

Užití diferenciálního počtu

Jiří Fišer

4. prosince 2009

Monotónnost funkce

- Při vyšetřování průběhu funkce se také zjišťuje, zda je daná funkce v některém intervalu nebo bodě monotónní.
- Zjišťování monotónnosti funkce pomocí derivace funkce.

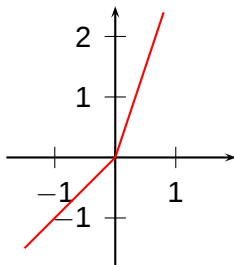
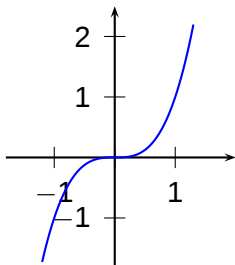
Věta

Jestliže existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$ a $f'(x_0) > 0$, pak f je *rostoucí* v bodě x_0 .

Princip důkazu.

- $f'(x_0) > 0 \implies$ v jistém okolí $U(x_0)$ je také $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$.





Obrázek: Grafy funkcí rostoucích v bodě 0: $y = x^3$ a $y = 2x + |x|$.

- Tato věta vyjadřuje jen postačující podmínku, **neplatí obráceně**.
- Funkce rostoucí v bodě může mít i **nulovou derivaci** nebo **derivaci nemít** (viz obr.).
- Podobné výsledky platí i pro funkce klesající v bodě a pro zápornou derivaci.

Stacionární bod funkce

x_0 je stacionárním bodem funkce $f \iff f'(x_0) = 0$.

- Ve stacionárním bodě může být funkce
 - ▶ rostoucí,
 - ▶ klesající
 - ▶ nebo v něm nemusí být monotónní.

Věta (o monotónnosti na intervalu)

Má-li funkce f derivaci na (a, b) , pak platí:

1) Funkce f je na (a, b) :

$$\text{neklesající} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \geq 0$$

$$\text{nerostoucí} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \leq 0.$$

2) Funkce f je na (a, b) :

$$\text{rostoucí} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \geq 0$$

$$\text{klesající} \iff \forall x \in (a, b) \text{ je } f'(x) \leq 0,$$

$$\text{přičemž neexistuje } (\alpha, \beta) \subset (a, b); \forall x \in (\alpha, \beta) f'(x) = 0.$$

Princip důkazu pro funkce neklesající.

- f neklesající na $(a, b) \implies$
v každém bodě (a, b) je diferenciální podíl $\geq 0 \implies$
 $f'(x) \geq 0$.
- $f'(x) \geq 0$ na (a, b) , $x_1 < x_2 \implies$
na $\langle x_1, x_2 \rangle$ jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty $\implies$
existuje $\xi \in (x_1, x_2)$;

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi),$$

$$\implies f(x_1) \leq f(x_2).$$



Princip důkazu pro funkce rostoucí.

- f rostoucí $\implies f'(x) \geq 0$.
 - Kdyby $\forall x \in (\alpha, \beta) : f'(x) = 0 \implies f(x) = \text{konst.} \implies$ spor.
- $f'(x) \geq 0$ na (a, b) , $x_1 < x_2$ a neexistuje $(\alpha, \beta) \dots \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
 - a podle předpokladu o (α, β) existuje mezi x_1, x_2 bod x' tak, že $f'(x') > 0 \implies$ funkce f roste v $x' \implies$
 - $f(x_1) < f(x_2)$.



Tuto větu lze rozšířit na uzavřený interval tak, že pro f předpokládáme

- derivaci na (a, b)
- a spojitost na $\langle a, b \rangle$.

Úloha

Vyšetřete intervaly monotónnosti funkce $f : y = x^2 e^{-x}$.

Řešení.

