

Elementární funkce

Přehled elementárních funkcí

- Jde o pojem spíše historický než matematický.
- Vymezuje se několik (*základních*) *elementárních funkcí* a
- z nich se pomocí konečného počtu algebraických operací a operací skládání vytvářejí další funkce,
- jež bývají v matematické literatuře někdy také nazývány **elementární funkce**.

Základní elementární funkce:

- funkce **konstantní** ($y = c$);
- funkce **mocninné** ($y = x^r$ pro libovolné $r \in \mathbb{R}$, patří sem tedy i odmocniny a také například nepřímá úměrnost);
- **goniometrické** funkce ($y = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$) a funkce **cyklometrické** ($y = \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arccotg} x$);
- **exponenciální** funkce ($y = a^x, a > 0, a \neq 1$) a funkce **logaritmické** ($y = \log_a x$);
- **hyperbolické** funkce ($y = \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{coth} x$) a funkce **hyperbolometrické** ($y = \operatorname{argsh} x, \operatorname{argch} x, \operatorname{argth} x, \operatorname{argcoth} x$).

Algebraické funkce

- je název pro elementární funkce, které vzniknou
 - ▶ z funkcí konstantních a
 - ▶ z funkce $f(x) = x$
- užitím operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování.
- Pokud nepoužijeme operaci odmocňování, dostaneme algebraické ***funkce racionální***.
- Algebraické funkce, které nejsou racionální, nazýváme ***iracionální***.

Zvláštní případy algebraických funkcí:

- ***celá racionální funkce*** neboli funkce ***polynomická*** (algebraický polynom) a
- ***loměná racionální funkce***, patří mezi nejvýznamnější funkce studované v matematice.

Transcendentní funkce

- Elementární funkce, které nejsou algebraické, se obvykle nazývají **transcendentní**;
- ze základních elementárních funkcí mezi ně patří funkce
 - ▶ exponenciální,
 - ▶ logaritmické,
 - ▶ goniometrické,
 - ▶ cyklometrické,
 - ▶ hyperbolické a
 - ▶ hyperbolometrické, ale též
 - ▶ mocninná funkce s iracionálním exponentem.

Vlastnosti elementárních funkcí

- Elementární funkce mají velmi rozmanité vlastnosti (například pokud jde o omezenost, monotónnost, paritu, periodičnost aj.)
- a proto společné vlastnosti lze formulovat jen na velmi obecné úrovni.
- Uvidíme zejména, že
 - ▶ elementární funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru a
 - ▶ mají derivaci ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru.
 - ▶ Derivací elementární funkce je opět elementární funkce.
 - ▶ Naopak ovšem primitivní funkcí k funkci elementární nemusí být funkce elementární.

Příklady funkcí, které nejsou elementární:

- Dirichletova funkce $\chi(x)$,
- funkce $\operatorname{sgn} x$,
- funkce $[.]$ „celá část“,
- funkce $\{.\}$ „lomená část“ definovaná vztahem $\{x\} = x - [x]$.
- Absolutní hodnota.
- Funkce definované „po částech“, jako například funkce

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ x^2 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

(Tuto funkci bychom ovšem mohli nazvat „po částech elementární“).

Algebraické funkce

- a) Mocniny s přirozeným a celým exponentem
- b) Odmocniny
- c) Mocniny s racionálním exponentem
- d) Polynomické funkce
- e) Racionální lomené funkce

a) Mocniny s přirozeným a celým exponentem

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-krát}}, \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall r, s \in \mathbb{N} :$

- (1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s},$
- (2) $a^r : a^s = a^{r-s}$ (pokud $a \neq 0, r > s$),
- (3) $(a^r)^s = a^{rs},$
- (4) $(ab)^r = a^r b^r,$
- (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (pokud $b \neq 0$),
- (6) $a^r = b^r \Leftrightarrow a = b$ (pokud $a, b > 0$).

K tomu přidejme ještě vlastnosti vyjádřené nerovnostmi

- (7) $\forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b,$
- (8) $\forall a > 1, r < s \Rightarrow a^r < a^s; \quad \forall a \in (0, 1), r < s \Rightarrow a^r > a^s.$

Rozšíření pojmu mocnina

Nejprve exponent 0:

- Mají-li zůstat v platnosti výše uvedené vlastnosti (1)–(5), je třeba podle

(2) $a^r : a^s = a^{r-s}$ (pokud $a \neq 0, r > s$)

definovat

$$\forall a \neq 0; a^0 = 1.$$

- Vlastnost (2) pak platí pro $r \geq s$ a u všech vlastností se musíme omezit na mocniny s nenulovým základem, neboť 0^0 není definována.

- Vlastnosti

(6) $a^r = b^r \Leftrightarrow a = b$ (pokud $a, b > 0$) a

(7) $\forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$

ovšem pro $r = 0$ neplatí.

Rozšíření pojmu mocnina

Exponent — celé číslo.

