

Kapitola 1

Spojitosť funkce

Spojitosť patřĩ k nejvřznamnějšĩm vlastnostem funkcĩ. Setkáváme se s nĩ — jako s požadovanou vlastností funkcĩ — ve všech částech matematické analýzy.

1.1 Pojem spojitosti funkce

Intuitivnĩ představa spojitosti funkce f v bodě x_0 je spojena s grafem funkce: graf v tomto bodě „nenĩ přetržený“, funkce je v daném bodě definována a v malém okolí bodu x_0 jsou malé i změny funkce. Spojitosť v bodě je lokální vlastnost funkce.

Definice 1.1.1 (spojitosť funkce v bodě).

*Řĩkáme, že funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \Leftrightarrow$*

- 1. je v bodě x_0 definována (tj. $x_0 \in D(f)$),*
- 2. [je-li x_0 hromadným bodem $D(f)$, pak] existuje vlastní $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a platĩ*
- 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Poznámka 1.1.2. *Někdy se vynechává podmínka v hranaté závorce. Její ponechání rozšĩřuje spojitost i do izolovaných bodů $D(f)$ a umořňuje jednoduššĩ formulaci některých vět.*

řloha 1.1.3. *Definujte spojitost v bodě x_0 zleva a spojitost zprava.*

řloha 1.1.4. *Načrtněte graf funkce f tak, aby nastaly tyto jevy:*

- 1. v bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu,*
- 2. v bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menšĩ než limita zprava, obě jsou vlastní,*
- 3. v bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menšĩ než limita zleva,*

4. v bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva,
5. v bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota,
6. v bodě $x_6 \in D(f)$, limita zleva je menší než $f(x_6)$, limita zprava je větší než $f(x_6)$,
7. v bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$,
8. v bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$,
9. v bodě $x_9 \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$.

Definice 1.1.5. Hromadný bod x_0 definičního oboru $D(f)$, v němž funkce f není spojitá, se nazývá **bod nespojitosti** funkce f .

Definice 1.1.6 (druhy nespojitosti). Nespojitost v bodě x_0 se nazývá

- **odstranitelná** $\iff$

- f má v bodě x_0 vlastní limitu,
- ale funkční hodnota $f(x_0)$
 - * buď není definována
 - * nebo není rovna limitě;

- **neodstranitelná** ve všech ostatních případech nespojitosti.

Neodstranitelnou nespojitost nazveme

- **1. druhu** $\iff$

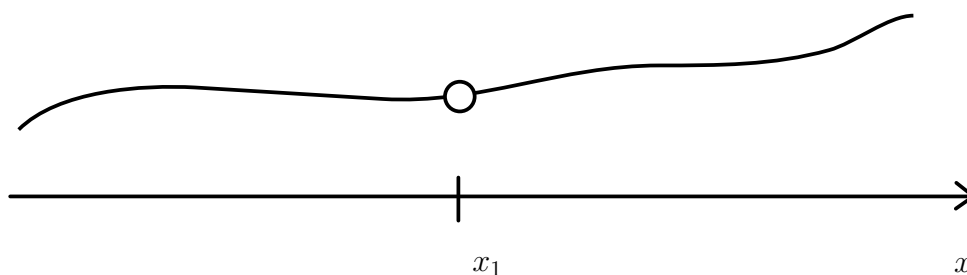
- v bodě x_0 existují obě jednostranné vlastní limity,
- ale jsou různé;
- rozdíl limit $f(x_0+) - f(x_0-)$ (někdy jen absolutní hodnotu tohoto rozdílu) nazýváme **skok**;

- **2. druhu** ve všech ostatních případech.

