

Základní věty diferenciálního počtu

Jiří Fišer

26. listopadu 2007

Úvod

Věta (Fermatova)

- f je definována na M
- a nabývá v některém vnitřním bodě $x_0 \in M$ své největší nebo nejmenší hodnoty.

♥ Má-li f v bodě x_0 derivaci, pak $f'(x_0) = 0$.

Princip důkazu pro největší hodnotu

- Sledujeme znaménko podílu $d(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- v levém okolí bodu x_0 : $d(x) \geq 0$
- v pravém okolí bodu x_0 : $d(x) \leq 0$

♥ Z toho pak plyne $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} d(x) = 0$.

Úvod

- Fermatovu větu lze vztáhnout na lokální extrém a jeho okolí,
- má tedy lokální charakter a lze ji formulovat takto:
- **má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a má v něm derivaci, pak se tato derivace rovná nule.**

Věta

Nutnou podmínkou existence lokálního extrému funkce f v bodě x_0 je, že v něm derivace $f'(x_0)$

- *bud' neexistuje*
- *nebo je rovna nule.*

Pro diferencovatelnou funkci f je nutnou podmínkou rovnost $f'(x_0) = 0$.

Věty o střední hodnotě

Uvedeme zde trojici vět

- Rolleova,
- Lagrangeova,
- Cauchyova,

které jsou obvykle nazývány

- větami o střední hodnotě diferenciálního počtu.

Jádrem je věta Lagrangeova.

Věta (Rolleova)

Nechť funkce f

- 1) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
- 2) má derivaci na intervalu (a, b) ,
- 3) splňuje rovnost $f(a) = f(b)$.

Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Věta (Rolleova)

f : spojitá na $\langle a, b \rangle$, má derivaci na (a, b) a $f(a) = f(b)$.

Pak existuje bod $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz.

Podle 2. Weierstrassovy věty nabývá funkce f

- v nějakém bodě $c_1 \in \langle a, b \rangle$ své nejmenší hodnoty
- a v nějakém bodě $c_2 \in \langle a, b \rangle$ své největší hodnoty.
- c_1, c_2 — oba krajními body $\Rightarrow f(x) = \text{konst.}$,
 - za ξ bychom mohli vzít libovolný bod intervalu (a, b) .
- Je-li jeden z bodů c_1, c_2 vnitřním bodem,
 - pak tvrzení plyne z Fermatovy věty.



Poznámky — Rolleova věta

- Bodů, v nichž je derivace funkce f rovna 0, může být i více;
- například funkce $\sin x$ na $\langle 0, 2\pi \rangle$ splňuje předpoklady Rolleovy věty a její derivace je nulová v bodech $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{3\pi}{2}$.

Úloha

Proveďte grafickou ilustraci Rolleovy věty.

- 1) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
- 2) má derivaci na intervalu (a, b) ,
- 3) splňuje rovnost $f(a) = f(b)$.

Úloha

Formou protipříkladů ukažte, že všechny tři předpoklady Rolleovy věty jsou nutné. Uveďte tedy příklady tří funkcí f_1, f_2, f_3 , pro něž neplatí tvrzení Rolleovy věty, a to tak, že

- 1) *funkce f_1 je nespojitá v jediném bodě intervalu $\langle a, b \rangle$, ale předpoklady 2 a 3 jsou splněny;*
- 2) *funkce f_2 nemá derivaci v jediném bodě intervalu (a, b) , ale předpoklady 1 a 3 jsou splněny;*
- 3) *pro funkci f_3 platí $f_3(a) \neq f_3(b)$, ale předpoklady 1 a 2 jsou splněny.*

Věty o střední hodnotě

Věta (Lagrangeova)

Nechť funkce f

- 1) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$,
- 2) má derivaci na intervalu (a, b) ,

Pak existuje bod

$$\xi \in (a, b)$$

tak, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

Důkaz.

- Zavedeme funkci
$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$
- ověříme, že jsou pro ni splněny předpoklady Rolleovy věty.
- Z tvrzení Rolleovy věty pro funkci F pak plyne tvrzení věty Lagrangeovy.

Věty o střední hodnotě

Úloha

Provedte grafickou ilustraci Lagrangeovy věty.

Úloha

Formou proti příkladů ukažte, že oba předpoklady Lagrangeovy věty jsou nutné.

Věty o střední hodnotě

Lagrangeova věta se používá v různých tvarech; některé uvedeme.

