

# Užití diferenciálního počtu

Jiří Fišer

3. prosince 2007

- 1 Monotónnost funkce
- 1 Lokální extrémy
- 1 Největší a nejmenší hodnota funkce na intervalu
- 1 Konvexnost a konkávnost
- 1 Inflexe a inflexní body
- 1 Asymptoty

# Monotónnost funkce

- Při vyšetřování průběhu funkce se také zjišťuje, zda je daná funkce v některém intervalu nebo bodě monotónní.
- Zjišťování monotónnosti funkce pomocí derivace funkce.

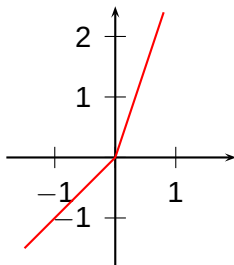
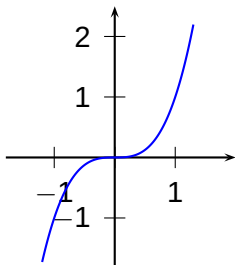
## Věta

Jestliže existuje okolí  $U(x_0) \subset D(f)$  a  $f'(x_0) > 0$ , pak  $f$  je *rostoucí* v bodě  $x_0$ .

## Princip důkazu.

- $f'(x_0) > 0 \implies$  v jistém okolí  $U(x_0)$  je také  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ .





Obrázek: Grafy funkcí rostoucích v bodě 0:  $y = x^3$  a  $y = 2x + |x|$ .

- Tato věta vyjadřuje jen postačující podmínku, **neplatí obráceně**.
- Funkce rostoucí v bodě může mít i **nulovou derivaci** nebo **derivaci nemít** (viz obr.).
- Podobné výsledky platí i pro funkce klesající v bodě a pro zápornou derivaci.

# Stacionární bod funkce

$x_0$  je stacionárním bodem funkce  $f \iff f'(x_0) = 0$ .

- Ve stacionárním bodě může být funkce
  - ▶ rostoucí,
  - ▶ klesající
  - ▶ nebo v něm nemusí být monotónní.

## Věta (o monotónnosti na intervalu)

Má-li funkce  $f$  derivaci na  $(a, b)$ , pak platí:

1) Funkce  $f$  je na  $(a, b)$ :

$$\text{neklesající} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \geq 0$$

$$\text{nerostoucí} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \leq 0.$$

2) Funkce  $f$  je na  $(a, b)$ :

$$\text{rostoucí} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \geq 0$$

$$\text{klesající} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \leq 0,$$

$$\text{přičemž neexistuje } (\alpha, \beta) \subset (a, b); \forall x \in (\alpha, \beta) f'(x) = 0.$$

## Princip důkazu pro funkce neklesající.

- $f$  neklesající na  $(a, b) \implies$   
v každém bodě  $(a, b)$  je diferenciální podíl  $\geq 0 \implies$   
 $f'(x) \geq 0$ .
- $f'(x) \geq 0$  na  $(a, b)$ ,  $x_1 < x_2 \implies$   
na  $\langle x_1, x_2 \rangle$  jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty  $\implies$   
existuje  $\xi \in (x_1, x_2)$ ;

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi),$$

$$\implies f(x_1) \leq f(x_2).$$



## Princip důkazu pro funkce rostoucí.

- $f$  rostoucí  $\implies f'(x) \geq 0$ .
  - Kdyby  $\forall x \in (\alpha, \beta) : f'(x) = 0 \implies f(x) = \text{konst.} \implies$  spor.
- $f'(x) \geq 0$  na  $(a, b)$ ,  $x_1 < x_2$  a neexistuje  $(\alpha, \beta) \dots \implies f(x_1) \leq f(x_2)$ 
  - a podle předpokladu o  $(\alpha, \beta)$  existuje mezi  $x_1, x_2$  bod  $x'$  tak, že  $f'(x') > 0 \implies$  funkce  $f$  roste v  $x' \implies$
  - $f(x_1) < f(x_2)$ .



Tuto větu lze rozšířit na uzavřený interval tak, že pro  $f$  předpokládáme

- derivaci na  $(a, b)$
- a spojitost na  $\langle a, b \rangle$ .