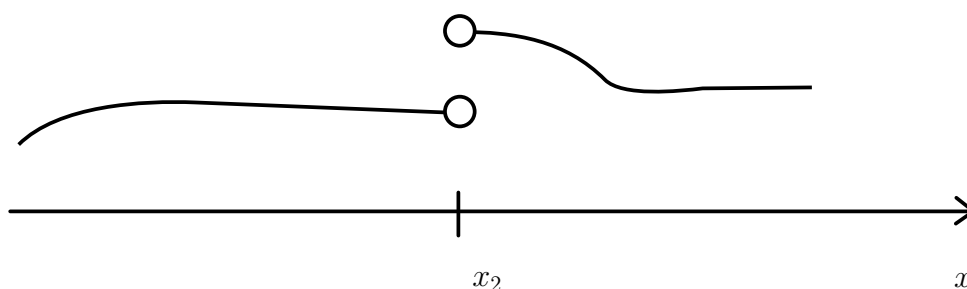
Poznámka 1.1.7. Odstranitelnou nespojitost lze odstranit tak, že funkci f v bodě x_0 dodefinujeme nebo předefinujeme tak, aby se funkční hodnota rovnala limitě funkce v bodě x_0 .

Úloha 1.1.8. Rozhodněte, jakou nespojitost má funkce f z úlohy 1.1.4 v bodech x_1 až x_9 .

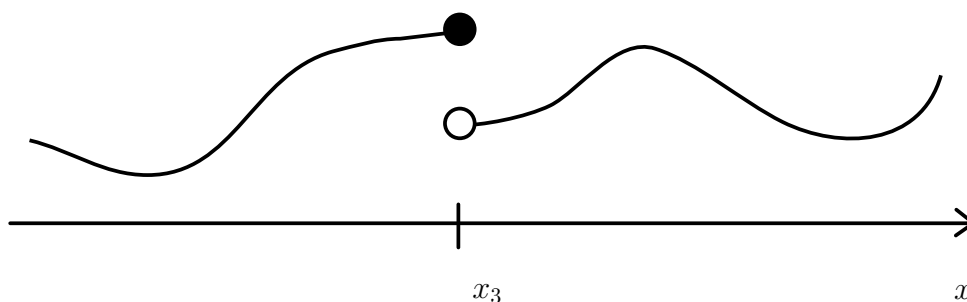
Úloha 1.1.9. Dokažte, že Dirichletova funkce je nespojitá pro každé $x \in \mathbb{R}$. Jaká je to nespojitost?



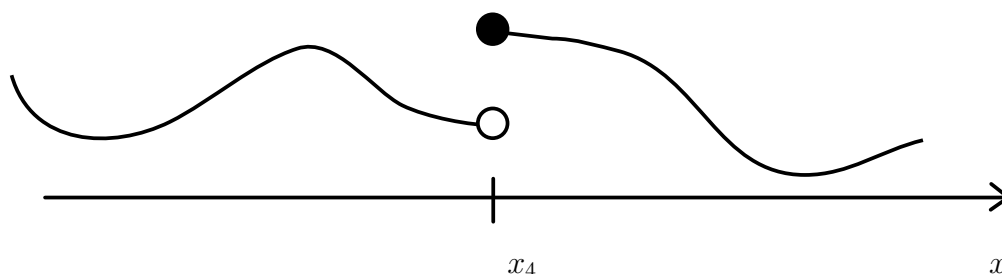
Obrázek 1.1: V bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu (DODEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).



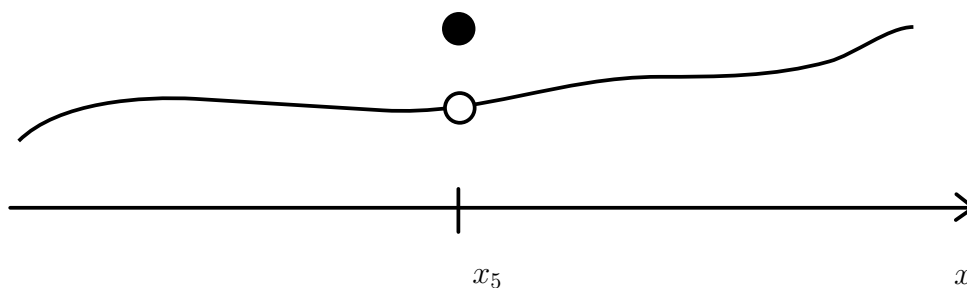
Obrázek 1.2: V bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menší než limita zprava, obě jsou vlastní (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



