

Limita funkce

Limita funkce

- Je jedním z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy.
- Na pojmu limita jsou založeny další významné pojmy, jako je
 - ▶ spojitost,
 - ▶ derivace funkce,
 - ▶ Riemannův integrál,
 - ▶ délka křivky a další.
- Setkáme se při vyšetřování průběhu funkce:
 - ▶ zjišťování asymptot grafu funkce atd.

Limita funkce podle Heineho

Definice pomocí limity posloupnosti.

Definice (limita funkce podle Heineho)

- Necht' x_0 je hromadným bodem $D(f)$.

- Číslo a nazveme *limita funkce f v bodě x_0* $\iff$

pro každou posloupnost $\{x_n\}$,

$$x_n \in D(f), \quad x_n \neq x_0, \quad x_n \rightarrow x_0$$

platí

$$f(x_n) \rightarrow a.$$

- Píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Limita funkce podle Heineho

Definice (jednostranná limita funkce podle Heineho)

- Necht' x_0 je levým (pravým) hromadným bodem $D(f)$.

- Číslo a nazveme **limita zleva (zprava) funkce f v bodě x_0**

$\iff$

pro každou posloupnost $\{x_n\}$,

$$x_n \in D(f), \quad x_n < x_0 \text{ (} x_n > x_0 \text{)}, \quad x_n \rightarrow x_0, \quad \text{platí } f(x_n) \rightarrow a.$$

- Píšeme

$$f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = a \quad \left(f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = a \right).$$

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Úloha

Vypočtete obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.

Úloha

Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Úloha

Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0 .

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Úloha

Vypočtete obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.

Úloha

Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Úloha

Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0 .

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Úloha

Vypočtete obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.

Úloha

Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Úloha

Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0 .

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Úloha

Vypočtete obě jednostranné limity funkce $y = \operatorname{sgn} x$ v bodě 0.

Úloha

Dokažte, že Dirichletova funkce $\chi(x)$ nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

Úloha

Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0 .

Definice vlastní limity v nevlastním bodě $+\infty$

Nechť $+\infty$ je hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme limita funkce f v nevlastním bodě $+\infty$ $\iff$

pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \rightarrow +\infty$, platí $f(x_n) \rightarrow a$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a.$$

Píšeme

Úloha

Vyslovte definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě $-\infty$ a definice nevlastních limit v nevlastních bodech.

Věty o limitách funkcí

- Věty o limitách funkcí vyplývají na základě Heineho definice limity z vět o limitách posloupností.
- Proto jsou některé formulovány velmi podobně.
- Formulaci uvádíme pro vlastní limity ve vlastních bodech, je však možné i jejich rozšíření na „nevlastní případy“.

Věty o limitách funkcí

Věta

Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nejvýše jednu limitu.

Věta

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená. (Tedy

$$\exists P(x_0) \quad \exists K, L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in P(x_0) \cap D(f) : f(x) \in \langle K, L \rangle.)$$

Věta o kladné limitě

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou (zápornou) limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná (záporná).

Věty o limitách funkcí

Věta

Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nejvýše jednu limitu.

Věta

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená. (Tedy

$$\exists P(x_0) \quad \exists K, L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in P(x_0) \cap D(f) : f(x) \in \langle K, L \rangle.)$$

Věta o kladné limitě

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou (zápornou) limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná (záporná).

Věty o limitách funkcí

Věta

Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nejvýše jednu limitu.

Věta

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená. (Tedy

$$\exists P(x_0) \quad \exists K, L \in \mathbb{R} \quad \forall x \in P(x_0) \cap D(f) : f(x) \in \langle K, L \rangle.)$$

Věta o kladné limitě

Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou (zápornou) limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná (záporná).

Věty o limitách funkcí

Věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu

Nechť jsou na M definovány funkce f a g . Nechť x_0 je hromadný bod M a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b.$$

Pak funkce

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad (\text{pro } g(x) \neq 0, b \neq 0)$$

mají limitu

$$a + b, \quad a - b, \quad a \cdot b, \quad \frac{a}{b}.$$

Tyto vlastnosti platí pro rozšířenou reálnou osu ve všech případech, kdy mají uvedené výrazy s a, b smysl; například věta o součtu neplatí pro $a = +\infty, b = -\infty$.

Věty o limitách funkcí

Věta o limitě rovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Pak též $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Věta o limitě nerovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0 .

Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Úloha

Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.

Věty o limitách funkcí

Věta o limitě rovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Pak též $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Věta o limitě nerovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0 .

Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Úloha

Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.

Věty o limitách funkcí

Věta o limitě rovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Pak též $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Věta o limitě nerovnosti

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0 .

Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.

Úloha

Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.

Věty o limitách funkcí

Věta o třech limitách

Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

přičemž

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a.$$

Pak existuje i $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$ a je rovna a .

Věty o limitách funkcí

Věta o limitě monotónní funkce

Nechť bod x_0 je levým hromadným bodem množiny

$M = D(f) \cap P(x_0-)$ a funkce f je neklesající na M .

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$.

Je-li funkce f na M shora omezená, je tato limita konečná, není-li f na M shora omezená, je tato limita rovna $+\infty$.