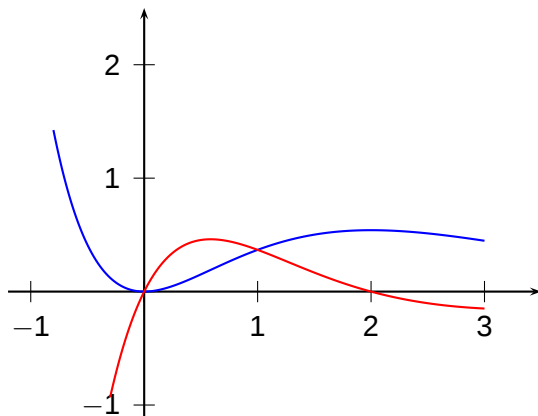
$$D(f) = \mathbb{R}.$$

$$y' = (2x - x^2) e^{-x} = x(2 - x) e^{-x}.$$

intervaly:

- (1) $(-\infty, 0)$: $y' \leq 0$ (nulová v jediném bodě) $\implies f$ je klesající,
- (2) $\langle 0, 2 \rangle$: $y' \geq 0$ (nulová ve dvou bodech) $\implies f$ je rostoucí,
- (3) $\langle 2, +\infty \rangle$: $y' \leq 0$ (nulová v jediném bodě) $\implies f$ je klesající.





Obrázek: Grafy funkcí $y = x^2 e^{-x}$ a $y' = x(2 - x) e^{-x}$ z úlohy.

Lokální extrémy

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0

- lokální minimum:

$$\exists U(x_0), \forall x \in U(x_0) : f(x) \geq f(x_0),$$

- lokální maximum:

$$\exists U(x_0), \forall x \in U(x_0) : f(x) \leq f(x_0).$$

- ostré lokální minimum:

$$\exists P(x_0), \forall x \in P(x_0) : f(x) > f(x_0),$$

- ostré lokální maximum:

$$\exists P(x_0), \forall x \in P(x_0) : f(x) < f(x_0).$$

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální minimum, resp. lokální maximum, říkáme, že f má v bodě x_0 **LOKÁLNÍ EXTRÉM**.

Nutná podmínka existence lokálního extrému:

- Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$.
- Funkce tedy může mít extrém jen ve stacionárním bodě nebo v bodě, v němž nemá derivaci (jako tomu je např. u funkce $y = |x|$).

Postup při určování lokálních extrémů

- Najdeme body, v nichž může nastat extrém, tj. body, v nichž je derivace funkce rovna nule (**body stacionární**) nebo v nichž derivace neexistuje; *označíme* x_0 .
- Další možný postup:
 - (1) Užití monotónnosti v okolí bodu x_0
 - (2) Užití 1. derivace v okolí bodu x_0
 - (3) Užití 2. derivace v bodě x_0

(1) Užití monotónnosti v okolí bodu x_0

Nechť f je **spojitá** v x_0 a existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$.

- Je-li f **rostoucí v $P(x_0-)$**
- a **klesající v $P(x_0+)$** ,

má funkce f v bodě x_0 **(ostré) lokální maximum**.

Podobně lze formulovat další případy:

- ostré lokální minimum,
- neostré extrémy
- a případ, kdy extrém neexistuje.

(2) Užití 1. derivace v okolí bodu x_0

- f je **spojitá** v x_0
- a existuje okolí $P(x_0) \subset D(f)$, v němž má funkce f derivaci.

Je-li

- $f'(x) > 0$ v $P(x_0-)$
- a $f'(x) < 0$ v $P(x_0+)$,

má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum.

Podobně lze formulovat další případy.

(3) Užití 2. derivace v bodě x_0

- f má derivaci v nějakém okolí $U(x_0) \subset D(f)$
- a existuje $f''(x_0)$.

Je-li

- $f''(x_0) < 0$,

má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum,

je-li

- $f''(x_0) > 0$,

má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální minimum.

Pozor: $f''(x_0) = 0$ neznamená neexistenci extrému.

Odvození postupu dle

- (1) plyne z definice extrému,
- (2) plyne z (1) užitím vztahu mezi monotónností a znaménkem derivace,
- (3) plyne z (2)
(např. $f''(x_0) < 0$ říká, že funkce f' je klesající v bodě $x_0 \dots$).

