

## Spojitosť funkce — závěr Derivace funkce

Jiří Fišer

20. listopadu 2009

# Věta o mezhodnotě

## Věta

*Nechť funkce  $f$  je spojitá na  $\langle a, b \rangle$ ,*

$$f(a) \neq f(b).$$

*Pak funkce  $f$  nabývá každé hodnoty  $q$  mezi  $f(a)$  a  $f(b)$ .*

## Princip důkazu

Bolzano-Cauchyovu větu použijeme na funkci

$$g(x) = f(x) - q.$$

## Důsledek

*Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $J$ , pak  $f(J)$  je interval nebo jednobodová množina.*

# Vztah mezi monotónností a prostotou u funkcí spojitých na intervalu

## Věta

*Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $J$ , pak  $f$  je prostá právě tehdy, když je monotónní.*

## Princip důkazu

- Vztah „ryze monotónní“  $\Rightarrow$  „prostá“ platí zřejmě i pro nespojité funkce.
- Vztah „prostá“  $\Rightarrow$  „ryze monotónní“ se dokáže sporem.
  - ▶ Kdyby (prostá) funkce nebyla ryze monotónní, existovaly by tři body  $c_1 < c_2 < c_3$  tak, že  $f(c_2)$  by bylo větší (nebo menší) než  $f(c_1)$  a  $f(c_3)$ .
  - ▶ Z věty o mezihodnotě ovšem plyne existence bodů  $x_1 \in (c_1, c_2)$ ,  $x_2 \in (c_2, c_3)$  tak, že  $f(x_1) = f(x_2)$ ,
  - ▶ a to je spor s vlastností prostoty.

# O spojitosti inverzní funkce

## Věta

*Je-li funkce  $f$  na intervalu  $J$  spojitá a prostá, pak inverzní funkce  $f$  je též spojitá.*

## Důkaz.

Používá se ryzí monotónnost funkce  $f$  a důsledek věty o mezihodnotě.



# Stejněměrná spojitost

Jako jsme vlastnost spojitosti „zmírnili“ spojitostí po částech, můžeme tuto vlastnost zase „zpřísnovat“.

## Definice

*Funkce  $f$  se nazývá **stejněměrně spojitá** na množině  $M$   $\iff$*

*$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tak, že pro každé dva body  $x', x'' \in M$  platí:*

$$|x' - x''| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

# Stejněměrná spojitost

- stejněměrná spojitost má smysl jen na množině (zejména na intervalu),
- neexistuje nějaká stejněměrná spojitost v bodě.
- Je to tedy vlastnost globální.

# Stejnoměrná spojitost

- $\delta$  závisí pouze na  $\varepsilon$ ,
- nezávisí na poloze bodů  $x'$ ,  $x''$  v  $M$ ;
- u spojitosti na množině  $M$  obecně  $\delta$  závisí také na bodu  $x_0$ ,
- tedy i když je funkce spojitá v každém bodě množiny  $M$ , nelze obecně k danému  $\varepsilon > 0$  najít takové  $\delta > 0$ , které by bylo stejné, ať zvolíme  $x_0$  kdekoli na  $M$ .
- **Například** u funkce  $y = \operatorname{tg} x$  na  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , když volíme  $x_0$  „stále blíže“ k  $\frac{\pi}{2}$ , pak pro dané  $\varepsilon$  (třeba = 1) musíme volit  $\delta$  stále menší a menší, aby pro  $x \in U(x_0, \delta)$  zůstaly funkční hodnoty  $f(x)$  v  $\varepsilon$ -okolí hodnoty  $f(x_0)$ .

# Vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti

**Věta (vztah stejnoměrné spojitosti a spojitosti na množině  $M$ )**

*Je-li funkce  $f$  stejnoměrně spojitá na  $M$ , pak je na  $M$  spojitá.*

**Princip důkazu.**

Ze stejnoměrné spojitosti plyne spojitost v libovolném bodě  $x_0$ , neboť

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tak, že  $\forall x \in D(f)$  platí:

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



# Vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti

## Věta (Cantorova věta)

*Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.*

# Derivace funkce

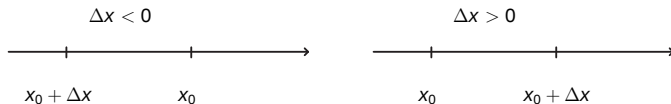
# Derivace funkce

- Patří mezi nejpoužívanější pojmy matematické analýzy.
- Derivace vyjadřuje rychlost změny a stojí proto i v základu četného praktického použití matematické analýzy.

# Pojem derivace funkce

Mějme funkci  $f$ , která je definována v nějakém okolí  $U(x_0)$  bodu  $x_0$ .

- Postoupíme-li z bodu  $x_0$  o nějaké  $\Delta x$
- ( $\Delta x$  je *přírůstek nezávisle proměnné*),
- dostaneme novou hodnotu nezávisle proměnné  $x_0 + \Delta x$  ( $\in U(x_0)$ );
  - ▶ pro  $\Delta x < 0$  je tato hodnota vlevo
  - ▶ a pro  $\Delta x > 0$  je vpravo od  $x_0$ .



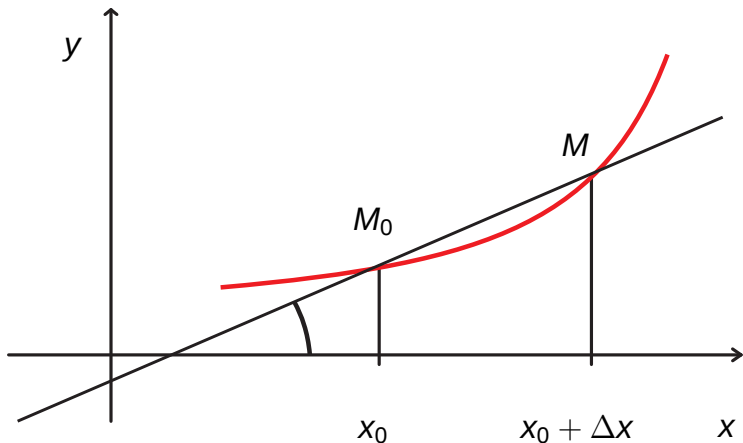
**Obrázek:** Přírůstky nezávisle proměnné.

# Pojem derivace funkce

- Funkční hodnota se přitom změní z hodnoty  $f(x_0)$  na hodnotu  $f(x_0 + \Delta x)$  o rozdíl  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .
  - ▶  $\Delta y$  je tzv. *přírůstek funkce*.
  - ▶ Podíl  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  je tzv. *diferenciální podíl*;
  - ▶ jeho geometrickým významem je směrnice sečny ke grafu funkce,
  - ▶ tj.  $\operatorname{tg} \alpha$ , kde  $\alpha$  je úhel, který svírá sečna  $M_0M$  s osou  $x$ .

# Pojem derivace funkce

Doplňte do obrázku označení:  $\alpha$ ,  $\Delta x$ , a  $\Delta y$ .



Obrázek: Sečna grafu.

Pro spojitou funkci  $f$  platí

$$\Delta x \rightarrow 0 \implies \Delta y \rightarrow 0,$$

takže pro  $\Delta x \rightarrow 0$  je diferenciální podíl  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  výraz typu  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

## Definice

Říkáme, že **funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  derivaci**, právě když je  $f$  definována na nějakém okolí bodu  $x_0$  a existuje (vlastní) limita

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tuto limitu nazýváme **derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$**  a značíme ji  $f'(x_0)$ .

Derivace v bodě je tedy nějaké číslo.

## Geometrický význam derivace funkce v bodě

$f'(x_0)$  znamená směrnici tečny grafu funkce v bodě  $M_0$ , tj.  $\operatorname{tg} \varphi$ , kde  $\varphi$  je úhel který svírá tečna v bodě  $M_0$  s osou  $x$ .

## Fyzikální význam derivace v bodě

Je-li zákon dráhy  $s = s(t)$ , pak diferenciální podíl  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  znamená průměrnou rychlost a  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$  znamená okamžitou rychlost.