- Klíčovou vlastností je opět

(2) $a^r : a^s = a^{r-s}$ (pokud $a \neq 0$, $r > s$),
podle níž se definuje (položíme-li $r = 0$, $s = k$)

$$\forall a \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}; \quad a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

- Vlastnost (2) pak platí již bez omezení pro $r, s \in \mathbb{Z}$ a vlastnost

(7) $\forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$
nabude tvaru

$$(7') \quad \begin{aligned} \forall r > 0, \forall a, b > 0 : \quad a^r < b^r &\Leftrightarrow a < b, \\ \forall r < 0, \forall a, b > 0 : \quad a^r > b^r &\Leftrightarrow a < b. \end{aligned}$$

b) Odmocniny

Definice

Pro každé přirozené číslo n definujeme n -tou odmocninu z nezáporného čísla a jako takové nezáporné číslo x , pro něž platí $x^n = a$.

Označení: $x = \sqrt[n]{a}$.

Podle definice tedy $(\sqrt[n]{a})^n = a$, například $(\sqrt{3})^2 = 3$.

Existence n -té odmocniny

- se zdá být zřejmá.
- Jednoduché příklady: $\sqrt[3]{8} = 2$, neboť $2^3 = 8$.
- Méně zřetelné případy, třeba $\sqrt[3]{\pi}$, je třeba si odpovědět na otázku,
- zda n -tá odmocnina pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ skutečně existuje a zda je to jediné číslo.

Věta (o existenci a jednoznačnosti n -té odmocniny)

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ existuje právě jedno číslo $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$, takové, že $x^n = a$.

Základní vlastnosti odmocnin:

Věta

$\forall a \in \mathbb{R}, a \geq 0, \forall m, n, r \in \mathbb{N}$:

1) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},$

2) $\sqrt[nr]{a^r} = \sqrt[n]{a}.$

Důkaz.

ad 1) Pro levou a pravou stranu rovnosti platí:

- ▶ $L = x^m$, kde podle definice $x^n = a$;
- ▶ po umocnění na m -tou máme $x^{mn} = a^m$.
- ▶ $P = y$, kde podle definice je $y^n = a^m$.
- ▶ Je tedy $x^{mn} = y^n$ a z toho $x^m = y$,

takže $L = P$.

ad 2) ▶ $L = x$, kde $x^{nr} = a^r$, což dává $x^n = a$.
▶ $P = y$, kde $y^n = a$. Tedy $x^n = y^n$ a z toho $x = y$,
tj. $L = P$.

c) Mocniny s racionálním exponentem

- Vyjdeme ze základní vlastnosti n -té odmocniny z čísla a :

$$x^n = a.$$

- Tedy položíme $x = a^t$
a po umocnění na n -tou je $a = x^n = a^{tn}$,
tedy $tn = 1$, $t = 1/n$.

- To vede k definici $(\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0)$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

- Vlastnosti mocnin zůstávají zachovány s tím, že musíme uvážit příslušné podmínky pro a, b, r, s .

Mocniny s reálným exponentem

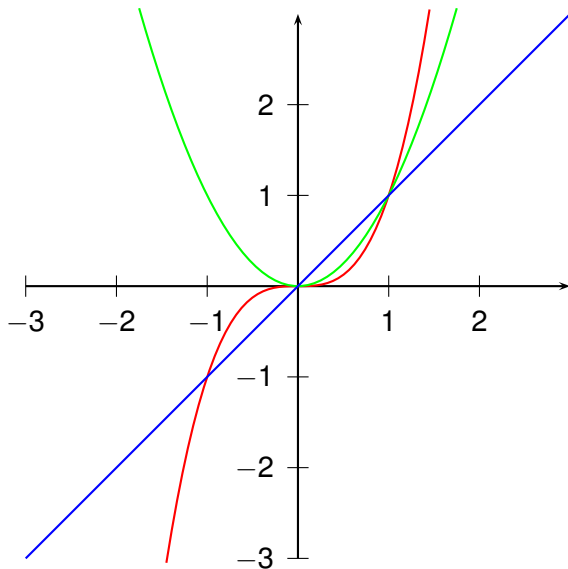
- Pojem mocniny lze takto rozšířit, ale
- mocnina s iracionálním exponentem již není algebraická funkce.

Definice

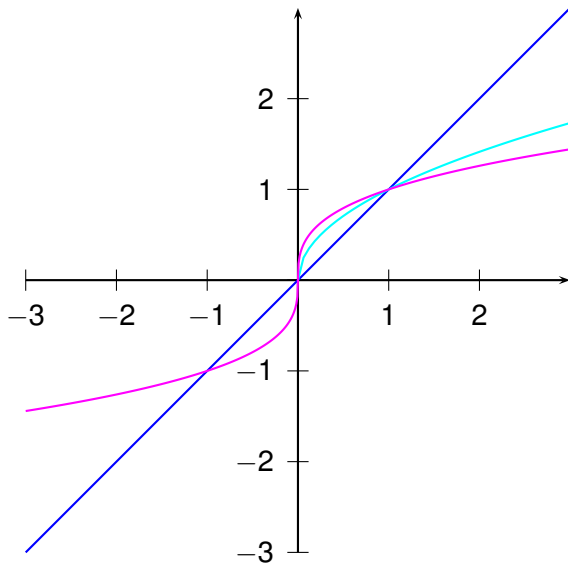
Necht' $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $q \in \mathbb{Q}'$. Pak definujeme

$$a^q = \sup_{r \in \mathbb{Q}, r < q} \{a^r\}.$$

Výše uvedené vlastnosti mocnin (1)–(6), (7'), (8) platí pro libovolné reálné exponenty.