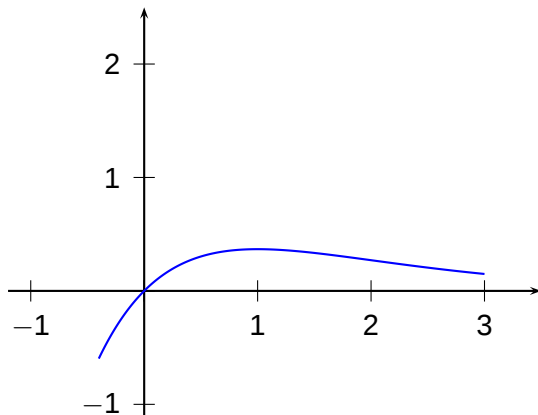
Úloha

Zjistěte extrém funkce $f : y = x e^{-x}$.

Řešení.

- $y' = (1 - x) e^{-x}$
- $y' = 0$ pro $x_0 = 1$.
- $y'' = (x - 2) e^{-x}$.
- $y''(1) = -e^{-1} < 0 \implies f$ má v bodě 1 lokální maximum.





Obrázek: Graf funkce $y = x e^{-x}$ s lokálním maximem v bodě 1.

Pozor: $f''(x_0) = 0$ neznamená neexistenci extrému.

Jestliže funkce f má derivace v $U(x_0)$ a platí ($n > 1$)

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$

pak

(1) pro n sudé existuje v bodě x_0 extrém:

- ▶ lokální maximum pro $f^{(n)}(x_0) < 0$,
- ▶ lokální minimum pro $f^{(n)}(x_0) > 0$.

(2) pro n liché lokální extrém v bodě x_0 neexistuje.

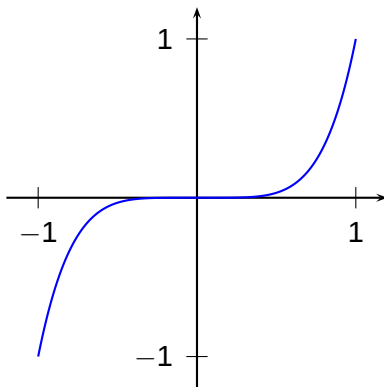
Úloha

Vyšetřete extrém funkce $f : y = x^5$.

Řešení.

- Máme $y' = 5x^4$, stacionární bod 0.
- $y'' = 20x^3$, $y''(0) = 0$,
- $y''' = 60x^2$, $y'''(0) = 0$,
- $y^{(4)} = 120x$, $y^{(4)}(0) = 0$,
- $y^{(5)} = 120 > 0$.
- První nenulová derivace je **lichého řádu**, tedy **extrém neexistuje**.





Obrázek: Graf funkce $y = x^5$ bez lokálního extrému v bodě 0.

Největší a nejmenší hodnota funkce na intervalu

Mějme funkci f definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b \rangle$.

- Podle 2.Weierstrassovy věty nabývá funkce f
 - v některém bodě c_1 své **největší hodnoty**
 - a v některém bodě c_2 své **nejmenší hodnoty**.
- Jiné názvy: *absolutní extrémy, globální extrémy*.
- Každý z bodů c_1, c_2 přitom může být vnitřním nebo krajním bodem intervalu $\langle a, b \rangle$.
- Pokud je c_i vnitřním bodem, je to současně bod, v němž nastává lokální extrém,
 - tedy stacionární bod
 - nebo bod, v němž neexistuje derivace.

Postup při určování největší a nejmenší hodnoty funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$

- (1) Určíme všechny stacionární body a body, v nichž neexistuje derivace a vypočteme v nich funkční hodnoty.
- (2) Vypočteme funkční hodnoty v bodech a, b .
- (3) Maximum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je největší hodnotou funkce na $\langle a, b \rangle$,
- (4) minimum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je nejmenší hodnotou funkce na $\langle a, b \rangle$.

Tedy: není třeba určovat lokální extrémy.