- $a = x_0, b = x_0 + \Delta x$:

Pak existuje $\theta \in (0, 1)$;

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x.$$

- $x = x_0 + \Delta x$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0)) \cdot (x - x_0)$$

- Jiný zápis:

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta \Delta x) \cdot \Delta x,$$

ukazuje, proč se Lagrangeově větě říká též **věta o přírůstku funkce**.

Věty o střední hodnotě

Lagrangeova věta má četné důsledky, z nichž některé lze posuzovat jako samostatné a významné výsledky matematické analýzy.

Věta (Cauchyho věta — zobecněná věta o střední hodnotě)

Nechť funkce f, g

- 1) jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$,*
- 2) mají derivace na intervalu (a, b) ,*
- 3) $g'(x) \neq 0$ na intervalu (a, b) .*

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Důkaz Cauchyho věty.

- Předně $g(a) \neq g(b)$, neboť jinak by podle Rolleovy věty existoval bod $\xi_r \in (a, b)$ tak, že by $g'(\xi_r) = 0$, což by bylo ve sporu s předpokladem 3.
- Zavedeme pomocnou funkci

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]$$

- Pro F na $\langle a, b \rangle$ ověříme předpoklady Rolleovy věty.
- V (a, b) tedy existuje ξ tak, že $F'(\xi) = 0$, tedy

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) - f'(\xi) \cdot [g(b) - g(a)] = 0,$$

z čehož plyne tvrzení. □

Cauchyova věta se používá například k důkazu l'Hospitalova pravidla.

Vztah tří vět o střední hodnotě

$$(R) \implies (L), \quad (R) \implies (C)$$

znázorňují, že pomocí Rolleovy věty jsme dokázali zbývající dvě.
Avšak také je

$$(L) \Rightarrow (R),$$

neboť tvrzení Rolleovy věty lze chápat jako zvláštní případ tvrzení věty Lagrangeovy, když platí $f(a) = f(b)$.

Stejně tak lze ukázat, že Lagrangeova věta je zvláštním případem věty Cauchyovy, tj.

$$(C) \Rightarrow (L),$$

jestliže $g(x) = x$.

Všechny tři věty o střední hodnotě jsou navzájem ekvivalentní.

Některé důsledky vět o střední hodnotě

- Nejprve uvedeme dva typické důsledky vět o střední hodnotě;
- na jednom je založen pojem neurčitého integrálu,
- druhý umožňuje jednoduchý výpočet limit funkcí.

Věta (o konstantní funkci)

Funkce f je na intervalu (a, b) konstantní $\iff$

- *má na (a, b) derivaci*
- *a $\forall x \in (a, b)$ platí $f'(x) = 0$.*

Některé důsledky vět o střední hodnotě

Důkaz.

- Z definice derivace plyne, že funkce konstantní na (a, b) má na (a, b) derivaci rovnu 0.
- Naopak nechť na (a, b) je $f'(x) = 0$.
 - Dokážeme, že pro $x_1, x_2 \in (a, b)$ platí $f(x_1) = f(x_2)$.
 - Zvolme označení tak, aby $x_1 < x_2$.
 - Pak na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty,
 - tedy existuje bod $\xi \in \langle x_1, x_2 \rangle$ tak, že je

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f'(\xi).$$

- Rovnost $f(x_2) = f(x_1)$ plyne z toho, že derivace ve výše uvedeném vztahu je nulová.



Některé důsledky vět o střední hodnotě

Důsledek

- *Mají-li dvě funkce f, g na (a, b) stejné derivace, tj.*

$$f'(x) = g'(x),$$

pak se na tomto intervalu liší jen o konstantu, tj.

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \text{tak, že na } (a, b) \text{ je } f(x) = g(x) + C.$$

- Tímto důsledkem jsou vytvořeny předpoklady k definici pojmu neurčitý integrál.

Některé důsledky vět o střední hodnotě

Následující věta se týká výpočtu limit typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Podobné tvrzení lze vyslovit i pro limity typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a obě pak použít k výpočtu několika dalších typů limit.

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Necht'

1) *funkce f , g mají derivace v $P(a)$, kde $a \in \mathbb{R}^*$,*

2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$

3) *existuje vlastní nebo nevlastní*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Pak existuje i a rovná se

$$K$$

L'Hospitalovo pravidlo

Princip důkazu (pro $a \in \mathbb{R}$, $x \rightarrow a+$).

