cos x - \cos \frac{\pi}{4} \sin x = 0$ (neboť $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$) a tedy i s rovnicí $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0$. Nulové body dané funkce jsou tedy $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$. □

Zjištění intervalů, kde je funkce kladná (záporná)

- Také tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce
- (při zjišťování intervalů monotónnosti řešíme nerovnice typu $y' > 0$,
- při zjišťování intervalů konvexnosti a konkávnosti řešíme nerovnice typu $y'' > 0$).

Úloha

Určete intervaly, kde je funkce $y = (6x - x^2) e^{-x}$ kladná a kde je záporná.

Řešení.

Rovnici upravíme na tvar $y = (6 - x)x e^{-x}$. Pro $x > 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. na intervalu $(0, 6)$ je daná funkce kladná, pro $x > 0 \wedge 6 - x < 0$, tj. na intervalu $(6, +\infty)$ je funkce záporná, pro $x < 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. též na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce záporná. □

Zjištění průsečíků grafů dvou funkcí

Úloha

Jsou dány funkce $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$. Stanovte průsečíky grafů těchto funkcí.

Řešení.

Řešíme rovnici

$$x^2 - 1 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, x_2 = 2,$$

takže průsečíky jsou body $A[-1; 0]$ a $B[2; 3]$.



Porovnání hodnot dvou funkcí

Úloha

Jsou dány funkce $f_1 : y = x^2$, $f_2 : y = 4 - 2x - x^2$. Porovnejte hodnoty těchto funkcí.

Řešení.

$$f_1(x) < f_2(x) \Leftrightarrow x^2 < 4 - 2x - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0,$$

tedy na intervalu $(-2, 1)$; podobně $f_1(x) > f_2(x)$ na množině $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ a obě funkce mají stejné funkční hodnoty v bodech -2 a 1 . □

Omezenost funkce

Definice

Funkce f se nazývá:

- **shora omezená na množině** $M \subset D(f)$ $\iff f(M)$ je shora omezená;
- **zdola omezená na množině** $M \subset D(f)$ $\iff f(M)$ je zdola omezená;
- **omezená na množině** $M \subset D(f)$ $\iff f(M)$ je omezená;
- **(shora, zdola) omezená** $\iff$ tuto vlastnost má množina $H(f)$.

Omezenost funkce

Příklady

Funkce $y = x^2$ je omezená zdola, není omezená shora a není omezená, ale na množině $\langle -10, 10 \rangle$ je omezená.

- f omezená na $M \iff \exists K, L \in \mathbb{R} : f(M) \subset \langle K, L \rangle$.
- f omezená $\iff$ omezená na $D(f)$ (omezená na každé množině $M \subset D(f)$).

Omezenost funkce

- Supremum množiny $f(M)$ nazýváme **supremum funkce** na množině M a označujeme $\sup_{x \in M} f(x)$;
- podobně $\inf_{x \in M} f(x)$.
- Má-li množina $f(M)$ největší prvek, pak toto číslo nazýváme **největší hodnota funkce** f na množině M nebo též *globální (absolutní) maximum* funkce f na množině M ; značí se $\max_{x \in M} f(x)$,
- podobně $\min_{x \in M} f(x)$.
- Pokud $M = D(f)$, pak označení $x \in M$ vynecháváme.

Monotónnost

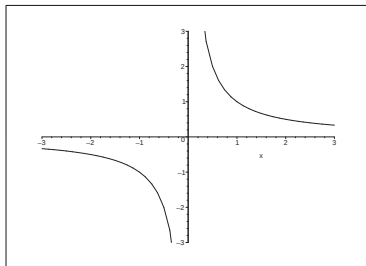
Definice

Funkce f se nazývá **rostoucí** (**klesající**, **neklesající**, **nerostoucí**) na množině $M \subset D(f) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M$ platí:

$$\begin{aligned}x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{rostoucí}) && M+RM \\&\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (\text{klesající}) && M+RM \\&\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{neklesající}) && M \\&\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{nerostoucí}) && M\end{aligned}$$

- Funkci f rostoucí na $D(f)$ nazýváme **rostoucí** (tj. neuvádíme, kde je rostoucí), podobně funkce **klesající**, **neklesající**, **nerostoucí**.
- Pro funkce rostoucí a funkce klesající používáme souhrnný název funkce **ryze monotónní**; souhrnný název pro všechny čtyři uvedené druhy funkcí je funkce **monotónní**.

Monotónnost



Příklad

Funkce $y = \frac{1}{x}$ je

- klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a je
- klesající i na intervalu $(0, +\infty)$, ale
- není klesající (tj. není klesající na $D(f)$).