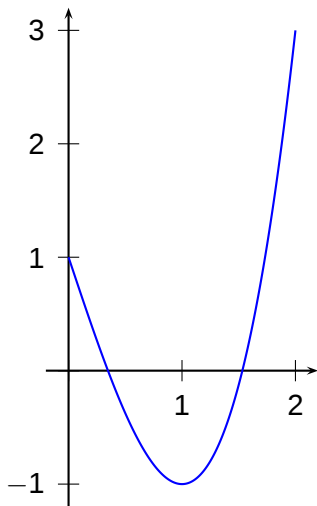
Úloha

Máme určit největší a nejmenší hodnotu funkce $f : y = x^3 - 3x + 1$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Řešení.

- $y' = 3x^2 - 3$; f má na $\langle 0, 2 \rangle$ jediný stacionární bod 1.
 - $f(1) = -1$
 - $f(0) = 1$,
 - $f(2) = 3$.
- Funkce f tedy nabývá největší hodnoty 3 v bodě 2 a nejmenší hodnoty -1 v bodě 1.





Obrázek: Globální extrémy funkce $y = x^3 - 3x + 1$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Konvexnost a konkávnost

- Označme $k(u, v) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$;
- je-li f funkce spojitá, je pro $u \neq v$ také funkce $k(u, v)$ spojitá vzhledem k u i vzhledem k v .
- Geometrický význam: $k(u, v)$ je **směrnice sečny** grafu funkce f .

Definice

Funkce f se nazývá **konvexní** (**konkávní**) na intervalu (a, b) $\iff$ pro každé tři body $x_1, x, x_2 \in (a, b)$, kde $x_1 < x < x_2$, platí

$$k(x_1, x) < k(x, x_2) \quad (k(x_1, x) > k(x, x_2)).$$

Funkce dle této definice je *ryze konvexní* nebo *konkávní*, při neostrých nerovnostech jde o neryzí vlastnosti.

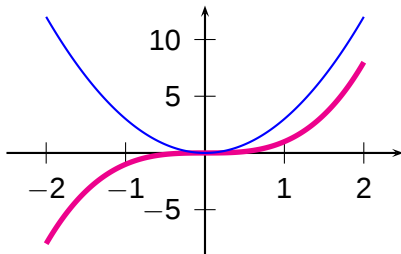
Konvexnost a konkávnost

Věta (1.věta o konvexnosti a konkávnosti)

- Necht' funkce f **má** na intervalu (a, b) **derivaci** f' .

Pak funkce f je na (a, b) **konvexní** (**konkávní**) $\iff$ je

- f' na (a, b) **rostoucí** (**klesající**).



Obrázek: Graf funkce $y = x^3$ a její první derivace $y = 3x^2$.

Konvexnost a konkávnost

Na funkci f' lze nyní použít větu o monotónnosti na intervalu:

Věta (2. věta o konvexnosti a konkávnosti)

Má-li funkce f druhou derivaci na (a, b) ,

pak tato funkce je na (a, b) **konvexní** (**konkávní**) $\iff$

- $\forall x \in (a, b)$ je $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$),
- přičemž neexistuje interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tak, aby $\forall x \in (\alpha, \beta)$ bylo $f''(x) = 0$.

Inflexe a inflexní body

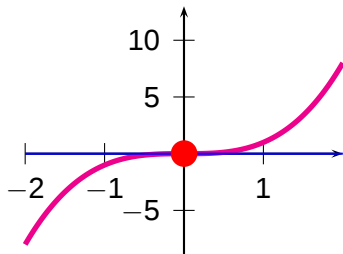
Definice

Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **inflexi** $\iff$

- má derivaci $f'(x_0)$ a je
 - v levém okolí $U(x_0-)$ **konvexní** (**konkávní**)
 - a v pravém okolí $U(x_0+)$ **konkávní** (**konvexní**).

Bod $[x_0, f(x_0)]$ roviny se nazývá **inflexní bod** funkce f ,
resp. grafu funkce f .

Inflexe a inflexní body



Obrázek: Graf funkce $y = x^3$, inflexního bodu $(0; 0)$ a inflexní tečny $y \equiv 0$.

- V inflexním bodě přechází funkce z konvexního průběhu na konkávní nebo naopak.
- *Inflexní tečna* v bodě „dotyku“ graf přechází z jedné poloroviny do druhé.
- Např. osa x je inflexní tečnou ke grafu funkce $y = x^3$.