## Úloha

Vyšetřete intervaly monotónnosti funkce  $f : y = x^2 e^{-x}$ .

## Řešení.

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

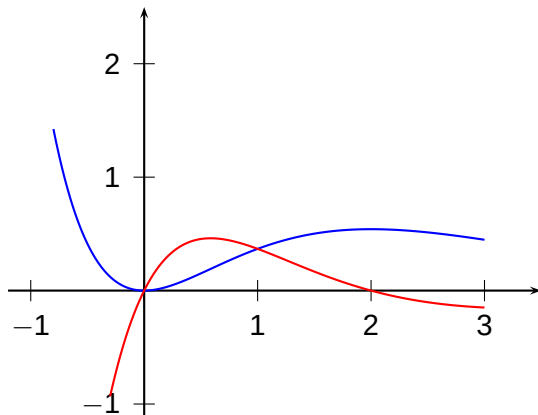
$$y' = (2x - x^2) e^{-x} = x(2 - x) e^{-x}.$$

intervaly:

- (1)  $(-\infty, 0)$ :  $y' \leq 0$  (nulová v jediném bodě)  $\implies f$  je klesající,
- (2)  $\langle 0, 2 \rangle$ :  $y' \geq 0$  (nulová ve dvou bodech)  $\implies f$  je rostoucí,
- (3)  $\langle 2, +\infty \rangle$ :  $y' \leq 0$ ,  $\implies f$  je klesající..







Obrázek: Grafy funkcí  $y = x^2 e^{-x}$  a  $y' = x(2 - x) e^{-x}$  z úlohy.

# Lokální extrémy

Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$

- lokální minimum:

$$\exists U(x_0), \forall x \in U(x_0) : f(x) \geq f(x_0),$$

- lokální maximum:

$$\exists U(x_0), \forall x \in U(x_0) : f(x) \leq f(x_0).$$

Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$

- ostré lokální minimum:

$$\exists P(x_0), \forall x \in P(x_0) : f(x) > f(x_0),$$

- ostré lokální maximum:

$$\exists P(x_0), \forall x \in P(x_0) : f(x) < f(x_0).$$

Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  lokální minimum, resp. lokální maximum, říkáme, že  $f$  má v bodě  $x_0$  lokální extrém.

Nutná podmínka existence lokálního extrému:

- Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  lokální extrém a existuje-li  $f'(x_0)$ , pak  $f'(x_0) = 0$ .
- Funkce tedy může mít extrém jen ve stacionárním bodě nebo v bodě, v němž nemá derivaci (jako tomu je např. u funkce  $y = |x|$ ).

# Postup při určování lokálních extrémů

- Najdeme body, v nichž může nastat extrém, tj. body, v nichž je derivace funkce rovna nule (**body stacionární**) nebo v nichž derivace neexistuje;
- dále takový bod označíme  $x_0$ .

# (1) Užítí monotónnosti v okolí bodu $x_0$

Nechť  $f$  je **spojitá** v  $x_0$  a existuje okolí  $U(x_0) \subset D(f)$ .

- Je-li  $f$  **rostoucí v  $P(x_0-)$**
- a **klesající v  $P(x_0+)$** ,

má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  **(ostré) lokální maximum**.

Podobně lze formulovat další případy:

- ostré lokální minimum,
- neostré extrémy
- a případ, kdy extrém neexistuje.

## (2) Užití 1. derivace v okolí bodu $x_0$

- $f$  je **spojitá** v  $x_0$
- a existuje okolí  $P(x_0) \subset D(f)$ , v němž má funkce  $f$  derivaci.

Je-li

- $f'(x) > 0$  v  $P(x_0-)$
- a  $f'(x) < 0$  v  $P(x_0+)$ ,

má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  (ostré) lokální maximum.

Podobně lze formulovat další případy.

### (3) Užití 2. derivace v bodě $x_0$

- $f$  má derivaci v nějakém okolí  $U(x_0) \subset D(f)$
- a existuje  $f''(x_0)$ .

Je-li

- $f''(x_0) < 0$ ,

má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  (ostré) lokální maximum,

je-li

- $f''(x_0) > 0$ ,

má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  (ostré) lokální minimum.

*Pozor:*  $f''(x_0) = 0$  neznamená neexistenci extrému.

