

Matematická analýza 1

Jiří Fišer

23. října 2009

Periodičnost

Definice

Funkce f se nazývá **periodická** $\iff \exists p \in \mathbb{R}, p \neq 0$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

- 1) $x \in D(f) \Rightarrow (x \pm p) \in D(f),$
- 2) $\forall x \in D(f) : f(x \pm p) = f(x).$

Číslo p se nazývá **perioda** funkce f .

- Je-li p perioda funkce f , je $\forall k \in \mathbb{Z}$ také číslo kp periodou funkce f .
- Nejmenší kladná perioda p_0 , pokud existuje, se nazývá *primitivní* (též *základní*) *perioda* funkce f .
- Konstantní funkci zpravidla mezi periodické funkce nepočítáme.

Příklady periodických funkcí:

- $y = \sin x \quad (p_0 = 2\pi),$
- $y = \operatorname{tg} x \quad (p_0 = \pi).$

Úloha

Dokažte, že

- funkce $y = x - [x]$ je periodická s periodou $p_0 = 1$ a že
- Dirichletova funkce χ je periodická a periodou je každé racionální číslo různé od nuly; zde p_0 neexistuje.

Někdy je užitečné chápat periodičnost jen „jednostranně“, například „periodičnost vpravo,“ tj. tak, že v definici místo $(x \pm p)$ uvažujeme jen $(x + p)$, kde $p > 0$.

Operace s funkcemi

- Rovnost funkcí
- Částečné uspořádání
- Zúžení (restrikce)
- Algebraické operace
- Skládání funkcí

Rovnost funkcí:

$$f = g \iff \forall x, y \in \mathbb{R} : ((x, y) \in f \iff (x, y) \in g).$$

Obráceně, je-li $f \neq g$, znamená to, že

- buď $D(f) \neq D(g)$,
- nebo $\exists x' \in D(f) \cap D(g)$ tak, že $f(x') \neq g(x')$.

Částečné uspořádání:

Je-li F množina funkcí a jsou-li všechny funkce definovány na M , definuje se na F částečné uspořádání nerovností $f < g$.

Úloha

Definujte nerovnost $f < g$ na M a objasněte její geometrický význam.

Například funkce $y = |x|$ a funkce $y = x + 1$ nejsou srovnatelné na $\mathbb{R}$, ale na $(0, +\infty)$ ano.

Zúžení (restrikce) funkce:

- Mějme funkci f ;
- její restrikcí nazveme funkci g takovou, že:
 - ▶ $D(g) \subset D(f)$
 - ▶ a na $D(g)$ je $g(x) = f(x)$.

Algebraické operace:

Pro každé $x \in D(f) \cap D(g)$ se definuje

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x),$
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x),$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$
- $(f / g)(x) = f(x) / g(x) \quad (\text{pokud } g(x) \neq 0).$

Skládání funkcí:

- Mějme funkce f, φ a necht' $H(\varphi) \subset D(f)$.
- Pak složenou funkci $F = f \circ \varphi$ definujeme takto:
 - ▶ $(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$, přičemž
 - ▶ funkci f nazýváme vnější funkce a
 - ▶ funkci φ funkce vnitřní.

Skládání funkcí:

- Například ve složené funkci

$$y = \sin 2x$$

je vnější funkce $y = \sin u$, vnitřní funkce $u = 2x$.

- Funkce může být složena i vícekrát, například

$$y = e^{\sin(3x+1)}.$$

Skládání funkcí:

- Složenou funkci můžeme vytvořit substitucí proměnné.
- Máme-li například funkci $y = 1 - x$ a dosadíme $x = \sin t$, dostáváme složenou funkci $y = 1 - \sin t$.
- Zvláštním případem složené funkce je $|f|$.
 - ▶ Vnější funkce je $y = |z|$,
 - ▶ vnitřní funkce $z = f(x)$.