Obrázek: Grafy funkcí $y = x^3$, $y = x^2$ a $y = x$.



Obrázek: Grafy funkcí $y = x$, $y = x^{1/2}$ a $y = x^{1/3}$.

d) Polynomické funkce

- Jsou dány rovnicí $y = P(x)$, kde

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

je algebraický polynom.

- Pro $a_0 \neq 0$ jde o polynom a tedy i o polynomickou funkci n -tého stupně; $D(f) = \mathbb{R}$.
- Polynomická funkce obsahující jen liché mocniny x je lichá,
- pokud obsahuje jen sudé mocniny x , je sudá.

Při studiu polynomických funkcí se využívá poznatků z algebry, která se algebraickými polynomy zabývá.

Zejména se využívá:

- dělení polynomů (se zbytkem),
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických polynomů,
- věta o rovnosti polynomů. (Jestliže dva polynomy P , Q nejvýše n -tého stupně se rovnají v $n + 1$ bodech, pak $P(x) = Q(x)$ na $\mathbb{R}$, tj. oba polynomy mají tentýž stupeň a tytéž koeficienty.)

Mocninná funkce — n sudé

$$y = x^n \quad (\text{s přirozeným exponentem } n).$$

Grafem je parabola n -tého stupně.

- sudá funkce, která je pro $n \geq 2$
- na intervalu $(-\infty, 0)$ klesající a
- na intervalu $(0, +\infty)$ rostoucí,
- tedy v bodě 0 má minimum, $H(f) = \langle 0, +\infty \rangle$,
- funkce je konvexní na $\mathbb{R}$.
- Při definici inverzní funkce se za obor prostoty bere interval $\langle 0, +\infty \rangle$.
- Inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ je tedy definována na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ a stejný je i obor hodnot.

Mocninná funkce — n liché

$$y = x^n \quad (\text{s přirozeným exponentem } n).$$

- lichá funkce,
- rostoucí na $\mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$.
- Pro $n \geq 3$ je f konkávní na $(-\infty, 0)$ a
- konvexní na $(0, +\infty)$,
- v bodě 0 má inflexi.
- Ježto f je bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, je inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ definována na $\mathbb{R}$ a má též obor hodnot.
- Z tohoto důvodu je možné a účelné pro lichá n definovat n -tou odmocninu i ze záporných čísel;
například $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Konstantní funkce

$$y = k, \quad \text{kde } k \text{ je konstanta; } H(f) = \{k\}$$

- Současně neklesající i nerostoucí,
- sudé ($y = 0$ je současně i lichá).
- V každém bodě mají neostré lokální maximum i neostré lokální minimum.
- Grafem každé konstantní funkce $y = k$ v kartézské soustavě souřadnic je přímka rovnoběžná s osou x , resp. osa x ($y = 0$).

Lineární funkce

$$y = kx + q, \quad \text{kde } k \neq 0, q \text{ jsou reálné konstanty.}$$

- $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$. Pro $k > 0$ rostoucí, pro $k < 0$ klesající, pro $q = 0$ jsou liché.
- Grafem přímka, jež není rovnoběžná s osou x ani k ní kolmá.
- Konstanta k je *směrnicí* přímky, tj. $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je velikost orientovaného úhlu určeného osou x a touto přímkou; zpravidla bereme $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Parametr q znamená *úsek na ose y* .
- Pro $q = 0$ se lineární funkce nazývá též *přímá úměrnost*, grafem je přímka procházející počátkem.
- lineární funkce jsou ryze monotonní, jsou i prosté.
- Funkce inverzní jsou opět lineární. Funkce $y = a - x$ a funkce $y = x$ jsou samy k sobě inverzní.

Kvadratické funkce

Jsou dány rovnicí

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kde $a \neq 0$, b , c jsou konstanty; $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f)$ je pro $a > 0$ interval typu $\langle m, +\infty)$, pro $a < 0$ je to interval typu $(-\infty, m\rangle$, kde m je minimum resp. maximum funkce f . Tohoto ostrého lokálního extrému nabývá funkce f v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Grafem každé kvadratické funkce v kartézské soustavě souřadnic je (kvadratická) parabola; pro funkci $y = ax^2$ je její vrchol v počátku soustavy souřadnic.

e) Racionální lomené funkce

Jsou to funkce dané rovnicí

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Je-li stupeň čitatele větší nebo roven stupni jmenovatele, dovedeme racionální lomenou funkci vyjádřit ve tvaru

$$y = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $S(x)$ je podíl a $R(x)$ je zbytek při dělení $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Tato úprava (které se říká „snížit stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele“) se používá při integraci racionálních funkcí.