Odvození postupu dle

- (1) plyne z definice extrému,
- (2) plyne z (1) užitím vztahu mezi monotónností a znaménkem derivace,
- (3) plyne z (2)  
(např.  $f''(x_0) < 0$  říká, že funkce  $f'$  je klesající v bodě  $x_0 \dots$ ).



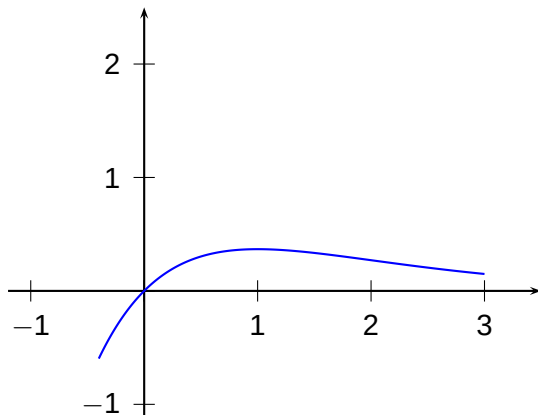
## Úloha

Zjistěte extrém funkce  $f : y = x e^{-x}$ .

## Řešení.

- $y' = (1 - x) e^{-x}$
- $y' = 0$  pro  $x_0 = 1$ .
- $y'' = (x - 2) e^{-x}$ .
- $y''(1) = -e^{-1} < 0 \implies f$  má v bodě 1 lokální maximum.





Obrázek: Graf funkce  $y = x e^{-x}$  s lokálním maximem v bodě 1.

## (4) Užití Taylorova vzorce

Jestliže funkce  $f$  má derivace v  $U(x_0)$  a platí ( $n > 1$ )

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

pak

(1) pro  $n$  sudé existuje v bodě  $x_0$  extrém:

- ▶ lokální maximum pro  $f^{(n)}(x_0) < 0$ ,
- ▶ lokální minimum pro  $f^{(n)}(x_0) > 0$ .

(2) pro  $n$  liché extrém v bodě  $x_0$  neexistuje.

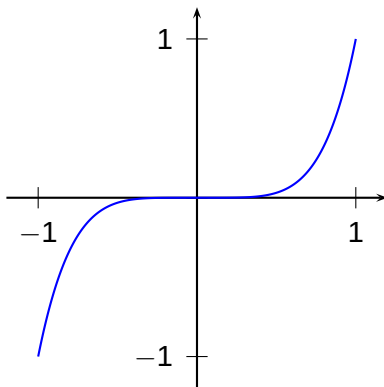
## Úloha

Vyšetřete extrém funkce  $f : y = x^5$ .

## Řešení.

- Máme  $y' = 5x^4$ , stacionární bod 0.
- $y'' = 20x^3$ ,  $y''(0) = 0$ ,
- $y''' = 60x^2$ ,  $y'''(0) = 0$ ,
- $y^{(4)} = 120x$ ,  $y^{(4)}(0) = 0$ ,
- $y^{(5)} = 120 > 0$ .
- První nenulová derivace je **lichého řádu**, tedy **extrém neexistuje**.





Obrázek: Graf funkce  $y = x^5$  bez lokálního extrému v bodě 0.

# Největší a nejmenší hodnota funkce na intervalu

Mějme funkci  $f$  definovanou a spojitou na intervalu  $\langle a, b \rangle$ .

- Podle 2.Weierstrassovy věty nabývá funkce  $f$ 
  - v některém bodě  $c_1$  své **největší hodnoty**
  - a v některém bodě  $c_2$  své **nejmenší hodnoty**.
- Jiné názvy: *absolutní extrémy, globální extrémy*.
- Každý z bodů  $c_1, c_2$  přitom může být vnitřním nebo krajním bodem intervalu  $\langle a, b \rangle$ .
- Pokud je  $c_i$  vnitřním bodem, je to současně bod, v němž nastává lokální extrém,
  - tedy stacionární bod
  - nebo bod, v němž neexistuje derivace.

## Postup při určování největší a nejmenší hodnoty funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$

- (1) Určíme všechny stacionární body a body, v nichž neexistuje derivace a vypočteme v nich funkční hodnoty.
- (2) Vypočteme funkční hodnoty v bodech  $a, b$ .
- (3) Maximum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je největší hodnotou funkce na  $\langle a, b \rangle$ ,
- (4) minimum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je nejmenší hodnotou funkce na  $\langle a, b \rangle$ .