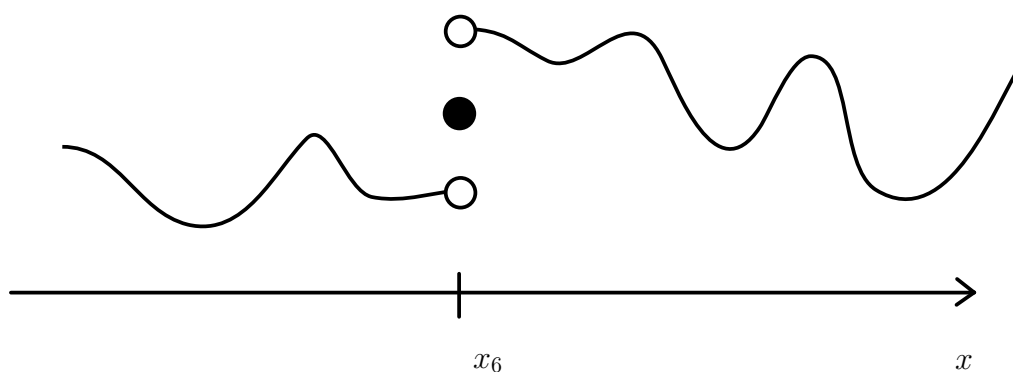
Obrázek 1.3: V bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



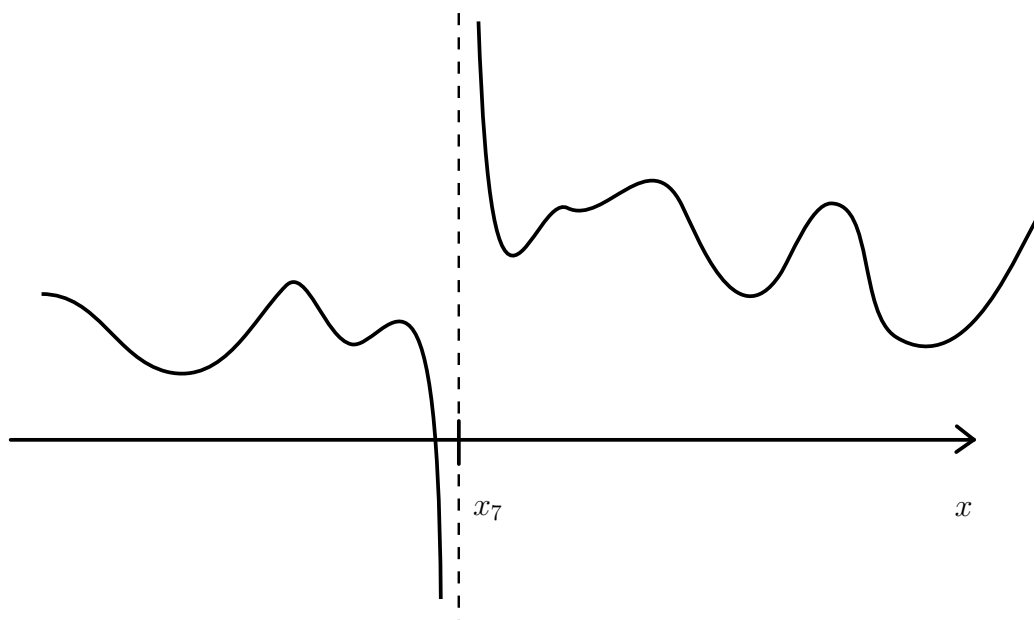
Obrázek 1.4: V bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