Úloha

Vyslovte podobnou větu pro nerostoucí funkci a dále věty pro případ limity zprava.

Věty o limitách funkcí

Věta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0.$$

Věta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - a| = 0$$

(pro a vlastní).

Věty o limitách funkcí

Věta

Nechť x_0 je oboustranným hromadným bodem $D(f)$. Pak následující dva výroky jsou **ekvivalentní**:

A: Existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a je rovna **a.**

B: Existují $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ a obě jsou rovny **a.**

Úloha

Užitím předchozí věty dokažte, že funkce $y = x + \frac{|x|}{x}$ nemá limitu v bodě $x_0 = 0$.

Věty o limitách funkcí

Věta

Nechť x_0 je oboustranným hromadným bodem $D(f)$. Pak následující dva výroky jsou **ekvivalentní**:

A: Existuje $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a je rovna **a.**

B: Existují $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ a obě jsou rovny **a.**

Úloha

Užitím předchozí věty dokažte, že funkce $y = x + \frac{|x|}{x}$ nemá limitu v bodě $x_0 = 0$.

Věty o limitách funkcí

Věta

Nechť na nějakém $P(x_0)$ platí $f(x) > 0$. Pak

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Věty o limitách funkcí

Věta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Nechť

a v nějakém okolí $P(x_0)$ platí

$$\operatorname{sgn} g(x) = \operatorname{sgn} a \quad [\operatorname{sgn} g(x) = -\operatorname{sgn} a].$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad [-\infty].$$

Pak platí

Věty o limitách funkcí

Věta

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f \cdot g)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ a g je funkce omezená. Pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

Věta o limitě složené funkce

Mějme složenou funkci

$$f \circ \varphi$$

Nechť

1 $\exists$ okolí

$$P(x_0) \subset D(\varphi)$$

tak, že

$$\varphi(P(x_0)) \subset D(f),$$

2

$$\exists a$$

jako

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$$

3

$$a$$

je hromadným bodem $D(f)$ a existuje

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

4

$$x_0$$

není hromadným bodem množiny

$$\{x \in P(x_0); \varphi(x) = a\}.$$

Pak existuje

limita složené funkce $f \circ \varphi$ v bodě x_0

a platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \circ \varphi(x) = b.$$

Výpočet limit

Limity některých elementárních funkcí

Úloha

Užitím věty o třech limitách dokažte, že $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Úloha

Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.

Úloha

Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$

a že pro každý polynom $P(x)$ je $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Limity elementárních funkcí

Zobecnění na všechny elementární funkce:

Věta

Je-li f elementární funkce, $x_0 \in D(f)$, pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Použití této věty nazýváme

využití spojitosti funkce k výpočtu limity

Speciální limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m \quad (\text{pro libovolná } m \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Úloha

Dokažte první z výše uvedených speciálních limit.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Úloha

Dokažte první z výše uvedených speciálních limit.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Úloha

Dokažte první z výše uvedených speciálních limit.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 + 2x + 5}{2x^3 + x^2 + 7}$.

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \cdot 2^{3x} + 2^{x+1} + 5}{2^{3x+1} + 2^{2x} + 7}$.

Úloha

Vypočtete $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$, kde $x > 0$.

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$.

Limita funkce podle Cauchyho

- Cauchyho definice limity využívá vztahu mezi okolími.
- Vyslovíme dvě definice.
 - ▶ Jedna uvažuje okolí ve smyslu **topologickém**,
 - ▶ druhá ve smyslu **metrickém**.

Limita funkce podle Cauchyho

Definice (limita funkce podle Cauchyho)

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$.

Říkáme, že funkce f **má v bodě** x_0 **limitu** a $\iff$

$$\forall U(a) \quad \exists P(x_0) \quad \forall x : x \in D(f) \cap P(x_0) \implies f(x) \in U(a).$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Poznámka

Poslední implikaci lze nahradit inkluzí

$$f(D(f) \cap P(x_0)) \subset U(a).$$

Limita funkce podle Cauchyho

Definice (limita funkce podle Cauchyho, druhá definice)

Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$.

Říkáme, že funkce f **má v bodě** x_0 **limitu** $a \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x : x \in D(f) \cap P(x_0, \delta) \implies f(x) \in U(a, \varepsilon).$$

Píšeme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$.

Poznámka

Závěr definice lze formálně upravit na jiný tvar s využitím absolutních hodnot:

$$\forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Limita funkce podle Cauchyho

Úloha

Znázorněte obsah Cauchyových definic na obrázku.

Úloha

Vyslovte Cauchyovy definice

- *vlastní limity v nevlastním bodě,*
- *nevlastní limity ve vlastním bodě a*
- *nevlastní limity v nevlastním bodě.*

Limita funkce podle Cauchyho

Věta (Ekvivalence definic limity funkce)

Heineho definice a Cauchyova definice limity funkce jsou ekvivalentní.

- Limita funkce dle definice Heineho je tedy přesně týž pojem jako limita funkce podle Cauchyho.
- Je tu však rozdíl v jejich použití.
- Heineho definici používáme častěji k *výpočtu* limit, neboť v této definici znalost hodnoty limity funkce není předem potřebná,
- Cauchyovu definici používáme častěji k *důkazům*, hodnotu limity musíme znát předem.