Tedy: není třeba určovat lokální extrémy.

## Úloha

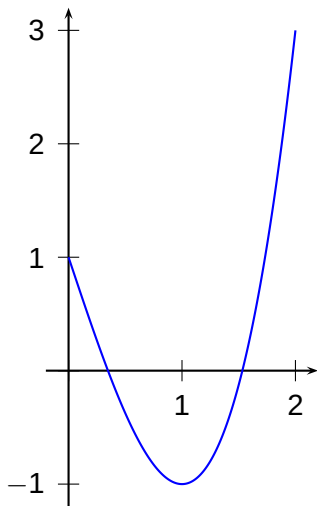
Máme určit největší a nejmenší hodnotu funkce  $f : y = x^3 - 3x + 1$  na intervalu  $\langle 0, 2 \rangle$ .

## Řešení.

- $y' = 3x^2 - 3$ ;  $f$  má na  $\langle 0, 2 \rangle$  jediný stacionární bod 1.
  - $f(1) = -1$
  - $f(0) = 1$ ,
  - $f(2) = 3$ .
- Funkce  $f$  tedy nabývá největší hodnoty 3 v bodě 2 a nejmenší hodnoty  $-1$  v bodě 1.







Obrázek: Globální extrémy funkce  $y = x^3 - 3x + 1$  na intervalu  $\langle 0, 2 \rangle$ .

# Konvexnost a konkávnost

- Označme  $k(u, v) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$ ;
- je-li  $f$  funkce spojitá, je pro  $u \neq v$  také funkce  $k(u, v)$  spojitá vzhledem k  $u$  i vzhledem k  $v$ .
- Geometrický význam:  $k(u, v)$  je **směrnice sečny** grafu funkce  $f$ .

## Definice

Funkce  $f$  se nazývá **konvexní** (**konkávní**) na intervalu  $(a, b)$   $\iff$  pro každé tři body  $x_1, x, x_2 \in (a, b)$ , kde  $x_1 < x < x_2$ , platí

$$k(x_1, x) < k(x, x_2) \quad (k(x_1, x) > k(x, x_2)).$$

Funkce dle této definice je *ryze konvexní* nebo *konkávní*, při neostrých nerovnostech jde o neryzí vlastnosti.

## Věta (1.věta o konvexnosti a konkávnosti)

- Necht' funkce  $f$  **má** na intervalu  $(a, b)$  **derivaci**  $f'$ .  
Pak funkce  $f$  je na  $(a, b)$  **konvexní** (**konkávní**)  $\iff$  je
- $f'$  na  $(a, b)$  **rostoucí** (**klesající**).

Na funkci  $f'$  lze nyní použít větu o monotónnosti na intervalu:

## Věta (2. věta o konvexnosti a konkávnosti)

- Má-li funkce  $f$  druhou derivaci na  $(a, b)$ ,  
pak tato funkce je na  $(a, b)$  **konvexní** [**konkávní**], právě když
- $\forall x \in (a, b)$  je  $f''(x) \geq 0$  [ $\leq 0$ ],
- přičemž neexistuje interval  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  tak, aby  $\forall x \in (\alpha, \beta)$  bylo  $f''(x) = 0$ .

# Inflexe a inflexní body

## Definice

Říkáme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **inflexi**  $\Leftrightarrow$

- má derivaci  $f'(x_0)$  a je
    - v levém okolí  $U(x_0-)$  konvexní [konkávní]
    - a v pravém okolí  $U(x_0+)$  konkávní [konvexní].
  - Bod  $[x_0, f(x_0)]$  roviny se nazývá **inflexní bod** funkce  $f$  resp. grafu funkce  $f$ .
- 
- V inflexním bodě přechází funkce z konvexního průběhu na konkávní nebo naopak.
  - *Inflexní tečna* v bodě „dotyku“ graf přechází z jedné poloroviny do druhé.
  - Např. osa  $x$  je inflexní tečnou ke grafu funkce  $y = x^3$ .

