

Limita funkce

Limita funkce

- je jedním z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy.
- Na pojmu limita jsou založeny další významné pojmy, jako je
 - ▶ spojitost,
 - ▶ derivace funkce,
 - ▶ Riemannův integrál,
 - ▶ délka křivky a další.
- S přímým praktickým použitím limity se setkáme při vyšetřování průběhu funkce, například při zjišťování asymptot grafu funkce.

Limita funkce podle Heineho

Problém limity funkce se převede na (již známý) problém limity posloupnosti.

Definice (limita funkce podle Heineho)

- Necht' x_0 je hromadným bodem $D(f)$.

- Číslo a nazveme

limita funkce f v bodě x_0



pro každou posloupnost $\{x_n\}$,

$$x_n \in D(f), \quad x_n \neq x_0, \quad x_n \rightarrow x_0, \quad \text{platí} \quad f(x_n) \rightarrow a.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

- Píšeme

Limita funkce podle Heineho

Definice (jednostranná limita funkce podle Heineho)

- Necht' x_0 je levým (pravým) hromadným bodem $D(f)$.

- Číslo a nazveme

limita zleva (zprava) funkce f v bodě x_0

$\iff$

pro každou posloupnost $\{x_n\}$,

$$x_n \in D(f), \quad x_n < x_0 \text{ (} x_n > x_0 \text{)}, \quad x_n \rightarrow x_0, \quad \text{platí } f(x_n) \rightarrow a.$$

- Píšeme

$$f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = a \quad \left(f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = a \right).$$

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Úloha

Vypočtete obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.

Úloha

Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Úloha

Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0 .

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Úloha

Vypočtete obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.

Úloha

Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Úloha

Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0 .

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Úloha

Vypočtete obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.

Úloha

Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Úloha

Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0 .

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Úloha

Vypočtete obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.

Úloha

Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Úloha

Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0 .

Definice vlastní limity v nevlastním bodě $+\infty$

Nechť $+\infty$ je hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme limita funkce f v nevlastním bodě $+\infty$ $\iff$

pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \rightarrow +\infty$, platí $f(x_n) \rightarrow a$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a.$$

Píšeme

Úloha

Vyslovte definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě $-\infty$ a definice nevlastních limit v nevlastních bodech.

Věty o limitách funkcí

- Věty o limitách funkcí vyplývají na základě Heineho definice limity z vět o limitách posloupností.
- Proto jsou některé formulovány velmi podobně.
- Formulaci uvádíme pro vlastní limity ve vlastních bodech, je však možné i jejich rozšíření na „nevlastní případy“.

Věty o limitách funkcí

Věta

Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nejvýše jednu limitu.

Věta

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená. (Tedy

$$\exists P(x_0) \quad \exists K, L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in P(x_0) \cap D(f) : f(x) \in \langle K, L \rangle.)$$

Věta o kladné limitě

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou (zápornou) limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná (záporná).

Věty o limitách funkcí

Věta

Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nejvýše jednu limitu.

Věta

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená. (Tedy

$$\exists P(x_0) \quad \exists K, L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in P(x_0) \cap D(f) : f(x) \in \langle K, L \rangle.)$$

Věta o kladné limitě

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou (zápornou) limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná (záporná).

Věty o limitách funkcí

Věta

Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nejvýše jednu limitu.

Věta

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená. (Tedy

$$\exists P(x_0) \quad \exists K, L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in P(x_0) \cap D(f) : f(x) \in \langle K, L \rangle.)$$

Věta o kladné limitě

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou (zápornou) limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná (záporná).

Věty o limitách funkcí

Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu

Nechť jsou na M definovány funkce f a g . Nechť x_0 je hromadný bod M a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b.$$

Pak funkce

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad (\text{pro } g(x) \neq 0, \quad b \neq 0)$$

mají limitu

$$a + b, \quad a - b, \quad a \cdot b, \quad \frac{a}{b}.$$

Tyto vlastnosti platí pro rozšířenou reálnou osu ve všech případech, kdy mají uvedené výrazy s a, b smysl; například věta o součtu neplatí pro $a = +\infty, b = -\infty$.

Věty o limitách funkcí

Věta o limitě rovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Pak též $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Věta o limitě nerovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0 .

Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Úloha

Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.

Věty o limitách funkcí

Věta o limitě rovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Pak též $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Věta o limitě nerovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0 .

Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Úloha

Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.

Věty o limitách funkcí

Věta o limitě rovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Pak též $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Věta o limitě nerovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0 .

Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Úloha

Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.

Věty o limitách funkcí

Věta o třech limitách

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

přičemž

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a.$$

Pak existuje i $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ a je rovna a .

Věty o limitách funkcí

Věta o limitě monotónní funkce

Nechť bod x_0 je levým hromadným bodem množiny

$M = D(f) \cap P(x_0-)$ a funkce f je neklesající na M .

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$.

Je-li funkce f na M shora omezená, je tato limita konečná, není-li f na M shora omezená, je tato limita rovna $+\infty$.