Monotónnost v bodě

- Monotónnost na množině — globální vlastnost funkce,
- monotónnost v bodě — vlastnost lokální.

Definice

Funkce f se nazývá **rostoucí v bodě** $x_0 \in D(f)$ $\Leftrightarrow$

- $\exists U(x_0) \subset D(f)$ tak, že
- $\forall x \in P(x_0-) \text{ platí } f(x) < f(x_0)$ a
- $\forall x \in P(x_0+) \text{ platí } f(x_0) < f(x)$.

Podobně definujeme funkci

- *klesající (nerostoucí, neklesající)* v bodě x_0 a dále funkci
- *rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající* v bodě x_0 **zleva** resp. **zprava**.

Vztah monotónnosti v bodě a na intervalu

Věta

Funkce f definovaná na intervalu (a, b) je na tomto intervalu rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající) $\iff$ má takovou vlastnost v každém bodě tohoto intervalu.

Princip důkazu pro f rostoucí.

- 1) f rostoucí na (a, b) $\implies$ rostoucí v každém bodě $x_0 \in (a, b)$
- 2) f rostoucí v každém bodě $x_0 \in (a, b)$ $\implies$ rostoucí na (a, b)



Vztah monotónnosti v bodě a na intervalu

f rostoucí na $(a, b) \implies$ rostoucí v každém bodě $x_0 \in (a, b)$

- Nechť je f rostoucí na (a, b) .
- Zvolíme libovolný bod $x_0 \in (a, b)$ a jeho okolí $P(x_0) \subset (a, b)$.
- Je-li

$$x_1 \in P(x_0-), \quad x_2 \in P(x_0+),$$

je

$$x_1 < x_0 < x_2$$

a monotónnost v bodě x_0 plyne z monotónnosti na (a, b) .

Vztah monotónnosti v bodě a na intervalu

f rostoucí v každém bodě $x_0 \in (a, b) \implies$ rostoucí na (a, b)

Zvolíme dva body $x_1 < x_2$ a dokážeme, že $f(x_1) < f(x_2)$.

- Pro každé x' z jistého $P(x_1+)$ je $f(x_1) < f(x')$; definujeme

$$M = \{x' \in (a; b) : f(x_1) < f(x')\}, \quad m = \sup(M)$$

- Kdyby $m < b$, bylo by $m \in M$, neboť i v m je f rostoucí a podle 2. vlastnosti suprema $\forall P(m-)$ obsahuje bod $x' \in M$, tedy $f(x_1) < f(x') < f(m)$.
- Současně by existovalo pravé okolí $P(m+) \subset (a, b)$ tak, že by pro všechny jeho body x'' platilo $f(x'') > f(m) > f(x_1)$, tj. $x'' \in M$, $x'' > m$ a to je spor s 1. vlastností suprema.
- Proto $m = b$, takže $x_2 \in M$ a $f(x_1) < f(x_2)$.

Například funkce $y = \operatorname{sgn} x$ je rostoucí v bodě 0.

Definice

Funkce f se nazývá **sudá (lichá)** $\iff \forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in D(f) \implies -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

- Příklad sudé funkce: $y = \cos x$,
- příklad liché funkce: $y = \sin x$.

Úloha

Dokažte, že funkce $y = 3x^2 - 5$, $y = |x|$ a Dirichletova funkce χ jsou sudé a že $y = 2x^3 + x$, $y = x|x|$ a $y = \operatorname{sgn} x$ jsou funkce liché.

Pro polynomické funkce platí:

- jsou-li v polynomu jen členy se sudými exponenty, je daná funkce sudá,
- jsou-li zde jen členy s lichými exponenty, je funkce lichá.

- Kartézský graf sudé funkce je souměrný podle osy y ,
- graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Periodičnost

Definice

Funkce f se nazývá **periodická** $\iff \exists p \in \mathbb{R}, p \neq 0$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

- 1) $x \in D(f) \Rightarrow (x \pm p) \in D(f)$,
- 2) $\forall x \in D(f) : f(x \pm p) = f(x)$.

Číslo p se nazývá **perioda** funkce f .

- Je-li p perioda funkce f , je $\forall k \in \mathbb{Z}$ také číslo kp periodou funkce f .
- Nejmenší kladná perioda p_0 , pokud existuje, se nazývá *primitivní* (též *základní*) perioda funkce f .
- Konstantní funkci zpravidla mezi periodické funkce nepočítáme.

Příklady periodických funkcí:

- $y = \sin x \quad (p_0 = 2\pi)$,
- $y = \operatorname{tg} x \quad (p_0 = \pi)$.