Racionální lomené funkce

Úloha

Je dána funkce $y = \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 7}{x^2 + 3}$. Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele.

Řešení.

Po provedeném dělení dostaneme $y = x - 5 + \frac{5x + 8}{x^2 + 3}$. □

Racionální lomené funkce

Úloha

Je dána funkce $y = \frac{x^5 - 1}{x^2 + 1}$. Provedte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele, aniž provedete klasické dělení.

Řešení.

V čitateli vhodné členy přičítáme a odčítáme a zlomek rozdělíme na více zlomků. Dostaneme $y = x^3 - x + \frac{x - 1}{x^2 + 1}$. □

Lineární lomené funkce

Jsou to funkce s rovnicí

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

kde a, b, c, d jsou reálné konstanty, přičemž platí

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0; \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

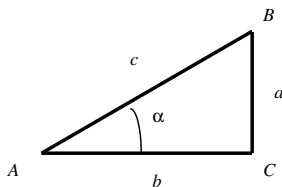
- Jsou prosté,
- grafem je rovnoosá hyperbola.
- Inverzní funkce jsou též lineární lomené.
- Zvláštním případem je *nepřímá úměrnost* $y = \frac{a}{x}$, která je sama k sobě inverzní.

Transcendentní funkce

- Goniometrické funkce
- Funkce cyklometrické
- Exponenciální funkce
- Logaritmické funkce
- Funkce hyperbolické a hyperbolometrické

Goniometrické funkce

Pravoúhlé trojúhelníky — definice *goniometrických funkcí ostrého úhlu*.



Obrázek: Pravoúhlý trojúhelník

Definice

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Goniometrické funkce

Tato definice pracuje zpravidla s úhly v míře stupňové.

Odsud

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Z $\triangle ABC$ dále plyne:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg} \alpha.$$

Zvláštní hodnoty

Některé zvláštní hodnoty goniometrických funkcí lze odvodit (při použití Pythagorovy věty)

- z rovnostranného trojúhelníku s výškou:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

(podobně pro „kofunkce“ $\cos \alpha$ a $\operatorname{cotg} \alpha$).

- ze čtverce s úhlopříčkou:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1.$$

Zvláštní hodnoty

Když α roste od 0° do 90° ,

- tak funkce sinus roste od 0 do 1,
- funkce tangens roste od 0 do $+\infty$,
- funkce kosinus klesá od 1 k 0 a
- funkce kotangens klesá od $+\infty$ k 0.

Rozšíření funkcí:

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \operatorname{tg} 0^\circ = 0, \quad \operatorname{cotg} 0^\circ \text{ není definován;}$$

podobně

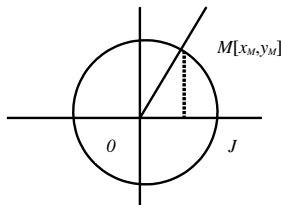
$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \operatorname{tg} 90^\circ \text{ není definován,} \quad \operatorname{cotg} 90^\circ = 0.$$

Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí

- Používání míry obloukové,
- přepočet mezi velikostí úhlu α v míře stupňové a velikostí x v míře obloukové:

$$x = \frac{\pi}{180} \alpha, \quad \alpha = \frac{180}{\pi} x.$$

Užití jednotkové kružnice k def. goniom. fcí



Obrázek: Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí

Definice

Je-li O počátek pravoúhlé soustavy souřadnic, J jednotkový bod na ose x , $M(x_M, y_M)$ bod na jednotkové kružnici a t velikost orientovaného úhlu $\angle JOM$, pak hodnota funkce $\cos t$ je definována jako x -ová souřadnice bodu M , $\cos t = x_M$, a hodnota funkce $\sin t$ je definována jako y -ová souřadnice bodu M , $\sin t = y_M$.

Vlastnosti plynoucích z definice

$$D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}, \quad H(\sin) = H(\cos) = \langle -1, 1 \rangle.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}; \quad \sin(t + 2k\pi) = \sin t, \quad \cos(t + 2k\pi) = \cos t.$$

Vlastnosti plynoucích z definice

- znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;
- hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \dots$, zejména nulové body:

$$\sin t = 0 \iff t = k\pi \quad (\forall k \in \mathbb{Z}),$$

$$\cos t = 0 \iff t = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \quad (\forall k \in \mathbb{Z});$$