## Nevlastní derivace

Jestliže limita diferenciálního podílu  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  je pro  $\Delta x \rightarrow 0$  rovna  $+\infty$  nebo  $-\infty$ , pak mluvíme o nevlastních derivacích (též zleva, zprava).

Výrok „existuje derivace“ však bude vždy znamenat „existuje vlastní derivace“.

# Derivace jako funkce

## Definice

Má-li funkce  $f$  derivaci v každém bodě  $x$  nějaké množiny  $M$ , říkáme, že **má derivaci na množině**  $M$ ; značíme ji  $f'$  nebo  $f'(x)$ .

- Derivace funkce na množině  $M$  je opět funkce.
- Například derivací funkce  $y = x^2$  na  $\mathbb{R}$  je funkce  $y = 2x$ .
- Chceme-li pak zjistit derivaci  $f'(x_0)$  v nějakém bodě  $x_0$ , stačí do  $f'(x)$  dosadit  $x_0$  za  $x$ .

# Přehled označení derivací

| v bodě:                                                     | jako funkce:                                          | původ označení: |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-----------------|
| $f'(x_0)$                                                   | $y', f', f'(x)$                                       | Lagrange        |
| $\frac{df(x_0)}{dx}, \left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$ | $\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}, \frac{d}{dx}(f(x))$ | Leibniz         |
| $Df(x_0)$                                                   | $Dy, Df(x)$                                           | Cauchy          |

- Každé z těchto označení má své výhody.
- V Leibnizově je dobře vidět, podle které proměnné se derivuje, což je vhodné pro manipulace s funkcemi složenými a inverzními;
- Chceme-li v Lagrangeově označení zdůraznit proměnnou, podle níž se derivuje, napíšeme  $f'_u$ .

## Věta (vztah mezi derivací a spojitostí)

*Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci, je v něm spojitá.*

## Princip důkazu.

Dokážeme, že platí  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$ .



# Vlastnosti derivací

## Věta (základní vlastnosti derivací)

*Nechť funkce  $u = f(x)$ ,  $v = g(x)$  mají na množině  $M$  derivace  $u' = f'(x)$ ,  $v' = g'(x)$  a  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Pak funkce  $c \cdot f$ ,  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  a pro  $g(x) \neq 0$  i  $\frac{f}{g}$  mají na  $M$  derivace a platí:*

- ❶  $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ ,
- ❷  $(u + v)' = u' + v'$ ,  $(u - v)' = u' - v'$ ,
- ❸  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ ,
- ❹  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ .

## Důkaz.

Provádí se podle definice derivace, u součinu a podílu se přidá a odečte určitá pomocná funkce, využívá se tu též spojitosti. □

# Derivace složené funkce

## Věta

Nechť existuje složená funkce  $f \circ \varphi$  a necht'

- 1) funkce  $u = \varphi(x)$  má v bodě  $x$  derivaci  $\varphi'(x)$ ,
- 2) funkce  $y = f(u)$  má v odpovídajícím bodě  $u (= \varphi(x))$  derivaci  $f'(u)$ .

Pak funkce  $f \circ \varphi$  má v bodě  $x$  derivaci

$$(f \circ \varphi)'(x) = \left( f'(u) \cdot \varphi'(x) \right) = (f \circ \varphi)'_u(x) \cdot \varphi'(x).$$

Při označení podle Leibnize:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

# Derivace inverzní funkce

## Věta

*Nechť  $f$  je ryze monotónní na intervalu  $J$  a má tu derivaci  $f'$ . Pak inverzní funkce  $f^{-1}$  má derivaci na  $f(J)$  a platí*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Při označení podle Leibnize:  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$

## Úloha

Užitím předchozí věty zjistěte derivaci funkce  $y = \arcsin x$ .

