

## Vlastnosti funkcí

Jiří Fišer

22. října 2007

# Omezenost funkce

## Definice

*Funkce  $f$  se nazývá*

*(**shora, zdola**) omezená na množině  $M \subset D(f) \Leftrightarrow$  tuto vlastnost má množina  $f(M)$ ;*

*nazývá se (**shora, zdola**) omezená  $\Leftrightarrow$  tuto vlastnost má množina  $H(f)$ .*

## Příklady

Funkce  $y = x^2$  je omezená zdola, není omezená shora a není omezená,  
ale na množině  $\langle -10, 10 \rangle$  je omezená.

# Omezenost funkce

- $f$  omezená na  $M \iff \exists K, L \in \mathbb{R} : f(M) \subset \langle K, L \rangle$ .
- $f$  omezená  $\iff$  omezená na každé množině  $M \subset D(f)$ .

# Omezenost funkce

- Supremum množiny  $f(M)$  nazýváme **supremum funkce** na množině  $M$  a označujeme  $\sup_{x \in M} f(x)$ ;
- podobně  $\inf_{x \in M} f(x)$ .
- Má-li množina  $f(M)$  největší prvek, pak toto číslo nazýváme **největší hodnota funkce**  $f$  na množině  $M$  nebo též *globální (absolutní) maximum* funkce  $f$  na množině  $M$ ; značí se  $\max_{x \in M} f(x)$ ,
- podobně  $\min_{x \in M} f(x)$ .
- Pokud  $M = D(f)$ , pak označení  $x \in M$  vynecháváme.

# Monotónnost

## Definice

Funkce  $f$  se nazývá **rostoucí** (**klesající**, **neklesající**, **nerostoucí**) na množině  $M \subset D(f) \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M$  platí:

$$\begin{aligned}x_1 < x_2 &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{rostoucí}) && M+RM \\&\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (\text{klesající}) && M+RM \\&\Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{neklesající}) && M \\&\Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (\text{nerostoucí}) && M\end{aligned}$$

- Funkci  $f$  rostoucí na  $D(f)$  nazýváme **rostoucí** (tj. neuvádíme, kde je rostoucí), podobně funkce **klesající**, **neklesající**, **nerostoucí**.
- Pro funkce rostoucí a funkce klesající používáme souhrnný název funkce **ryze monotónní**; souhrnný název pro všechny čtyři uvedené druhy funkcí je funkce **monotónní**.

# Monotónnost

## Příklad

Funkce  $y = \frac{1}{x}$  je

- klesající na intervalu  $(-\infty, 0)$  a je
- klesající i na intervalu  $(0, +\infty)$ , ale
- není klesající (tj. není klesající na  $D(f)$  ).

# Monotónnost v bodě

- Monotónnost na množině — globální vlastnost funkce,
- monotónnost v bodě — vlastnost lokální.

## Definice

Funkce  $f$  se nazývá **rostoucí v bodě**  $x_0 \in D(f)$   $\Leftrightarrow$

- $\exists U(x_0) \subset D(f)$  tak, že
- $\forall x \in P(x_0-) \text{ platí } f(x) < f(x_0)$  a
- $\forall x \in P(x_0+) \text{ platí } f(x_0) < f(x)$ .

Podobně definujeme funkci

- *klesající* (*nerostoucí*, *neklesající*) v bodě  $x_0$  a dále funkci
- *rostoucí*, *klesající*, *nerostoucí* a *neklesající* v bodě  $x_0$  **zleva** resp. **zprava**.

# Vztah monotónnosti v bodě a na intervalu

## Věta

*Funkce  $f$  definovaná na intervalu  $(a, b)$  je na tomto intervalu rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající)  $\Leftrightarrow$  má takovou vlastnost v každém bodě tohoto intervalu.*

## Princip důkazu pro $f$ rostoucí.

- 1)  $f$  rostoucí na  $(a, b)$   $\implies$  rostoucí v každém bodě  $x_0 \in (a, b)$
- 2)  $f$  rostoucí v každém bodě  $x_0 \in (a, b)$   $\implies$  rostoucí na  $(a, b)$





# Vztah monotónnosti v bodě a na intervalu

$f$  rostoucí na  $(a, b) \implies$  rostoucí v každém bodě  $x_0 \in (a, b)$

- Nechť je  $f$  rostoucí na  $(a, b)$ .
- Zvolíme libovolný bod  $x_0 \in (a, b)$  a jeho okolí  $P(x_0) \subset (a, b)$ .
- Je-li

$$x_1 \in P(x_0-), \quad x_2 \in P(x_0+),$$

je

$$x_1 < x_0 < x_2$$

a monotónnost v bodě  $x_0$  plyne z monotónnosti na  $(a, b)$ .