- paritu funkcí, tj. $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\sin(-t) = -\sin t \quad (\text{funkce sinus je lichá}),$$

$$\cos(-t) = \cos t \quad (\text{funkce kosinus je sudá});$$

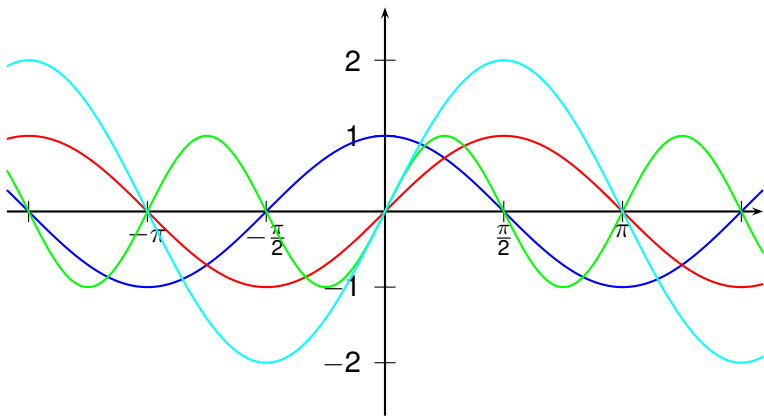
- vzorce pro změnu velikosti úhlu o π , tj. $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\sin(t \pm \pi) = -\sin t,$$

$$\cos(t \pm \pi) = -\cos t;$$

- nerovnost: $\forall t \in (0, +\infty) : \sin t < t$;

- parametrické vyjádření kružnice:
$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos t, \\ y &= r \cdot \sin t, \end{aligned} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$



Obrázek: Grafy funkcí $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = 2 \sin x$ a $y = \cos x$.

Funkce tangens a kotangens

Definice funkcí tangens a kotangens vychází z funkcí sinus a kosinus.

Definice

$\forall x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ (tedy pro něž $\cos x \neq 0$) definujeme funkci tangens:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$\forall x \neq k\pi$ (tedy pro něž $\sin x \neq 0$) definujeme funkci kotangens:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Vlastnosti funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$:

$$D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}; \quad H(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}.$$

$$D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}; \quad H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}.$$

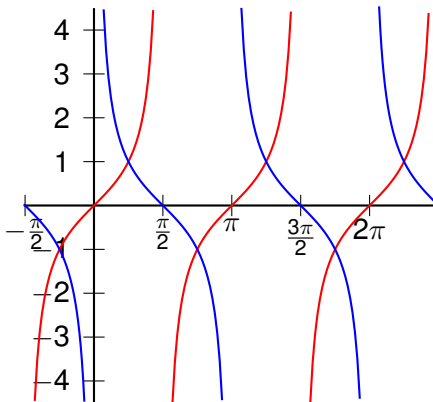
Základní vlastnosti:

- znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;
- hodnoty funkcí pro úhly $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, zejména nulové body:
 $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} \pi = 0, \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{2} = 0$;
- paritu funkcí, tj. $\forall x \in D(f)$:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x \text{ (funkce liché);}$$

- periodičnost funkcí: $\forall x \in D(f)$:

$$\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x \pm \pi) = \operatorname{cotg} x.$$



Obrázek: Grafy funkcí $y = \tan x$ a $y = \cot x$.

Vzorce pro goniometrické funkce:

- $g(\alpha \pm \beta)$:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

- $g(2\alpha)$:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

- $g\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Vzorce pro goniometrické funkce:

- $g(\alpha) \pm g(\beta)$:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

- $g(\alpha) \cdot g(\beta)$:

$$\sin m\alpha \cdot \cos n\alpha = \frac{1}{2} [\sin(m+n)\alpha + \sin(m-n)\alpha];$$

- velmi užitečný je vzorec:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Funkce cyklometrické

Pro základní goniometrické funkce se volí obory prostoty P , přičemž obory hodnot H se nemění:

$$\sin x : \quad P = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \quad H = \langle -1, 1 \rangle;$$

$$\cos x : \quad P = \langle 0, \pi \rangle, \quad H = \langle -1, 1 \rangle;$$

$$\operatorname{tg} x : \quad P = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \quad H = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R};$$

$$\operatorname{cotg} x : \quad P = (0, \pi), \quad H = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Při definici cyklometrických funkcí se vymění úloha množin P a H .

Definice

Goniometrické funkce uvažujeme na jejich oborech prostoty. Inverzní funkcí (s definičním oborem D) k funkci

$\sin x$ je funkce $\arcsin x$ (arkussinus), $D = \langle -1, 1 \rangle$;

$\cos x$ je funkce $\arccos x$ (arkuskosinus), $D = \langle -1, 1 \rangle$;

$\operatorname{tg} x$ je funkce $\operatorname{arctg} x$ (arkustangens), $D = (-\infty, +\infty)$;

$\operatorname{cotg} x$ je funkce $\operatorname{arccotg} x$ (arkuskotangens), $D = (-\infty, +\infty)$.

Funkce cyklometrické

Přitom si uvědomíme, že například $\forall x \in \langle -1, 1 \rangle, \forall y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$,
znamenaají zápisy $y = \arcsin x, x = \sin y$ přesně totéž.