## Řešení.

- Pomocné vztahy:

$$y = \arcsin x, \sin y = x, \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

- $(\arcsin x)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$

- $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy} \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$



# Přehled vzorců pro derivace elementárních funkcí

- $(c)' = 0$  (derivace konstanty);
- $(x^m)' = mx^{m-1}$  (platí pro libovolné  $m \neq 0$ ); zvláště  $(x)' = 1$ ;
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ; zejména  $(e^x)' = e^x$ ;
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ; zejména  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ;
- $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ ;
- $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;  $(\operatorname{cotg} x)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$ ;

# Přehled vzorců pro derivace elementárních funkcí

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$

- $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2};$

- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$

- $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (\operatorname{coth} x)' = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x};$

- $(\operatorname{argsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}; \quad (\operatorname{argth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$

## Úloha

Určete derivaci funkce  $y = (\cos x)^{\sin x}$  pro  $x$  v 1. kvadrantu.

## Řešení.

$$y = (\cos x)^{\sin x} = e^{\ln(\cos x)^{\sin x}} = e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cos x)^{\sin x} = \frac{d}{dx} e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)} =$$

$$= e^{\sin x \cdot \ln(\cos x)} \left[ \cos x \cdot \ln(\cos x) + \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} (-\sin x) \right]$$



## Diferenciál funkce

Řešíme problém: funkci  $f$  v okolí bodu  $x_0$  aproximovat lineární funkcí  $g$ , tj. nalézt takovou lineární funkci  $g$ , aby platila podmínka

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

Označme  $x = x_0 + h$ ; zřejmě  $g(x) = f(x_0) + ah$ , takže čitatel posledního zlomku lze zapsat jako

$$\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ah.$$

Výše uvedenou podmínku lze tak zapsat jako

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

Z definice funkce  $\omega(h)$  plyne, že přírůstek funkce  $\Delta f(x_0)$  lze vyjádřit ve tvaru

$$\Delta f(x_0) (= f(x_0 + h) - f(x_0)) = ah + \omega(h).$$

## Definice

Lineární část přírůstku funkce, tedy funkci  $ah$ , nazýváme **diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x_0$** , označujeme jej  $df(x_0)$  a funkci, která má diferenciál v bodě  $x_0$ , nazýváme **diferencovatelnou v bodě  $x_0$** . Funkci, která má diferenciál v každém bodě množiny  $M$ , nazýváme **diferencovatelnou na množině  $M$** .

## Věta (existence a jednoznačnost diferenciálu)

*Funkce  $f$  je diferencovatelná v bodě  $x_0 \iff$  má v bodě  $x_0$  vlastní derivaci. Diferenciál  $df(x_0)$  funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je pak jednoznačně určen vzorcem*

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot h,$$

*kde  $h \in \mathbb{R}$  je přírůstek nezávisle proměnné.*

- Předchozí věta tedy říká, že výroky
  - ▶ „ $f$  má v bodě  $x_0$  (vlastní) derivaci“
  - ▶ a „ $f$  je v bodě  $x_0$  diferencovatelná“
 jsou ekvivalentní, znamenají totéž.
- U funkcí více proměnných je tomu jinak.
- Místo  $h$  používáme pro přírůstek nezávisle proměnné též označení  $\Delta x$  nebo  $dx$  a název *diferenciál nezávisle proměnné*.
- Je to motivováno skutečností, že diferenciál lineární funkce  $y = x$  je  $dx = 1 \cdot h (= 1 \cdot \Delta x)$ .
- Diferenciál funkce pak též zapisujeme  $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$ .
- Výše uvedené poznatky nám umožňují definovat diferenciál funkce přímo uvedeným vzorcem.