### Věta (vztah inflexe a derivace)

*Má-li funkce  $f$  v nějakém okolí  $U(x_0)$  derivaci  $f'$ , pak má v bodě  $x_0$  inflexi  $\Leftrightarrow$  má  $f'$  v bodě  $x_0$  lokální extrém.*

### Věta (nutná podmínka existence inflexe)

*Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  inflexi a existuje  $f''(x_0)$ , je  $f''(x_0) = 0$ .*

Důkaz plyne z nutné podmínky existence extrému funkce  $f'$ .

Vztah inflexe a derivace lze dalšími větami specifikovat pro případ existence druhé resp. i třetí derivace.

### Věta ((vztah inflexe a druhé derivace)

*Má-li funkce  $f$  v nějakém okolí bodu  $x_0$  derivaci  $f''$*

- a má-li tato derivace v  $P(x_0-)$  a  $P(x_0+)$  různá znaménka, má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  inflexi.*
- Má-li  $f''$  stejné znaménko v  $P(x_0-)$  a  $P(x_0+)$ , pak funkce  $f$  v bodě  $x_0$  inflexi nemá.*

## Věta (vztah inflexe a 3. derivace)

- Má-li funkce  $f$  v nějakém okolí bodu  $x_0$  derivaci  $f''$ ,
- platí  $f''(x_0) = 0$  a  $f'''(x_0) \neq 0$ ,
- pak funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  inflexi.

- Tuto větu bychom mohli rozšířit (podobně jako odpovídající pravidlo pro určování lokálního extrému) i na případ, kdy

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

- Pro  $k$  liché existuje v bodě  $x_0$  inflexe,
- pro  $k$  sudé nikoli.

## Úloha

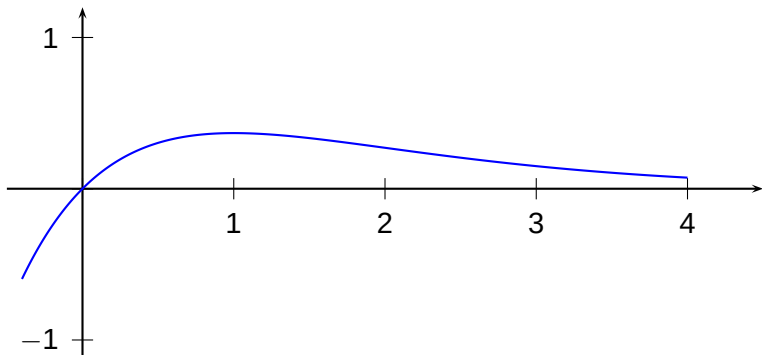
Stanovte konvexnost, konkávnost a inflexi funkce  $y = x e^{-x}$ .

## Řešení.

- Tato funkce má potřebné derivace, vypočteme:
- $y' = (1 - x) e^{-x}$ ,
- $y'' = (x - 2) e^{-x}$ , kde  $e^{-x} > 0$ .
- Pro  $x < 2$  je  $y'' < 0$ , funkce je konkávní,
- pro  $x > 2$  je  $y'' > 0$ , funkce je konvexní.
- Pro  $x = 2$  má funkce inflexi, inflexní bod je  $[2; 2 e^{-2}]$ .



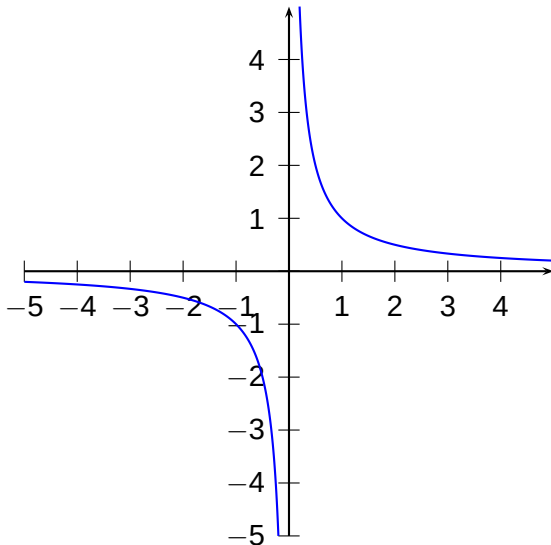




Obrázek: Graf funkce  $y = x e^{-x}$  s inflexním bodem  $[2; 2 e^{-2}]$ .