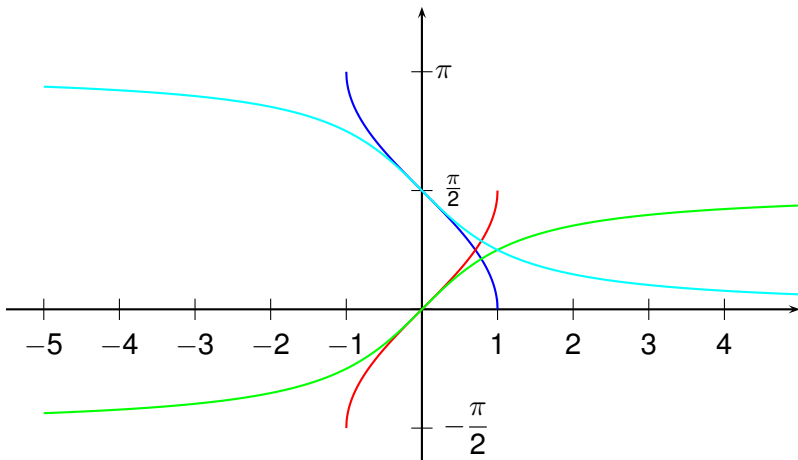
Funkce $\arcsin x$ se vyskytuje v úlohách na určení definičního oboru funkcí.

Úloha

Určete definiční obor funkce $f : y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{3x+2}}$.

Řešení.

Čitatel je definován na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, jmenovatel na množině $x > -\frac{2}{3}$, tedy na intervalu $(-\frac{2}{3}, +\infty)$. Definiční obor $D(f)$ je průnikem obou intervalů, tedy $D(f) = (-\frac{2}{3}, 1)$. □



Obrázek: Grafy funkcí $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$ a $y = \operatorname{arccotg} x$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

Jelikož inverzní funkce zachovává monotónnost funkce výchozí, jsou funkce

- $\arcsin x$, $\arctg x$ ve svých definičních oborech rostoucí,
- $\arccos x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou klesající.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

Ze vzorců pro funkce goniometrické lze odvodit odpovídající vzorce pro funkce cyklometrické, například:

- Ježto $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, dostaneme po dosazení $\cos t = x$, (tedy i $t = \arccos x$):
- $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Rightarrow \forall x \in \langle -1, 1 \rangle : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
- Podobně též $\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

Proto se z uvedených cyklometrických funkcí používá obvykle vždy jen jedna z každé dvojice, zpravidla funkce $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

Jestliže ve vzorci pro

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$$

položíme

$$\operatorname{tg} \alpha = x, \quad \operatorname{tg} \beta = y,$$

tj.

$$\alpha = \operatorname{arctg} x, \quad \beta = \operatorname{arctg} y,$$

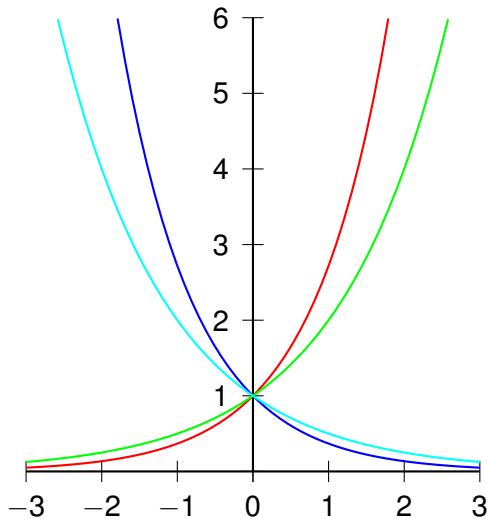
dostaneme vzorec

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}.$$

Exponenciální funkce

$$y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1$$

- $D(f) = \mathbb{R}$,
- $H(f) = (0, +\infty)$.
- Pro $a > 1$ je rostoucí.
- Pro $a < 1$ je klesající.
- Grafu exponenciální funkce říkáme *exponenciála*.
- Všechny exponenciály procházejí bodem $[0; 1]$.
- Zvlášť důležitá je exponenciální funkce $y = e^x$, označovaná někdy též $\exp x$.



Obrázek: Grafy funkcí $y = e^x$, $y = (\frac{1}{e})^x$, $y = 2^x$ a $y = (\frac{1}{2})^x$.

Logaritmické funkce

- Exponenciální funkce $f : y = a^x$ je pro $a > 0$ prostá na $\mathbb{R}$,
- $H(f) = (0, +\infty)$.
- Inverzní funkce

$$f^{-1} : x = a^y,$$

— *logaritmická funkce* o základu a

$$y = \log_a x;$$

$$D(f^{-1}) = (0, +\infty), \quad H(f) = \mathbb{R}.$$

- Hodnotu logaritmické funkce nazýváme **logarithmus**;
- Pro matematickou analýzu je nejdůležitější logaritmická funkce o základu e , pro niž máme zvláštní označení $\ln x = \log_e x$ a název **přirozený logarithmus** ($\ln = \text{logarithmus naturalis}$).