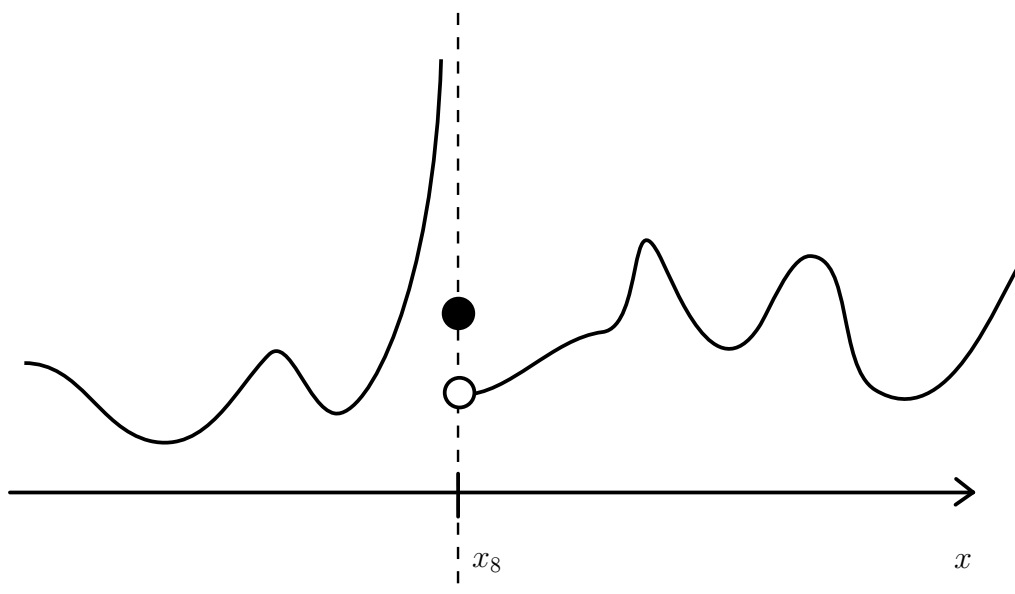
Obrázek 1.5: V bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota (PŘEDEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).



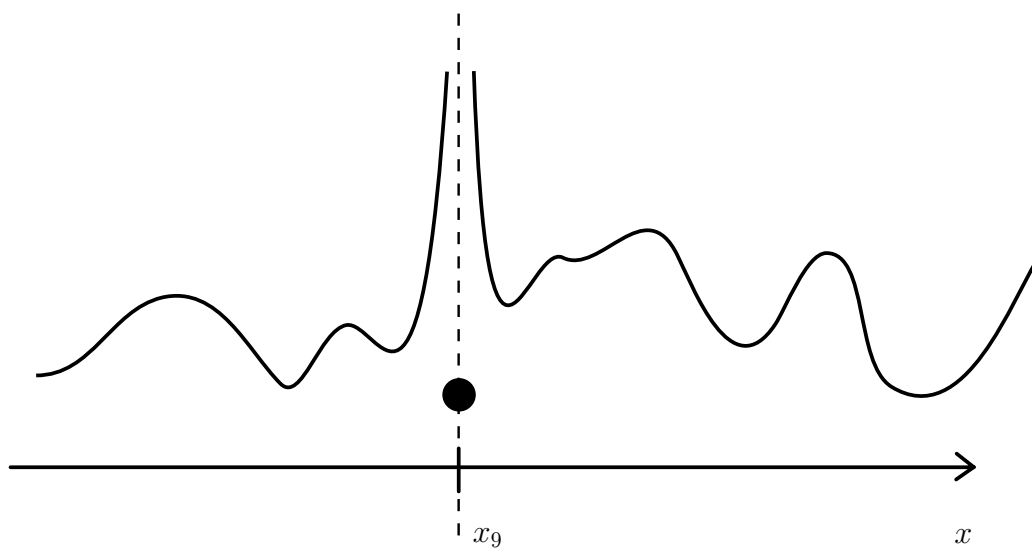
Obrázek 1.6: V bodě $x_6 \in D(f)$, limita zleva je menší než $f(x_6)$, limita zprava je větší než $f(x_6)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



Obrázek 1.7: V bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).



Obrázek 1.8: V bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).



Obrázek 1.9: V bodě $x_9 \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).

Dále uvádíme přehled základních vět o spojitosti v bodě x_0

V případě, že tento bod je hromadným bodem $D(f)$, plynou tyto věty z vět o limitách.

Věta 1.1.10. *Jsou-li funkce*

- f, g spojité v bodě x_0 a $c \in \mathbb{R}$,

pak jsou v tomto bodě spojitě též funkce

- $f + g$,
- $f - g$,
- $c \cdot f$,
- $f \cdot g$,
- $|f|$
- a pro $g(x_0) \neq 0$ i $\frac{f}{g}$.