# Vztah monotónnosti v bodě a na intervalu

$f$  rostoucí v každém bodě  $x_0 \in (a, b) \implies$  rostoucí na  $(a, b)$

Zvolíme dva body  $x_1 < x_2$  a dokážeme, že  $f(x_1) < f(x_2)$ .

- Pro každé  $x'$  z jistého  $P(x_1+)$  je  $f(x_1) < f(x')$ ;

$$m = \sup(M), \quad M = \{x \in (a; b) : f(x_1) < f(x')\}$$

- Kdyby  $m < b$ , bylo by  $m \in M$ , neboť i v  $m$  je  $f$  rostoucí a podle 2. vlastnosti suprema  $\forall P(m-)$  obsahuje bod  $x' \in M$ , tedy  $f(x_1) < f(x') < f(m)$ .
- Současně by existovalo pravé okolí  $P(m+) \subset (a, b)$  tak, že by pro všechny jeho body  $x''$  platilo  $f(x'') > f(m) > f(x_1)$ , tj.  $x'' \in M$ ,  $x'' > m$  a to je spor s 1. vlastností suprema.
- Proto  $m = b$ , takže  $x_2 \in M$  a  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Například funkce  $y = \operatorname{sgn} x$  je rostoucí v bodě 0.

## Definice

*Funkce  $f$  se nazývá **sudá** (**lichá**)  $\iff \forall x \in \mathbb{R}$  platí*

$$x \in D(f) \implies -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

- Příklad sudé funkce:  $y = \cos x$ ,
- příklad liché funkce:  $y = \sin x$ .

## Úloha

*Dokažte, že funkce  $y = 3x^2 - 5$ ,  $y = |x|$  a Dirichletova funkce  $\chi$  jsou sudé a že  $y = 2x^3 + x$ ,  $y = x|x|$  a  $y = \operatorname{sgn} x$  jsou funkce liché.*

Pro polynomické funkce platí:

- jsou-li v polynomu jen členy se sudými exponenty, je daná funkce sudá,
- jsou-li zde jen členy s lichými exponenty, je funkce lichá.
  
- Kartézský graf sudé funkce je souměrný podle osy  $y$ ,
- graf liché funkce je souměrný podle počátku.

# Periodičnost

## Definice

Funkce  $f$  se nazývá **periodická**  $\iff \exists p \in \mathbb{R}, p \neq 0$  tak, že  $\forall x \in \mathbb{R}$  platí

- 1)  $x \in D(f) \Rightarrow (x \pm p) \in D(f)$ ,
- 2)  $\forall x \in D(f) : f(x \pm p) = f(x)$ .

Číslo  $p$  se nazývá **perioda** funkce  $f$ .

- Je-li  $p$  perioda funkce  $f$ , je  $\forall k \in \mathbb{Z}$  také číslo  $kp$  periodou funkce  $f$ .
- Nejmenší kladná perioda  $p_0$ , pokud existuje, se nazývá *primitivní* (též *základní*) *perioda* funkce  $f$ .
- Konstantní funkci zpravidla mezi periodické funkce nepočítáme.

Příklady periodických funkcí:

- $y = \sin x$  ( $p_0 = 2\pi$ ),
- $y = \operatorname{tg} x$  ( $p_0 = \pi$ ).

## Úloha

*Dokažte, že*

- *funkce  $y = x - [x]$  je periodická s periodou  $p_0 = 1$  a že*
- *Dirichletova funkce  $\chi$  je periodická a periodou je každé racionální číslo různé od nuly; zde  $p_0$  neexistuje.*

Někdy je užitečné chápat periodičnost jen „jednostranně“, například „**periodičnost vpravo**,“ tj. tak, že v definici místo  $(x \pm p)$  uvažujeme jen  **$(x + p)$** , kde  $p > 0$ .