Vlastnosti logaritmu

(a) Zápis $x = a^y$ znamená přesně totéž jako $y = \log_a x$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}: \log_a a^x = x, \quad \forall x > 0: a^{\log_a x} = x$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}: a^x = e^{x \ln a}$ (neboť $a = e^{\ln a}$).

Z prostoty exponenciálních a logaritmických funkcí plyne:

(d) $a^K = a^L \Leftrightarrow K = L, \quad A = B (> 0) \Leftrightarrow \log_a A = \log_a B$.

V obou případech (d) získáme závěr implikace *logaritmováním* jejího předpokladu.

Vlastnosti logaritmu

- Dekadický logaritmus, tj. logaritmus o základu 10, měl dříve výsadní postavení při numerických výpočtech (používání tabulek dekadických logaritmů), ale s rozšířením kalkulačků a počítačů toto postavení ztratil.
- Všechny logaritmické funkce o základu $a > 1$ jsou rostoucí a jejich grafy procházejí bodem $[1; 0]$ na ose x .

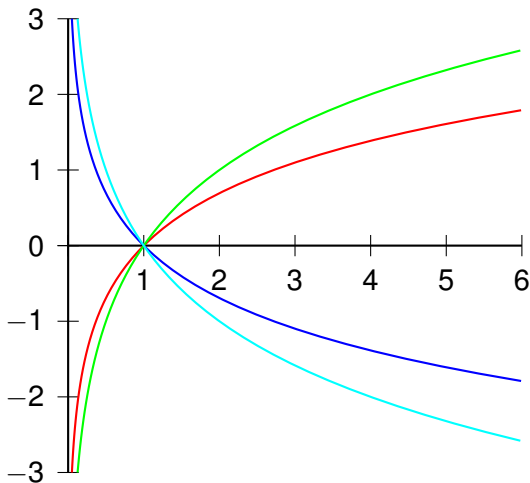
Vlastnosti logaritmu

- Místo exponenciálních funkcí $y = a^x$ o základu a lze uvažovat jen exponenciální funkce $y = e^{kx}$ o základu e .
- Podobně na sebe lze převádět logaritmy o různých základech.
- Převodní vztahy lze odvodit například takto (uvažujme logaritmus přirozený a logaritmus o základu a):
- Rovnost $x = a^{\log_a x}$ logaritmujeme při základu e a dostaneme $\ln x = \ln a \cdot \log_a x$.
- Jestliže logaritmujeme rovnost $x = e^{\ln x}$ při základu a , dostaneme $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x$.
- Z vlastností exponenciálních funkcí plynou ihned vlastnosti funkcí logaritmických:

$$\forall x_1, x_2 > 0: \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2;$$

$$\forall x_1, x_2 > 0: \log_a(x_1 : x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2;$$

$$\forall x > 0, \forall m \in \mathbb{R}: \log_a(x^m) = m \cdot \log_a x.$$



Obrázek: Grafy funkcí $y = \ln x$, $y = \log_{1/e} x$, $y = \log_2 x$ a $y = \log_{1/2} x$.

Funkce hyperbolické a hyperbolometrické

Hyperbolické funkce patří mezi elementární funkce a jsou definovány pomocí funkcí exponenciálních takto:

Definice

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}),$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x};$$

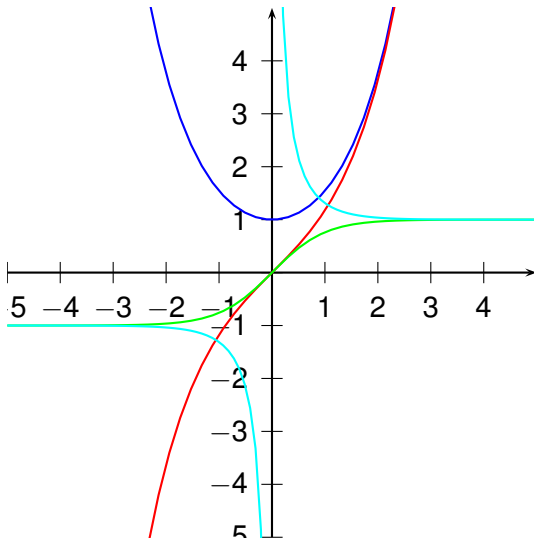
jsou to hyperbolický sinus, kosinus, tangens a kotangens.

Z definice je vidět, že pro první tři z těchto funkcí je $D(f) = \mathbb{R}$ (pro $\operatorname{th} x$ to plyne z toho, že $\forall x \in \mathbb{R}: \operatorname{ch} x > 0$). Lehce zjistíme, že funkce $\operatorname{sh} x$ má jediný nulový bod pro $x_0 = 0$, takže $D(\operatorname{coth}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Obory hodnot a průběh:

- $H(\text{sh}) = \mathbb{R}$, funkce je rostoucí;
- $H(\text{ch}) = \langle 1, +\infty \rangle$, funkce je klesající na $(-\infty, 0)$ a rostoucí na $\langle 0, +\infty \rangle$, v bodě 0 má minimum 1.
- $H(\text{th}) = (-1; 1)$, funkce je rostoucí;
 $H(\text{coth}) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, na intervalu $(-\infty, 0)$ funkce klesá od -1 k $-\infty$, na intervalu $(0, +\infty)$ funkce klesá od $+\infty$ k 1.
- Pro funkce tangens i kotangens jsou přímky $y = 1$ a $y = -1$ asymptotami,
- asymptotou grafu funkce kotangens je též osa y .