(Pro součty, rozdíly a součiny platí tato vlastnost při libovolném konečném počtu členů resp. činitelů.)

Věta 1.1.11. *Je-li funkce φ spojitá v bodě x_0 , funkce f spojitá v bodě $a = \varphi(x_0)$, pak složená funkce $f \circ \varphi$ je spojitá v bodě x_0 .*

Věta 1.1.12. *Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 , pak existuje okolí $U(x_0)$ tak, že na $D(f) \cap U(x_0)$ je f omezená (je to tzv. lokální omezenost spojitě funkce).*

Věta 1.1.13. *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$, funkce f je spojitá v x_0 a $f(x_0) \neq 0$.*

Pak existuje okolí $U(x_0)$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in U(x_0) \cap D(f) \implies \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0).$$

Věta 1.1.14. *Nechť x_0 je oboustranný hromadný bod $D(f)$.*

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \iff$ je v něm spojitá zleva i zprava.

Věta 1.1.15 (Pravidlo ε - δ). *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$.*

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \iff$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in U(x_0, \delta) \cap D(f) \implies f(x) \in (f(x_0), \varepsilon).$$

Poznámka 1.1.16. • Tato vlastnost se též nazývá *Cauchyova definice spojitosti*; tedy takto lze definovat spojitost funkce v hromadném bodě $D(f)$ bez použití pojmu limita.

- V uvedeném pravidle ε - δ je ovšem pojem limity fakticky obsažen, viz pravidlo ε - δ pro limitu funkce.
- Podobně následující větu lze chápat jako Heineho definici spojitosti.

Věta 1.1.17. Necht x_0 je hromadným bodem $D(f)$.

Funkce f je spojitá v bodě $x_0 \iff$

$$\forall x_n, x_n \in D(f), x_n \rightarrow x_0 \text{ platí } f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

Věta 1.1.18. ZÁKLADNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE JSOU SPOJITÉ VE VŠECH BODECH, V NICHŽ JSOU DEFINOVÁNY.

Úloha 1.1.19. Pro které funkce naleznete důkaz věty 1.1.18 v příkladech předchozí kapitoly?

1.2 Funkce spojitě na množině

Spojitosť funkce na množině je globální vlastností funkce.

Definice 1.2.1. Říkáme, že funkce f **je spojitá na množině** $M \subset D(f) \iff$ je spojitá v každém bodě množiny M .

Zápis: $f \in C(M)$.

Říkáme, že funkce f **je spojitá** $\iff f$ je spojitá na $D(f)$.

Poznámka 1.2.2. Je třeba rozlišovat spojitost na $D(f)$ a spojitost na uzávěru $\overline{D(f)}$. Například funkce $f : y = 1/x$ je podle výše uvedené definice spojitá, neboť je spojitá na $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ale není spojitá na množině $\mathbb{R} = \overline{D(f)}$.

Někdy lze požadavek na spojitost funkce poněkud „oslabit“ a uvažovat funkce jen „po částech spojitě“ (viz například Newtonův vzorec v kapitole Riemannův určitý integrál).

Definice 1.2.3. Funkce f se nazývá **po částech spojitá** na $M \iff$

- je spojitá ve všech bodech množiny M
- s výjimkou konečného počtu bodů M ,
 - v nichž je definovaná
 - a má zde nespojitost 1. druhu

– nebo nespojitost odstranitelnou.

K tomu, abychom mohli spojitosti prakticky využívat, je třeba se přesvědčit, které z běžně používaných funkcí jsou spojité. Především i zde přirozeně platí:

Věta 1.2.4. VŠECHNY ZÁKLADNÍ ELEMENTÁRNÍ FUNKCE JSOU SPOJITÉ.

- Z vlastností spojitosti (věty 1.1.10, 1.1.11 a 1.1.18) plyne, že jsou spojité i všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí dostaneme konečným počtem aritmetických operací a skládání funkcí.
- Nejdůležitějším zvláštním případem spojitosti na M je spojitost na intervalu.

Přitom spojitost na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ znamená, že

- f je spojitá na (a, b) ,
- v levém krajním bodě a je spojitá zprava
- a v pravém krajním bodě b je spojitá zleva.