# Operace s funkcemi

- Rovnost funkcí
- Částečné uspořádání
- Zúžení (restrikce)
- Algebraické operace
- Skládání funkcí

# Rovnost funkcí:

$$f = g \iff \forall x, y \in \mathbb{R} : ((x, y) \in f \iff (x, y) \in g).$$

Obráceně, je-li  $f \neq g$ , znamená to, že buď  $D(f) \neq D(g)$  nebo  $\exists x' \in D(f) \cap D(g)$  tak, že  $f(x') \neq g(x')$ .



# Částečné uspořádání:

Je-li  $F$  množina funkcí a jsou-li všechny funkce definovány na  $M$ , definuje se na  $F$  částečné uspořádání nerovností  $f < g$ .

## Úloha

*Definujte nerovnost  $f < g$  na  $M$  a objasněte její geometrický význam.*

Například funkce  $y = |x|$  a funkce  $y = x + 1$  nejsou srovnatelné na  $\mathbb{R}$ , ale na  $(0, +\infty)$  ano.

## Zúžení (restrikce) funkce:

Mějme funkci  $f$ ; její restrikcí nazveme funkci  $g$  takovou, že  $D(g) \subset D(f)$  a na  $D(g)$  je  $g(x) = f(x)$ .

# Algebraické operace:

$\forall x \in D(f) \cap D(g)$  se definuje

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x),$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x),$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$
- $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$  (pokud  $g(x) \neq 0$ ).

# Skládání funkcí:

- Mějme funkce  $f, \varphi$  a necht'  $H(\varphi) \subset D(f)$ .
- Pak složenou funkci  $F = f \circ \varphi$  definujeme takto:
  - ▶  $(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$ , přičemž
  - ▶ funkci  $f$  nazýváme *vnější funkce* a
  - ▶ funkci  $\varphi$  *funkce vnitřní*.

- Například ve složené funkci

$$y = \sin 2x$$

je vnější funkce  $y = \sin u$ , vnitřní funkce  $u = 2x$ .

- Funkce může být složena i vícekrát, například

$$y = e^{\sin(3x+1)}.$$

# Skládání funkcí:

- Složenou funkci můžeme vytvořit substitucí proměnné.
- Máme-li například funkci  $y = 1 - x$  a dosadíme  $x = \sin t$ , dostáváme složenou funkci  $y = 1 - \sin t$ .
- Zvláštním případem složené funkce je  $|f|$ . Vnější funkce je  $y = |z|$ , vnitřní funkce  $z = f(x)$ .

## Úloha

*Zobrazte funkci*

$$y = |x^2 - 2x|.$$

# Funkce prostá

## Definice

Funkce  $f$  se nazývá **prostá na**  $M \subset D(f)$   $\iff \forall x_1, x_2 \in M$  platí:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

a nazývá se **prostá**  $\iff$  je prostá na  $D(f)$ .

Množina  $M$ , na níž je funkce prostá, se nazývá jejím **oborem prostoty**.

Například funkce

$$y = x^2$$

není prostá, ale je prostá třeba na intervalu

$$\langle 0, +\infty \rangle,$$

který je jejím oborem prostoty.

# Funkce prostá

## Věta (vztah prostoty a ryzí monotónnosti)

*Je-li funkce ryze monotónní na  $M$ , je prostá na  $M$ .*

## Důkaz.

plyne z toho, že  $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$  a stejně i pro funkční hodnoty plyne z nerovností „<“, „>“ nerovnost „ $\neq$ “.

- Obrácený vztah neplatí, existují prosté funkce, které nejsou monotónní, například funkce  $y = \frac{1}{x}$ .
- Prostota funkce  $f$  je základním předpokladem pro to, aby inverzní relace  $f^{-1}$  byla zobrazením a tedy funkcí.

# Funkce inverzní

## Definice

*Inverzní zobrazení  $f^{-1}$  k prosté funkci (na  $M$ )  $f$  nazýváme **inverzní funkce**.*

- Je-li tedy funkce  $f$  prostá, pak k ní existuje funkce inverzní  $f^{-1}$  a platí

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1};$$

přitom

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f).$$

- Je-li  $f$  prostá na  $M$ , pak inverzní funkce má

$$D(f^{-1}) = f(M), \quad H(f^{-1}) = M.$$

Na  $M$  platí  $f^{-1}(f(x)) = x$  a na  $f(M)$  platí  $f(f^{-1}(x)) = x$ .



