Kapitola 1

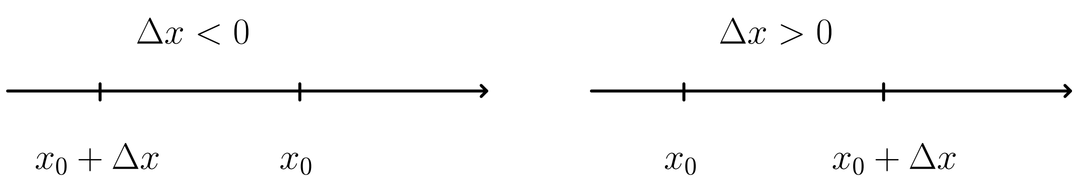
Derivace funkce

Derivace funkce patří mezi nejpoužívanější pojmy matematické analýzy. Derivace vyjadřuje rychlost změny a stojí proto i v základu četného praktického použití matematické analýzy.

1.1 Pojem derivace funkce

Mějme funkci f, která je definována v nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0.

- Postoupíme-li z bodu x_0 o nějaké Δx (Δx je *přírůstek nezávisle proměnné*), dostaneme novou hodnotu nezávisle proměnné $x_0 + \Delta x$ $(\in U(x_0))$;
  - pro $\Delta x < 0$ je tato hodnota vlevo
  - a pro $\Delta x > 0$ je vpravo od x_0.

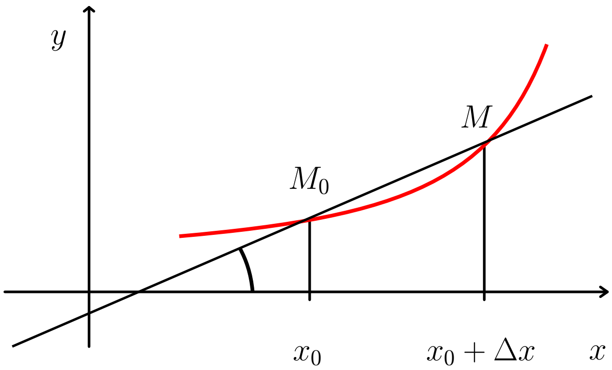


Obrázek 1.1: Přírůstky nezávisle proměnné.

- Funkční hodnota se přitom změní z hodnoty $f(x_0)$ na hodnotu $f(x_0+\Delta x)$ o rozdíl $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
  - Δy je tzv. *přírůstek funkce.*
  - Podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ je tzv. *diferenciální podíl*;
  - jeho geometrickým významem je směrnice sečny ke grafu funkce,

– tj. $\operatorname{tg}\alpha$, kde α je úhel, který svírá sečna M_0M s osou x.

Úloha 1.1.1. *Doplňte do obrázku 1.2 označení: α, Δx, a Δy.*



Obrázek 1.2: Sečna grafu.

Pro spojitou funkci f platí

$$\Delta x \to 0 \implies \Delta y \to 0,$$

takže pro $\Delta x \to 0$ je diferenciální podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ výraz typu $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Definice 1.1.2. *Říkáme, že* ***funkce*** f ***má v bodě*** x_0 ***derivaci****, právě když je* f *definována na nějakém okolí bodu* x_0 *a existuje (vlastní) limita*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tuto limitu nazýváme ***derivace funkce*** f ***v bodě*** x_0 *a značíme ji* $f'(x_0)$.

Derivace v bodě je tedy nějaké číslo.

Geometrický význam derivace funkce v bodě:

$f'(x_0)$ znamená směrnici tečny grafu funkce v bodě M_0, tj. $\operatorname{tg}\varphi$, kde φ je úhel který svírá tečna v bodě M_0 s osou x.

Úloha 1.1.3. *Načrtněte dle obrázku 1.2 obrázek, v němž vyznačíte geometrický význam derivace funkce v bodě.*

Fyzikální význam derivace v bodě:

Je-li zákon dráhy $s = s(t)$, pak diferenciální podíl $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ znamená průměrnou rychlost a $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$ znamená okamžitou rychlost.

Úloha 1.1.4. *Podle definice vypočtěte derivaci funkce* $y = x^2$ *v bodě* $x_0 = 3$.

Jestliže v definici derivace nahradíme limitu jednostrannou limitou, dostaneme definice jednostranných derivací (derivace zleva, zprava), které označujeme $f'(x_0-)$ a $f'(x_0+)$.

Je-li $f'(x_0) = k$, pak existují obě jednostranné derivace a jsou rovny číslu k; také naopak, existují-li obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a rovnají se témuž číslu k, pak existuje derivace funkce f v bodě x_0 a je rovna k, jak plyne z vět o limitách.

Úloha 1.1.5. *Vypočtěte obě jednostranné derivace funkce* $f : y = |x|$ *v bodě* $x_0 = 0$.

Z výpočtu plyne, že funkce $y = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci.

Jestliže limita diferenciálního podílu $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ je pro $\Delta x \to 0$ rovna $+\infty$ nebo $-\infty$, pak mluvíme o nevlastních derivacích (též zleva, zprava).

Výrok „existuje derivace“ však bude vždy znamenat „existuje vlastní derivace“.

Úloha 1.1.6. *Je dána funkce* $f : y = \sqrt{1 - x^2}$. *Ověřte, že* $f'(1-) = +\infty$.

Úloha 1.1.7. *Určete derivaci funkce* $y = x^2$ *v bodě* x.

Derivace jako funkce

Definice 1.1.8. *Má-li funkce* f *derivaci v každém bodě* x *nějaké množiny* M, *říkáme, že* ***má derivaci na množině*** M; *značíme ji* f' *nebo* $f'(x)$.