Podle 2) lze doplnit definici funkcí f , g tak, aby byly spojité v $U(a)$, když položíme $f(a) = g(a) = 0$. Existuje pak interval $\langle a, b \rangle \subset U(a+)$ tak, že obě funkce f , g jsou na něm spojité a na (a, b) mají derivaci. Předpoklady Cauchyovy věty jsou tak splněny nejen na intervalu $\langle a, b \rangle$, ale na každém podintervalu $\langle a, x \rangle \subset \langle a, b \rangle$. Podle Cauchyovy věty pak na každém intervalu $\langle a, x \rangle$ existuje bod ξ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pro $x \rightarrow a+$ je též $\xi \rightarrow a+$. Podle předpokladu existuje $\lim_{\xi \rightarrow a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = K$

a vzhledem k rovnosti $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ má stejnou limitu pro $x \rightarrow a+$ i podíl na její levé straně. □

L'Hospitalovo pravidlo

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arctg(x - 2)}{x^2 - 4}$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$. $[1]$

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^3 + 2x^2 + 1}$. $[2]$

L'Hospitalovo pravidlo

Z důkazu věty je zřejmé, že l'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity.

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\cotg x}$. [0]

L'Hospitalovo pravidlo

- L'Hospitalovo pravidlo neplatí naopak a to v tomto smyslu:
z existence limity podílu funkcí neplyne existence limity podílu jejich derivací nebo, což je totéž, z neexistence limity podílu derivací ještě neplyne neexistence limity podílu funkcí.
- Například $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin |x|}{|x|} = 1$.
- Někdy je potřebné použít l'Hospitalovo pravidlo i vícekrát, případně provádět při výpočtu úpravy, které postup zjednoduší.

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 x}$. $\left[\frac{9}{2}\right]$

L'Hospitalovo pravidlo

- Při výpočtu limit typu $[0 \cdot \infty]$ součin funkcí $f \cdot g$ upravíme součin funkcí na podíl

$$\frac{f}{\frac{1}{g}} \quad \text{nebo naopak} \quad \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

tak, aby to bylo vhodné pro použití l'Hospitalova pravidla

- tedy například funkci logaritmickou je zpravidla nejvhodnější nechat v čitateli.

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x.$ $[0]$

L'Hospitalovo pravidlo

Počítáme-li limitu typu $[\infty - \infty]$ rozdílu funkcí $f - g$, upravíme rozdíl funkcí na podíl:

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}.$$

Úloha

Vypočtěte $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\cotg^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$.

Řešení.

$-\frac{2}{3}$; před použitím l'Hospitalova pravidla nejprve získaný zlomek vhodně rozložíme na součin funkcí.



L'Hospitalovo pravidlo

U limit typu

$$[0^0], [\infty^0] \text{ a } [1^\infty]$$

pro funkce

$$f^g$$

postupujeme tak, že tuto funkci nejprve upravíme na tvar $e^{g \cdot \ln f(x)}$,
limitu přeneseme do exponentu (podle věty o limitě složené funkce) a
v exponentu dostaneme limitu typu $[0 \cdot \infty]$.

Úloha

Vypočtete $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x}$. [1]

Taylorův vzorec

Mějme funkci f , $U(x_0) \subset D(f)$; h necht' je přírůstek nezávisle proměnné a necht' platí $f(x_0 + h) \in U(x_0)$. Hodnotu $f(x_0 + h)$ dovedeme vyjádřit **přesně pomocí Lagrangeovy věty**

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0 + \theta h),$$

kde $\theta \in (0, 1)$, a **přibližně užitím diferenciálu**

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0).$$

1. vzorec je sice přesný, ale na závadu někdy může být (například při numerických výpočtech), že neznáme θ . Druhý vzorec dává aproximaci funkce f lineární funkcí, což je na jedné straně výhodné pro jednoduchost této aproximace, na druhé straně je lineární aproximace v některých případech nedostatečně přesná.

Taylorův vzorec

Položme

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0) + R(h),$$

kde $R(h)$ je nějaký „zbytek“. Platí tedy

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = \frac{R(h)}{h}, \quad \text{takže} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{h} = 0.$$

Zbytek $R(h)$ je tedy „vyššího řádu“ než h , „jde k 0 rychleji než h “, například může být typu $a \cdot h^2$.