# Asymptoty

- Asymptoty jsou přímky,
  - představujeme si je jako tečny ke grafu funkce v nekonečnu.
  - Souřadnicové osy jsou asymptotami grafu funkce  $y = 1/x$ .
- Definujeme asymptoty dvou druhů (avšak z geometrického hlediska jde o tentýž jev).



Obrázek: Asymptoty  $y = 0$  a  $x = 0$  grafu funkce  $y = \frac{1}{x}$ .

## Definice

- Přímka  $x = c$  se nazývá **vertikální asymptota** grafu funkce  $f \Leftrightarrow$
  - funkce  $f$  má v bodě  $c$  alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní.
- 
- Takových asymptot může mít funkce nekonečně mnoho, příkladem je funkce tangens.
  - Kromě toho mohou pro danou funkci existovat ještě *nejvýše dvě asymptoty* s rovnicemi tvaru  $y = kx + q$ .

## Definice

- Přímka  $y = kx + q$  se nazývá **asymptota (se směrnicí)** grafu funkce  $f \Leftrightarrow$
- pro  $x \rightarrow -\infty$  nebo pro  $x \rightarrow +\infty$  je

$$\lim[f(x) - kx + q] = 0.$$

Asymptoty se směrnicí se zpravidla zjišťují podle následující věty.

### Věta (o výpočtu asymptot)

- Přímka  $y = kx + q$  je asymptotou grafu funkce  $f \Leftrightarrow$
- existují limity (pro  $x \rightarrow -\infty$  nebo pro  $x \rightarrow +\infty$ )

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = q.$$

# Praktický postup v běžných případech

- 1) Vyšetříme okolí těch hromadných bodů  $D(f)$ , které leží v  $\mathbb{R} - D(f)$ 
  - (body nespojitosti - zejména izolované body množiny  $\mathbb{R} - D(f)$  nebo krajní body intervalů, jež jsou součástí  $D(f)$ ).
  - Zjistíme ve kterém z těchto bodů existují alespoň jednostranné nevlastní limity.
- 2) Je-li  $+\infty$  nebo  $-\infty$  hromadným bodem  $D(f)$ , hledáme  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ .
  - Jestliže tato limita (nebo obě) existuje, je to směrnice  $k$  asymptot, *pokud asymptoty existují*.
  - Dále ještě hledáme  $\lim [f(x) - kx]$  s oním  $k$ , jež bylo vypočteno v předchozí limitě.
  - Existuje-li tato limita, je to  $q$  a asymptota existuje.

Při výpočtu  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$  lze použít l'Hospitalova pravidla, z něhož  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ . Také tento vztah se často využívá k výpočtu směrnice asymptot (ovšem neexistuje-li  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ , neznamená to neexistenci asymptot).

## Úloha

Určete asymptoty pro funkci  $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$ .

## Řešení.

- $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right) = \frac{1}{2}.$

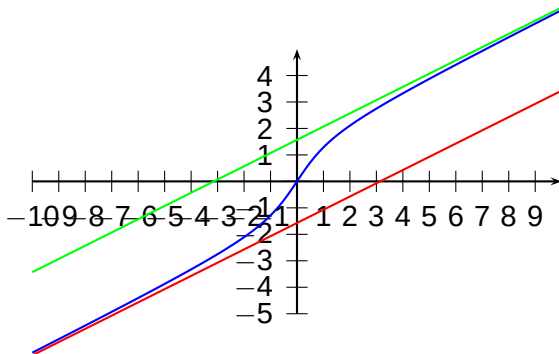
- Dále  $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x \right) = \pm \frac{\pi}{2}$

- Existují tedy 2 asymptoty:

$$y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } x \rightarrow -\infty \text{ a}$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } x \rightarrow +\infty.$$





Obrázek: Asymptoty  $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$  a  $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$  grafu funkce  $y = \frac{x}{2} + \arctg x$ .



## Úloha

Určete asymptoty pro funkci  $y = x + \sqrt{x}$ .

## Řešení.

- Zde je nevlastním hromadným bodem  $D(f)$  jen  $+\infty$ .
- Počítáme

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty,$$

- asymptota neexistuje.