Úloha

Zobrazte funkci

$$y = |x^2 - 2x|.$$

Funkce prostá

Definice

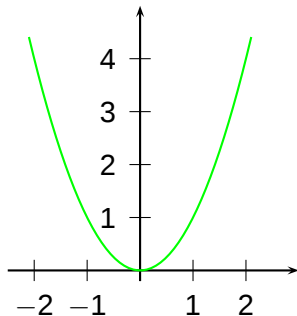
Funkce f se nazývá *prostá na* $M \subset D(f)$ $\iff \forall x_1, x_2 \in M$ platí:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

a nazývá se *prostá* $\iff$ je prostá na $D(f)$.

Množina M , na níž je funkce prostá, se nazývá jejím *oborem prostoty*.

Funkce prostá



Například funkce $y = x^2$

- není prostá (na svém definičním oboru),
- ale je prostá třeba na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$,
 - ▶ který je jejím oborem prostoty.

Funkce prostá

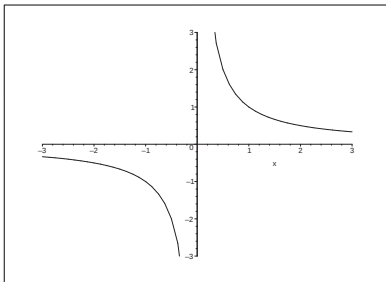
Věta (vztah prostoty a ryzí monotónnosti)

Je-li funkce ryze monotónní na M , je prostá na M .

Důkaz.

Plyne z toho, že v definicích rostoucí a klesající funkce máme $x_1 < x_2$, z čehož plyne $x_1 \neq x_2$, což se nachází v definici prosté funkce. Stejně i pro funkční hodnoty plyne z nerovností $f(x_1) < f(x_2)$, resp. $f(x_1) > f(x_2)$ nerovnost $f(x_1) \neq f(x_2)$. □

- Obrácený vztah neplatí,
 - ▶ existují prosté funkce, které nejsou monotónní,
 - ▶ například funkce $y = \frac{1}{x}$.



- Prostota funkce f je základním předpokladem pro to, aby inverzní relace f^{-1} byla zobrazením a tedy funkcí.

Funkce inverzní

Definice

Inverzní zobrazení f^{-1} k prosté funkci (na M) f nazýváme *inverzní funkce*.

Funkce inverzní

- Je-li tedy funkce f prostá, pak k ní existuje funkce inverzní f^{-1} a platí

$$(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1};$$

přitom

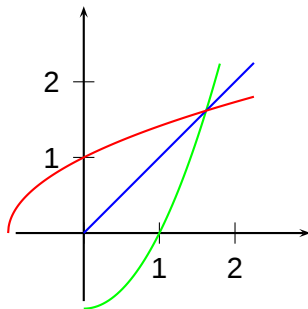
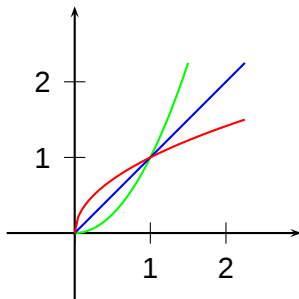
$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f).$$

- Je-li f prostá na M , pak inverzní funkce má

$$D(f^{-1}) = f(M), \quad H(f^{-1}) = M.$$

Na M platí $f^{-1}(f(x)) = x$ a na $f(M)$ platí $f(f^{-1}(x)) = x$.

Funkce inverzní



Geometrický význam:

Grafy funkcí f a f^{-1}

- jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$ (osy I. a III. kvadrantu).

Funkce inverzní

- Například funkce

$$f : y = x^2 - 1$$

je prostá na $M = \langle 0, +\infty \rangle$, $f(M) = \langle -1, +\infty \rangle$.

- Inverzní funkce f^{-1} je definována na $\langle -1, +\infty \rangle$ a platí

$$x = y^2 - 1 \quad \text{tj.} \quad y = \sqrt{x + 1}.$$

- Pro $x \in \langle 0, +\infty \rangle$ je

$$f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{(x^2 - 1) + 1} = \sqrt{x^2} = x,$$

- pro $x \in \langle -1, +\infty \rangle$ je

$$f \circ f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x + 1} \right)^2 - 1 = x.$$

Funkce inverzní

- Funkce a funkce k nim inverzní tvoří dvojice funkcí navzájem inverzních, neboť $(f^{-1})^{-1} = f$.
- Existují i funkce inverzní samy k sobě; graf takové funkce je souměrný podle přímky $y = x$ (například funkce $y = 1/x$, $y = a - x$, $y = x$).