## Definice

**Diferenciálem funkce  $f$  v bodě  $x_0$**  nazýváme výraz

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx,$$

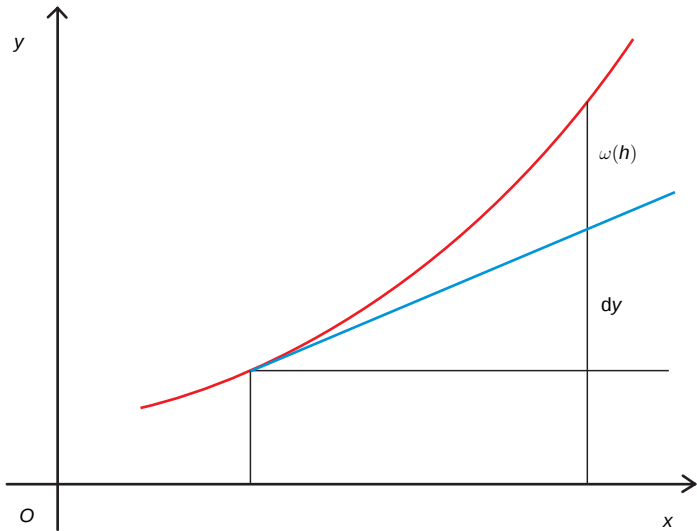
kde  $dx (= \Delta x)$  je konstantní přírůstek (diferenciál) nezávisle proměnné.

**Diferenciálem funkce  $f$  na množině  $M$**  nazýváme funkci

$$dy = f'(x) \cdot dx,$$

kde  $x \in M$ .

- Ze vztahu  $dy = f'(x) \cdot dx$  vidíme,
- že Leibnizův symbol  $\frac{dy}{dx}$  pro derivaci funkce
- je skutečným zlomkem — podílem diferenciálu funkce a diferenciálu nezávisle proměnné.
- Také vzorce pro derivaci složené funkce a inverzní funkce lze chápat jako operace se skutečnými zlomky.



**Obrázek:** Geometrický význam diferenciálu funkce.

# Užití diferenciálu

Užití diferenciálu v *přibližných výpočtech* je založeno na přibližné rovnosti

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

## Úloha

Pomocí diferenciálu funkce vypočtete přibližnou hodnotu  $\sqrt{0,982}$ .

## Řešení.

$$\sqrt{0,982} = f(0,982) = f(1 - 0,018) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

$$\sqrt{0,982} \approx f(1) + f'(1) \cdot (-0,018) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(-0,018) = 0,991.$$



Užití diferenciálu *při odhadu chyb* je založeno na tom, že když

- $h$  (tedy  $dx$ ) položíme rovno absolutní chybě měření,
- udává  $df$  přibližnou hodnotu absolutní chyby vypočtené hodnoty  $y = f(x)$ .

## Úloha

*Počítáme objem koule, jejíž průměr  $x$  jsme změřili s chybou  $\delta x$ . Určete chybu výsledku.*

## Řešení.

Vzorec pro objem koule o poloměru  $r$ , resp. průměru  $x$ :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi x^3.$$

Pokud  $x$  měříme s chybou  $\delta x$ , dostaneme při označení  $\hat{x} = x + \delta x$ :

$$\hat{V} = \frac{1}{6}\pi \hat{x}^3 = \frac{1}{6}\pi (x + \delta x)^3 \approx \frac{1}{6}\pi x^3 + \left[\frac{1}{6}\pi x^3\right]' \delta x = V + \left[\frac{1}{2}\pi x^2\right] \delta x = V + \delta V.$$

Přibližná chyba výsledku je tedy  $\delta V = \frac{1}{2}\pi x^2 \delta x$ , přičemž přibližná relativní chyba výsledku je

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2 \delta x}{\frac{1}{6}\pi x^3} = 3 \frac{\delta x}{x},$$

a tedy relativní chyba výsledku je rovna trojnásobku relativní chyby měření průměru.



# Derivace vyšších řádů

Funkce  $y = \sin x$  má derivaci  $y' = \cos x$ . Toto je opět funkce, která má derivaci a platí  $(y')' = -\sin x$ .

## Definice

Má-li funkce  $f'$  v bodě  $x$  (na množině  $M$ ) derivaci  $(f')'$ , označíme tuto derivaci  $f''$  a nazveme **derivace druhého řádu (druhá derivace)** funkce  $f$ .