# Funkce inverzní

## Geometrický význam:

Grafy funkcí  $f$  a  $f^{-1}$  jsou souměrně sdružené podle přímky  $y = x$  (osy I. a III. kvadrantu).

- Například funkce  $f : y = x^2 - 1$  je prostá na  $M = \langle 0, +\infty \rangle$ ,  $f(M) = \langle -1, +\infty \rangle$ .
- Inverzní funkce  $f^{-1}$  je definována na  $\langle -1, +\infty \rangle$  a platí  $x = y^2 - 1$  tj.  $y = \sqrt{x + 1}$ .
- Pro  $x \in \langle 0, +\infty \rangle$  je  $f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{(x^2 - 1) + 1} = \sqrt{x^2} = x$ ,
- pro  $x \in \langle -1, +\infty \rangle$  je  $f \circ f^{-1}(x) = (\sqrt{x + 1})^2 - 1 = x$ .

Funkce a funkce k nim inverzní tvoří dvojice funkcí navzájem inverzních, neboť  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

- Existují i funkce inverzní samy k sobě; graf takové funkce je souměrný podle přímky  $y = x$  (například funkce  $y = 1/x$ ,  $y = a - x$ ,  $y = x$ ).

# Funkce inverzní

Některé vlastnosti funkcí se přenášejí na funkce inverzní.

## Věta (o monotónnosti inverzní funkce)

*Je-li funkce  $f$  rostoucí (klesající), je funkce  $f^{-1}$  také rostoucí (klesající).*

## Princip důkazu pro $f$ rostoucí:

- Nechť funkce  $y = f(x)$  je rostoucí:

$$(x_1 < x_2) \implies (y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)).$$

- Je-li  $y_1 < y_2$ , pak nemůže platit  $x_1 > x_2$ , protože z toho by plynulo  $y_1 > y_2$ .



# Rozšíření pojmu funkce

Pojem funkce se v matematice používá i v širším pojetí, zejména jako zobrazení z nějaké množiny  $M$  do množiny  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ , případně i do jiné množiny.

- a) Je-li  $M$  množina uspořádaných  $n$ -tic  $P = (x_1, \dots, x_n)$  reálných čísel, je funkce  $y = f(P)$  reálnou *funkcí  $n$  proměnných*.
- b) Je-li  $M$  množina (systém) množin  $X$ , pak lze definovat různé *množinové funkce*; například:
  - \* Jsou-li množiny  $X \in M$  konečné, definuje se množinová funkce  $n$ , kde  $n(X)$  je *počet prvků* množiny  $X$ .
  - \* Jsou-li  $X$  křivky resp. rovinné obrazce resp. tělesa, definují se množinové funkce  $s(X)$  (*délka křivky*) resp.  $P(X)$  (*obsah – míra rovinného obrazce*) resp.  $V(X)$  (*objem – míra tělesa*).

# Rozšíření pojmu funkce

## c) *Práce s texty.*

V souvislosti s počítači vznikla větší potřeba práce s texty; množinu všech textů označíme  $T$ . Příklady *textových konstant*: 'Praha', 'JAN HUS', ". Apostrofy zde uvedené mají úlohu omezovačů, tj, nezapočítávají se do textu. První z uvedených konstant má tedy 5 znaků, druhá konstanta má 7 znaků (také mezera mezi slovy je znak) a třetí konstanta je tzv. prázdný text. Mezera je jedním ze znaků, takže například 'Praha' je jiný text než 'Praha∨' (tento text má 6 znaků; zde '∨' je značka mezery), tedy 'Praha'  $\neq$  'Praha∨'.

Jsou-li  $x, y$  *textové proměnné* na množině  $T$ , lze položit (dosadit) například  $x := \text{'Praha'}$ ,  $y := \text{'Zlín'}$ ; pak  $x < y$  (tj. 'Praha' < 'Zlín'), neboť jde o *abecední uspořádání*. Nejběžnější operací s texty je *spojování textů*. Má-li například textová proměnná  $x$  hodnotu 'Praha∨' a proměnná  $z$  hodnotu '4', pak  $x + z = \text{'Praha∨4'}$ .