1.3 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

Věta 1.3.1 (1. Weierstrassova věta). *Je-li funkce spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je na tomto intervalu omezená.*

Důkaz (sporem). • Kdyby funkce f nebyla omezená na $\langle a, b \rangle$ (například shora), pak by ke každému $n \in \mathbb{N}$ existoval bod $x_n \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(x_n) > n$.

- Posloupnost $\{x_n\} \subset \langle a, b \rangle$ je omezená, takže podle Bolzano–Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{x'_n\}$ s limitou x_0 , pro niž též $f(x'_n) > n$.
- Proto $f(x_0)$ je (podle Heineho definice spojitosti a podle věty o limitě nerovnosti)
 - jednak $+\infty$
 - a jednak reálné číslo vzhledem ke spojitosti f v každém bodě $\langle a, b \rangle$, tedy i v x_0 ,

a to je spor.

□

Úloha 1.3.2. *Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 1. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení.*

Věta 1.3.3 (2. Weierstrassova věta). *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak na tomto intervalu nabývá své největší i nejmenší hodnoty.*

Tedy existují body $c_1, c_2 \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$f(c_1) = \max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x), \quad f(c_2) = \min_{x \in \langle a, b \rangle} f(x).$$

Důkaz (části o maximu). • Podle 1. Weierstrassovy věty je f shora omezená, takže existuje konečné

$$\sup_{x \in \langle a, b \rangle} f(x) = M.$$

- Stačí tedy dokázat, že existuje $c_1 \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(c_1) = M$.
- Kdyby takový bod c_1 neexistoval, byla by funkce

$$g(x) = M - f(x)$$

na $\langle a, b \rangle$ spojitá a kladná.

- Proto i funkce $\frac{1}{g(x)}$ by byla na $\langle a, b \rangle$ spojitá,
- tedy podle 1. Weierstrassovy věty omezená kladnou konstantou

$$L : \frac{1}{g(x)} < L \implies g(x) > \frac{1}{L} \implies f(x) < M - \frac{1}{L};$$

- dostali jsme spor se 2. vlastností suprema,
- takže $g(x)$ nemůže být stále kladná,
- tedy uvažovaný bod c_1 existuje.

□

Úloha 1.3.4. *Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 2. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení. (Například uvažte funkci $y = x$ na intervalu $(-1, 1)$.)*

Věta 1.3.5 (Bolzano-Cauchyova). *Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$ a platí-li*

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

pak existuje bod $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že $f(\xi) = 0$.

Důkaz (Bolzanovou metodou půlení intervalů). • Interval $\langle a, b \rangle$ rozpůlíme bodem c_1 .

- Pokud $f(c_1) = 0$, je $\xi = c_1$.
- Jinak označíme $\langle a_1, b_1 \rangle$ tu polovinu, kde $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.
- Interval $\langle a_1, b_1 \rangle$ rozpůlíme bodem $c_2 \dots$
- Buď $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\xi = c_n$
- nebo dostáváme posloupnost vložených intervalů, které mají podle věty o vložených intervalech jediný společný bod ξ ; o něm se dokáže $f(\xi) = 0$.
 - Nemůže být $f(\xi) > 0$, neboť by existovalo okolí $U(\xi)$ tak, že $\forall x \in U(\xi)$ by bylo $f(x) > 0$
 - a to je spor (pro dosti velké n by bylo $\langle a_n, b_n \rangle \subset U(\xi)$).
 - Stejně tak nemůže platit, že $f(\xi) < 0$, proto $f(\xi) = 0$.

□

Této věty se užívá např. při řešení rovnic k důkazu existence řešení.

Úloha 1.3.6. *Dokažte, že rovnice $x + \sin(x - 1) = 0$ má alespoň jeden kořen.*

Řešení. Uvažujeme například $a = -2$, $b = 2$ (najděte menší interval!) □

Věta 1.3.7 (věta o mezihodnotě). *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b \rangle$,*

$$f(a) \neq f(b).$$

Pak funkce f nabývá každé hodnoty q mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Princip důkazu. Bolzano-Cauchyovu větu použijeme na funkci

$$g(x) = f(x) - q.$$

□

Důsledek 1.3.8. *Je-li funkce f spojitá na intervalu J , pak $f(J)$ je interval nebo jednobodová množina.*

Věta 1.3.9 (vztah mezi monotónností a prostotou u funkcí spojitých na intervalu). *Je-li funkce f spojitá na intervalu J , pak f je prostá právě tehdy, když je monotónní.*

Princip důkazu. • Vztah „ryze monotónní“ $\Rightarrow$ „prostá“ platí zřejmě i pro nespojitě funkce.