Graf funkce $y = a \cdot \text{ch} \frac{x}{a}$ v kartézské souřadnicové soustavě se nazývá *řetězovka*. Je to křivka, kterou vytváří řetěz (nepružná nit) volně zavěšený ve dvou bodech.



Obrázek: Grafy funkcí $y = \text{sh } x$, $y = \text{ch } x$, $y = \text{th } x$ a $y = \text{coth } x$.

Vlastnosti hyperbolických funkcí

mají řadu vlastností velmi podobných vlastnostem funkcí goniometrických. Z definice funkcí lze odvodit například

(a) Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{coth} x$ jsou liché, funkce $\operatorname{ch} x$ je sudá.

(b) $\forall x: \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

(c) $\forall x \neq 0: \operatorname{th} x \cdot \operatorname{coth} x = 1$.

(d) $\forall x_i \in \mathbb{R}: \operatorname{sh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 \pm \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2$.

(e) $\forall x_i \in \mathbb{R}: \operatorname{ch}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 \mp \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2$.

(f) $\forall x_i \in \mathbb{R}: \operatorname{th}(x_1 \pm x_2) = \frac{\operatorname{th} x_1 \pm \operatorname{th} x_2}{1 \pm \operatorname{th} x_1 \operatorname{th} x_2}$.

Hyperbolické funkce se vyskytují zejména v aplikacích a také se používají při výpočtu neurčitých integrálů pomocí hyperbolických substitucí.

Funkce hyperbolometrické

Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ a $\operatorname{coth} x$ jsou prosté, u funkce $\operatorname{ch} x$ vezmeme za obor prostoty interval $\langle 0, +\infty \rangle$.

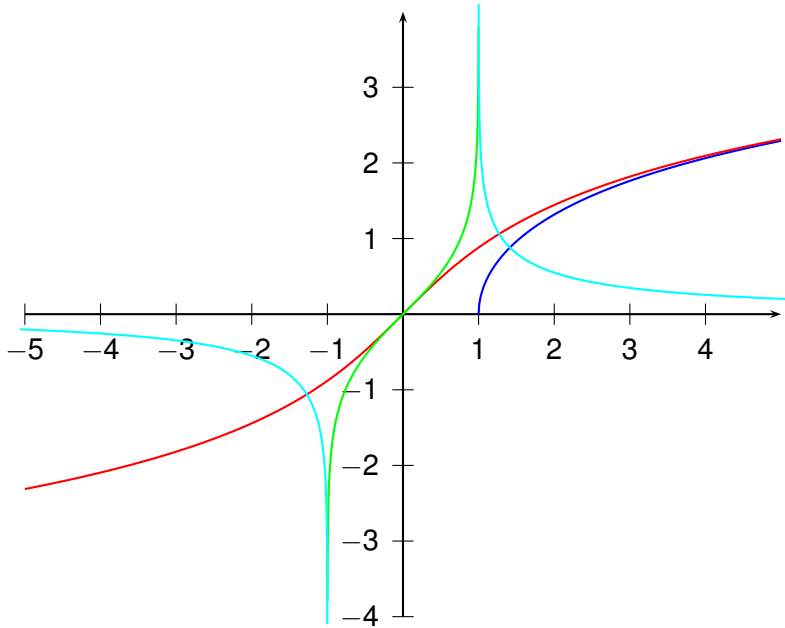
Pak lze definovat funkce inverzní (zvané **hyperbolometrické**):

- K funkci $\operatorname{sh} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argsh} x$ (argument hyperbolického sinu), $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$.
- K funkci $\operatorname{ch} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argch} x$ (argument hyperbolického kosinu), $D(f) = \langle 1, +\infty \rangle$, $H(f) = \langle 0, +\infty \rangle$.
- K funkci $\operatorname{th} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argth} x$ (argument hyperbolické tangens), $D(f) = (-1; 1)$, $H(f) = \mathbb{R}$.
- K funkci $\operatorname{coth} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argcoth} x$ (argument hyperbolické kotangens), $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Funkce hyperbolometrické

Ježto jsou hyperbolické funkce vyjádřeny pomocí exponenciální funkce, lze hyperbolometrické funkce vyjádřit pomocí funkce logaritmické, například:

$$\operatorname{argsh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), \quad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$



Obrázek: Grafy funkcí $y = \operatorname{arsinh} x$, $y = \operatorname{arch} x$, $y = \operatorname{arth} x$ a $y = \operatorname{arcoth} x$.