Taylorův vzorec

- Chtěli bychom nyní zachovat jednoduchost aproximace hodnoty $f(x_0 + h)$, ale přitom zvýšit přesnost.
- Můžeme toho dosáhnout tím že $f(x_0 + h)$ aproximujeme mnohočlenem v h stupně n ;
- tento mnohočlen označíme $T_n(h)$.
- Při vhodném postupu bude zbytek, tedy rozdíl $f(x_0 + h) - T_n(h)$, záviset až na h^{n+1} .

Taylorův vzorec

Věta (Taylorova)

Nechť funkce f má v $U(x_0)$ spojité derivace až do řádu $n + 1$.

Pak pro každé $x \in U(x_0)$ platí (označíme-li $h = x - x_0$) tzv. **Taylorův vzorec**:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n(h),$$

kde $R_n(h)$, tzv. **zbytek**, lze psát ve tvaru

Lagrangeově: $R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$, kde $\theta \in (0, 1)$, nebo

Cauchyově: $R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \bar{\theta}h)}{n!}(1 - \bar{\theta})h^{n+1}$, kde $\bar{\theta} \in (0, 1)$.

Důkaz.

V důkazu se používají pomocné funkce a Rolleova věta. □

Taylorův vzorec

Druhý obvyklý tvar Taylorova vzorce dostaneme po dosazení $h = x - x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x - x_0),$$

Koeficienty $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ se nazývají **Taylorovy koeficienty**.

Taylorův vzorec

Položíme-li $x_0 = 0$, což je například u elementárních funkcí častý a přirozený požadavek, dostaneme zvláštní případ Taylorova vzorce pro okolí bodu 0, a tento vzorec se někdy nazývá **Maclaurinův** (čti mekloren):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

Prvních $n + 1$ členů na pravé straně Taylorova (Maclaurinova) vzorce tvoří Taylorův polynom $T_n(x)$, takže platí $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Pokud na nějakém $U(x_0)$ je $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, je Taylorův polynom aproximací funkce f . Polynom $T_n(x)$ se také nazývá **Taylorův (Maclaurinův)** rozvoj funkce f ; zde je to rozvoj podle vzorce, ale pracujeme rovněž s rozvojem funkce v mocninnou řadu.

Maclaurinovy rozvoje některých elementárních funkcí

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots (-1)^{m-1} \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x)$
- $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1!} + R_{2m-1}(x)$

Maclaurinovy rozvoje některých elementárních funkcí

- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x)$

- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m}(x)$

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$

- $(1+x)^r = 1 + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \cdots + \binom{r}{n}x^n + R_n(x)$
($\forall r \in \mathbb{R}$)

Taylorův vzorec

- Jestliže zjišťujeme, pro která x platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, dostaneme, že u funkcí
- e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ je to pro $x \in \mathbb{R}$,
- u funkce $\operatorname{arctg} x$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$,
- u funkce $\ln(1+x)$ pro $x \in (-1, 1)$ a u funkce
- $(1+x)^r$ pro $x \in (-1, 1)$ nebo na intervalu širším v závislosti na r .

Úlohy (na Maclaurinův rozvoj funkcí)

Úloha

Určete Taylorovy koeficienty rozvoje funkcí uvedených v předchozím přehledu (použitím obecného vzorce).

Řešení.

V podstatě jde o využití vhodných pravidel pro výpočet derivací vyšších řádů pro zadanou funkci.



Úlohy (na Maclaurinův rozvoj funkcí)

Úloha

Najděte rozvoj funkcí e^{-x} , $\sin 3x$.

Úloha

Odvodte rozvoj funkcí $\frac{1}{1+x}$ a $\sqrt{1+x}$.

Úloha

Určete první členy rozvoje funkcí $(x+1) \cdot \operatorname{ch} 2x$, $x \cdot e^{-2x}$ až po členy s x^5 .

Úlohy (na Maclaurinův rozvoj funkcí)

Úloha

Zobrazte na grafickém kalkulátoru (nebo na počítači pomocí vhodného SW systému) funkci $y = \cos x$ společně s jejími aproximacemi danými Maclaurinovým rozvojem:

$$f_1(x) = 1, f_2(x) = 1 + \frac{x^2}{2}, f_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, f_4(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}.$$

Sledujte, jak se rozšiřuje interval těch $x \in \mathbb{R}$, pro něž $\cos x \approx f_k(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Úloha

Totéž proveďte pro funkce $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{arctg} x$, případně i pro jiné.