- Vztah „prostá“ $\Rightarrow$ „ryze monotónní“ se dokáže sporem.
 - Kdyby (prostá) funkce nebyla ryze monotónní, existovaly by tři body c_1, c_2, c_3 tak, že $f(c_2)$ by bylo větší (nebo menší) než $f(c_1)$ a $f(c_3)$.

- Z věty o mezihodnotě plyne existence bodů $x_1 \in (c_1, c_2)$, $x_2 \in (c_2, c_3)$ tak, že $f(x_1) = f(x_2)$,
- a to je spor s vlastností prostoty.

□

Úloha 1.3.10. *Sestrojte náčrtek k poslední části důkazu předchozí věty.*

Věta 1.3.11 (o spojitosti inverzní funkce). *Je-li funkce f na intervalu J spojitá a prostá, pak inverzní funkce f je též spojitá.*

Důkaz. Používá se ryzí monotónnost funkce f a důsledek věty o mezihodnotě. □

1.4 Stejnomořná spojitost

Jako jsme vlastnost spojitosti „zmírnili“ spojitostí po částech, můžeme tuto vlastnost zase „zprísňovat“.

Definice 1.4.1. *Funkce f se nazývá **stejnomořně spojitá** na množině $M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že pro každé dva body $x', x'' \in M$ platí:*

$$|x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Předně uvážíme, že stejnomořná spojitost má smysl jen na množině (zejména na intervalu), neexistuje nějaká stejnomořná spojitost v bodě. Je to tedy vlastnost globální.

V definici si dále uvědomíme, že δ závisí pouze na ε , tj. nezávisí na poloze bodů x', x'' v M ; u spojitosti na množině M obecně δ závisí také na bodu x_0 , tedy i když je funkce spojitá v každém bodě množiny M , nelze obecně k danému $\varepsilon > 0$ najít takové $\delta > 0$, které by bylo stejné, ať zvolíme x_0 kdekoli na M .

Například u funkce $y = \tan x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, když volíme x_0 „stále blíže“ k $\frac{\pi}{2}$, pak pro dané ε (třeba = 1) musíme volit δ stále menší a menší, aby pro $x \in U(x_0, \delta)$ zůstaly funkční hodnoty $f(x)$ v ε -okolí hodnoty $f(x_0)$.

Stejnomořnou spojitost lze charakterizovat také ještě pomocí tzv. *oscilace funkce*.

Definice 1.4.2. *Nechť funkce f je definovaná a omezená na množině M . Číslo*

$$\omega = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x)$$

*se nazývá **oscilace funkce f** na množině M .*

Je-li funkce spojitá na uzavřeném intervalu, pak místo rozdílu suprema a infima můžeme vzít rozdíl maxima a minima.

Věta 1.4.3 (o oscilaci stejnoměrně spojitě funkce). *Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu J , právě když $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že na každém podintervalu $I \subset J$ délky menší než δ je oscilace funkce menší než ε .*

Vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti řeší následující dvě věty.

Věta 1.4.4 (vztah stejnoměrné spojitosti a spojitosti na množině M). *Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na M , pak je na M spojitá.*

Princip důkazu. Ze stejnoměrné spojitosti plyne spojitost v libovolném bodě x_0 , neboť $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in D(f)$ platí:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

□

Věta 1.4.5 (Cantorova věta). *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.*

Důkaz se provádí užitím Borelovy věty o pokrytí: Je-li uzavřený interval $\langle a, b \rangle$ pokryt systémem S_ν otevřených intervalů, pak existuje konečný podsystem $S_k \subset S_\nu$, který také pokrývá interval $\langle a, b \rangle$.

— * —