Podobně **derivaci  $n$ -tého řádu ( $n$ -tou derivaci)**  $f^{(n)}$  definujeme vztahem

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

Označení podle Leibnize:  $\frac{d^2f}{dx^2}$  (čti „d dvě  $f$  podle  $dx$  na druhou“),

$$\frac{d^2f}{dy^2}, \frac{d^2}{dx^2}(f(x)), \frac{d^nf}{dx^n}, \left(\frac{d^nf}{dx^n}\right)_{x=x_0}, \text{ apod.}$$

Označení podle Cauchyho:  $D^2f$ ,  $D^ny$ , apod.

## Úloha

Určete všechny derivace funkce  $y = 3x^2 - 2x - 1$ .

## Úloha

Určete 2. derivaci funkce  $y = \sin x$  v bodě  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

# Některé vzorce pro $n$ -tou derivaci elementárních funkcí

1) Funkce  $e^x : \forall n \in \mathbb{N}$  je  $(e^x)^{(n)} = e^x$ ;

podobně pro funkci  $a^x$  máme  $(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n$ .

2) Funkce  $\sin x, \cos x$ .

Platí:  $f^{(n+4)} = f^{(n)}$ , takže takto lze zjistit derivaci libovolného řádu.

Platí též vzorec

$$(\sin x)^{(n)} = \sin \left( x + n \frac{\pi}{2} \right).$$

3) Funkce  $\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ . Zde  $f^{(n+2)} = f^{(n)}$ .

4) Funkce  $x^n, n \in \mathbb{N}$ .

$$(x^n)^{(n)} = n!, \quad (x^n)^{(m)} = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad m > n.$$

## ***Leibnizovo pravidlo pro $n$ -tou derivaci součinu:***

$$\begin{aligned}(uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \dots \\ &\dots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.\end{aligned}$$

### Úloha

Určete 120. derivaci funkce  $y = x^2 e^x$ .

### Řešení.

$$e^x(x^2 + 240x + 14280).$$



# Parciální derivace funkce více proměnných

- Derivujeme vždy podle jedné proměnné.
- Ostatní považujeme za konstantu.
- Například pro funkci  $z = f(x, y)$  značíme:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \text{atd.}$$

# Parciální derivace funkce více proměnných

## Úloha

Vypočtěte všechny parciální derivace 2. řádu pro funkci  $z = x \sin xy$ .

## Řešení.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sin xy + xy \cos xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y \cos xy + y \cos xy - xy \sin xy,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \cos xy - x^2 y \sin xy, \dots$$



# Funkce dané parametricky

Nezávisle proměnná  $x$  i hodnota funkce  $y$  jsou vyjádřeny soustavou

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \text{kde } t \in (\alpha, \beta).$$

Derivaci  $\frac{dy}{dx}$  určíme pomocí diferenciálů (užitím Leibnizova symbolu):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t) dt}{\varphi'(t) dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Derivace je též funkcí parametru.

## Úloha

*Odvodte vzorec pro derivaci 2. řádu funkce dané parametricky.*

## Řešení.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$



## Úloha

*Funkce  $f$  je dána parametricky:*

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos t, \\ y &= 2 \sin t, \end{aligned} \quad t \in \langle 0, \pi \rangle.$$

*Vypočtete  $\frac{dy}{dx}$  a  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .*

# Funkce dané implicitně

Funkce  $y = y(x)$  nechť je dána implicitní rovnicí

$$f(x, y) = 0 \quad \text{pro } x \in (a, b).$$

Na daném intervalu tedy platí identicky  $f(x, y(x)) = 0$ .

Proto také derivace levé strany podle  $x$  je identicky rovna nule, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \implies \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Derivaci  $\frac{d^2y}{dx^2}$  vypočteme, když tuto rovnost znovu derivujeme podle  $x$ .

## Úloha

Vypočtěte 1. a 2. derivace funkce dané implicitní rovnicí  
 $x^2 + y^2 - 25 = 0$ .

## Řešení.

$$2x + 2yy' - 0 = 0 \implies x + yy' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y}.$$

$$1 + y'y' + yy'' = 0 \implies y'' = -\frac{1 + y'^2}{y} \implies y'' = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}. \quad \square$$