Úloha

Vyslovte podobnou větu pro nerostoucí funkci a dále věty pro případ limity zprava.

Věty o limitách funkcí

Věta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0.$$

Věta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - a| = 0$$

(pro a vlastní).

Věty o limitách funkcí

Věta

Nechť x_0 je oboustranným hromadným bodem $D(f)$. Pak následující dva výroky jsou **ekvivalentní**:

A: Existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a je rovna a .

B: Existují $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ a obě jsou rovny a .

Úloha

Užitím předchozí věty dokažte, že funkce $y = x + \frac{|x|}{x}$ nemá limitu v bodě $x_0 = 0$.

Věty o limitách funkcí

Věta

Nechť x_0 je oboustranným hromadným bodem $D(f)$. Pak následující dva výroky jsou **ekvivalentní**:

A: Existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a je rovna a .

B: Existují $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ a obě jsou rovny a .

Úloha

Užitím předchozí věty dokažte, že funkce $y = x + \frac{|x|}{x}$ nemá limitu v bodě $x_0 = 0$.

Věty o limitách funkcí

Věta

Nechť na nějakém $P(x_0)$ platí $f(x) > 0$. Pak

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Věty o limitách funkcí

Věta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Nechť

a v nějakém okolí $P(x_0)$ platí

$$\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} a \quad [\operatorname{sgn} g(x) = -\operatorname{sgn} a].$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad [-\infty].$$

Pak platí

Věty o limitách funkcí

Věta

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f \cdot g)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a g je funkce omezená. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Věta o limitě složené funkce

Mějme složenou funkci

$$f \circ \varphi$$

Nechť

1 $\exists$ okolí

$$P(x_0) \subset D(\varphi)$$

tak, že

$$\varphi(P(x_0)) \subset D(f),$$

2

$$\exists a$$

jako

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$$

3

$$a$$

je hromadným bodem $D(f)$ a existuje

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

4

$$x_0$$

není hromadným bodem množiny

$$\{x \in P(x_0); \varphi(x) = a\}.$$

Pak existuje

limita složené funkce $f \circ \varphi$ v bodě x_0

a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ \varphi(x) = b.$$

Výpočet limit

Limity některých elementárních funkcí

Úloha

Užitím věty o třech limitách dokažte, že $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Úloha

Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.

Úloha

Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$

a že pro každý polynom $P(x)$ je $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Limity elementárních funkcí

Zobecnění na všechny elementární funkce:

Věta

Je-li f elementární funkce, $x_0 \in D(f)$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Použití této věty nazýváme

využití spojitosti funkce k výpočtu limity

Speciální limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m \quad (\text{pro libovolná } m \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Úloha

Dokažte první z výše uvedených speciálních limit.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Úloha

Dokažte první z výše uvedených speciálních limit.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Úloha

Dokažte první z výše uvedených speciálních limit.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 + 2x + 5}{2x^3 + x^2 + 7}$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \cdot 2^{3x} + 2^{x+1} + 5}{2^{3x+1} + 2^{2x} + 7}$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$, kde $x > 0$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Limita funkce podle Cauchyho

- Cauchyho definice limity využívá vztahu mezi okolími.
- Vyslovíme dvě definice.
 - ▶ Jedna uvažuje okolí ve smyslu **topologickém**,
 - ▶ druhá ve smyslu **metrickém**.

Limita funkce podle Cauchyho

Definice (limita funkce podle Cauchyho)

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$.

Říkáme, že funkce f **má v bodě** x_0 **limitu** a $\iff$

$$\forall U(a) \quad \exists P(x_0) \quad \forall x : x \in D(f) \cap P(x_0) \implies f(x) \in U(a).$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Poznámka

Poslední implikaci lze nahradit inkluzí

$$f(D(f) \cap P(x_0)) \subset U(a).$$

Limita funkce podle Cauchyho

Definice (limita funkce podle Cauchyho, druhá definice)

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$.

Říkáme, že funkce f **má v bodě** x_0 **limitu** $a \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x : x \in D(f) \cap P(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(a, \varepsilon).$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Poznámka

Závěr definice lze formálně upravit na jiný tvar s využitím absolutních hodnot:

$$\forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Limita funkce podle Cauchyho

Úloha

Znázorněte obsah Cauchyových definic na obrázku.

Úloha

Vyslovte Cauchyovy definice

- *vlastní limity v nevlastním bodě,*
- *nevlastní limity ve vlastním bodě a*
- *nevlastní limity v nevlastním bodě.*

Limita funkce podle Cauchyho

Věta (Ekvivalence definic limity funkce)

Heineho definice a Cauchyova definice limity funkce jsou ekvivalentní.

- Limita funkce dle definice Heineho je tedy přesně týž pojem jako limita funkce podle Cauchyho.
- Je tu však rozdíl v jejich použití.
- Heineho definici používáme častěji k *výpočtu* limit, neboť v této definici znalost hodnoty limity funkce není předem potřebná,
- Cauchyovu definici používáme častěji k *důkazům*, hodnotu limity musíme znát předem.