Funkce inverzní

Některé vlastnosti funkcí se přenášejí na funkce inverzní.

Věta (o monotónnosti inverzní funkce)

Je-li funkce f rostoucí (klesající), je funkce f^{-1} také rostoucí (klesající).

Princip důkazu pro f rostoucí:

- Necht' funkce $y = f(x)$ je rostoucí:

$$(x_1 < x_2) \implies (y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)).$$

- Je-li $y_1 < y_2$, pak nemůže platit $x_1 > x_2$, protože z toho by plynulo $y_1 > y_2$.



Elementární funkce

Přehled elementárních funkcí

- Jde o pojem spíše historický než matematický.
- Vymezuje se několik (*základních*) *elementárních funkcí* a
- z nich se pomocí konečného počtu algebraických operací a operací skládání vytvářejí další funkce,
- jež bývají v matematické literatuře někdy také nazývány **elementární funkce**.

Základní elementární funkce:

- funkce **konstantní** ($y = c$);
- funkce **mocninné** ($y = x^r$ pro libovolné $r \in R$),
(tedy i odmocniny a také nepřímá úměrnost);
- funkce **goniometrické** ($y = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$)
a **cyklometrické** ($y = \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$);
- funkce **exponenciální** ($y = a^x, a > 0, a \neq 1$)
a **logaritmické** ($y = \log_a x$);
- funkce **hyperbolické** ($y = \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{coth} x$)
a **hyperbolometrické** ($y = \operatorname{argsh} x, \operatorname{argch} x, \operatorname{argth} x, \operatorname{argcoth} x$).

Algebraické funkce

- je název pro elementární funkce, které vzniknou
 - ▶ z funkcí konstantních a
 - ▶ z funkce $f(x) = x$
- užitím operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování.
- Pokud nepoužijeme operaci odmocňování, dostaneme algebraické **funkce racionální**.
- Algebraické funkce, které nejsou racionální, nazýváme **iracionální**.

Zvláštní případy algebraických funkcí:

- **celá racionální funkce** neboli funkce **polynomická** (algebraický polynom) a
- **lomená racionální funkce**, patří mezi nejvýznamnější funkce studované v matematice.

Transcendentní funkce

- Elementární funkce, které nejsou algebraické, se obvykle nazývají **transcendentní**;
- ze základních elementárních funkcí mezi ně patří funkce
 - ▶ exponenciální,
 - ▶ logaritmické,
 - ▶ goniometrické,
 - ▶ cyklometrické,
 - ▶ hyperbolické a
 - ▶ hyperbolometrické, ale též
 - ▶ mocninná funkce s iracionálním exponentem.

Vlastnosti elementárních funkcí

- Elementární funkce mají velmi rozmanité vlastnosti (například pokud jde o omezenost, monotónnost, paritu, periodičnost aj.)
- a proto společné vlastnosti lze formulovat jen na velmi obecné úrovni.
- Uvidíme zejména, že
 - ▶ elementární funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru a
 - ▶ mají derivaci ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru.
 - ▶ Derivací elementární funkce je opět elementární funkce.
 - ▶ Naopak ovšem primitivní funkcí k funkci elementární nemusí být funkce elementární.

Příklady funkcí, které nejsou elementární:

- Dirichletova funkce $\chi(x)$,
- funkce $\operatorname{sgn} x$,
- funkce $[.]$ „celá část“,
- funkce $\{.\}$ „lomená část“ definovaná vztahem $\{x\} = x - [x]$.
- Absolutní hodnota.
- Funkce definované „po částech“, jako například funkce

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ x^2 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

(Tuto funkci bychom ovšem mohli nazvat „po částech elementární“).