- Vidíme, že derivace funkce na množině M je opět funkce.
- Například dle úlohy 1.1.7 derivací funkce $y = x^2$ na $\mathbb{R}$ je funkce $y = 2x$.
- Chceme-li pak zjistit derivaci $f'(x_0)$ v nějakém bodě x_0, stačí do $f'(x)$ dosadit x_0 za x.
- Například pro f z úlohy 1.1.7 je $f'(3) = (2x)_{x=3} = 6$ (srovnej s úlohou 1.1.4).

Přehled označení derivací:

v bodě:	jako funkce:	původ označení:
$f'(x_0)$	$y',\ f',\ f'(x)$	Lagrange
$\dfrac{\mathrm{d}\,f(x_0)}{\mathrm{d}\,x},\ \left(\dfrac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}\,x}\right)_{x=x_0}$	$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x},\ \dfrac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}\,x},\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}\big(f(x)\big)$	Leibniz
$\mathrm{D}\,f(x_0)$	$\mathrm{D}\,y,\ \mathrm{D}\,f(x)$	Cauchy

- Každé z těchto označení má své výhody.
- Například v Leibnizově je dobře vidět, podle které proměnné se derivuje, takže se dobře uplatňuje například při manipulacích s funkcemi složenými a inverzními;
- Cauchyovo označování je vhodné například při řešení diferenciálních rovnic operátorovou metodou;
- operaci definovanou operátorem D nazýváme zpravidla *derivování* (podle dané proměnné).
- Chceme-li v Lagrangeově označení zdůraznit proměnnou, podle níž se derivuje, napíšeme tuto proměnnou jako index, například f'_u.

Věta 1.1.9 (vztah mezi derivací a spojitostí)**.** *Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v něm spojitá.*

Princip důkazu. Dokážeme, že platí $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\Big)=0.$ □

Úloha 1.1.10. *Dle definice derivace stanovte derivace funkce $y = x^n$ pro $n\in\mathbb{N}$.*

Úloha 1.1.11. *Dle definice derivace stanovte derivace funkce $y=\sin x$ [pozor na to, jak se přitom využije spojitosti funkce kosinus].*

1.2 Vlastnosti derivací

Věta 1.2.1 (základní vlastnosti derivací)**.** *Nechť funkce $u=f(x)$, $v=g(x)$ mají na množině M derivace $u'=f'(x)$, $v'=g'(x)$ a $c\in\mathbb{R}$.*

Pak funkce $c\cdot f,\ f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ a pro $g(x)\neq 0$ i $\dfrac{f}{g}$ mají na M derivace a platí:

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,

2. $(u+v)' = u' + v', \quad (u-v)' = u' - v'$,

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Důkaz. Provádí se podle definice derivace, u součinu a podílu se přidá a odečte určitá pomocná funkce, využívá se tu též spojitosti. □

Pravidla pro sčítání a pro násobení lze matematickou indukcí rozšířit na n členů (činitelů), $n \in \mathbb{N}$. Pro násobení tří funkcí tak například máme

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Věta 1.2.2 (derivace složené funkce)**.** *Nechť existuje složená funkce $f \circ \varphi$ a nechť*

1) funkce $u = \varphi(x)$ má v bodě x derivaci $\varphi'(x)$,

2) funkce $y = f(u)$ má v odpovídajícím bodě u $(= \varphi(x))$ derivaci $f'(u)$.

Pak funkce $f \circ \varphi$ má v bodě x derivaci

$$(f \circ \varphi)'(x) = (f'(u) \cdot \varphi'(x) =)(f \circ \varphi)'_u(x) \cdot \varphi'(x).$$

Úloha 1.2.3. *Užitím věty o derivaci složené funkce máme najít derivaci funkce $y = \sin^2 x$.*

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci složené funkce tvar, jako úprava zlomků: $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,u}\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x}$.

Věta 1.2.4 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť f je ryze monotónní na intervalu J a má tu derivaci f'. Pak inverzní funkce f^{-1} má derivaci na $f(J)$ a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Důkaz. U obou vět se provádí dle definice derivace a používá se faktu, že

$$\Delta y \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta x \to 0.$$

□

Úloha 1.2.5. *Užitím předchozí věty zjistěte derivaci funkce $y = \arcsin x$.*

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci inverzní funkce tvar, jako úprava zlomku:

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,y}}.$$

1.3 Derivace elementárních funkcí

Věta 1.3.1 (přehled vzorců pro derivace elementárních funkcí)**.**

- $(c)' = 0$ *(derivace konstanty);*
- $(x^m)' = mx^{m-1}$ *(platí pro libovolné $m \neq 0$); zvláště* $(x)' = 1$*;*
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$*; zejména* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$*;*
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$*; zejména* $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$*;*
- $(\sin x)' = \cos x,\quad (\cos x)' = -\sin x;$
- $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x};\quad (\operatorname{cotg} x)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x};$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};\quad (\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}};$
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2};\quad (\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{-1}{1 + x^2};$
- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;\quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$
- $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x};\quad (\operatorname{coth} x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x};$
- $(\operatorname{argsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};\quad (\operatorname{argth} x)' = \dfrac{1}{1 - x^2}.$

Důkaz. Provádí se užitím definice derivace (někde i s užitím speciálních limit), vlastností derivací, vět o derivaci složené funkce a inverzní funkce. □

Úloha 1.3.2. *Určete derivaci funkce* $y = (\cos x)^{\sin x}$ *pro x v 1. kvadrantu.*