Věta (vztah inflexe a derivace)

Má-li funkce f v nějakém okolí $U(x_0)$ derivaci f' , pak má v bodě x_0 inflexi $\Leftrightarrow$ má f' v bodě x_0 lokální extrém.

Věta (nutná podmínka existence inflexe)

Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi a existuje $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.

Důkaz plyne z nutné podmínky existence extrému funkce f' .

Vztah inflexe a derivace lze dalšími větami specifikovat pro případ existence druhé resp. i třetí derivace.

Věta (vztah inflexe a druhé derivace)

Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f''

- *a má-li tato derivace v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$ různá znaménka, má funkce f v bodě x_0 inflexi.*
- *Má-li f'' stejné znaménko v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$, pak funkce f v bodě x_0 inflexi nemá.*

Věta (vztah inflexe a 3. derivace)

- Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f'' ,
- platí $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$,
- pak funkce f má v bodě x_0 inflexi.

- Tuto větu bychom mohli rozšířit (podobně jako odpovídající pravidlo pro určování lokálního extrému) i na případ, kdy

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

- Pro k liché existuje v bodě x_0 inflexe,
- pro k sudé nikoli.

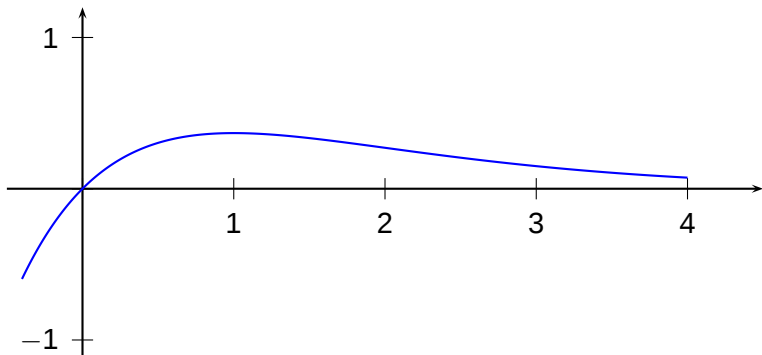
Úloha

Stanovte konvexnost, konkávnost a inflexi funkce $y = x e^{-x}$.

Řešení.

- Tato funkce má potřebné derivace, vypočteme:
- $y' = (1 - x) e^{-x}$,
- $y'' = (x - 2) e^{-x}$, kde $e^{-x} > 0$.
- Pro $x < 2$ je $y'' < 0$, funkce je konkávní,
- pro $x > 2$ je $y'' > 0$, funkce je konvexní.
- Pro $x = 2$ má funkce inflexi, inflexní bod je $[2; 2 e^{-2}]$.



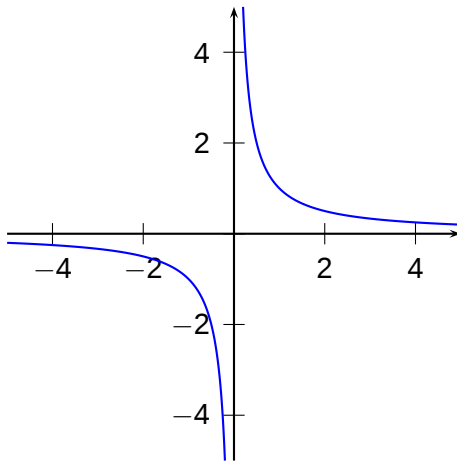


Obrázek: Graf funkce $y = x e^{-x}$ s inflexním bodem $[2; 2 e^{-2}]$.

Asymptoty

- Asymptoty jsou přímky,
 - představujeme si je jako tečny ke grafu funkce v nekonečnu.
 - Souřadnicové osy jsou asymptotami grafu funkce $y = 1/x$.
- Definujeme asymptoty dvou druhů (avšak z geometrického hlediska jde o tentýž jev).

Asymptoty



Obrázek: Asymptoty $y = 0$ a $x = 0$ grafu funkce $y = \frac{1}{x}$.

Asymptoty

Definice

Přímka $x = c$ se nazývá **vertikální asymptota** grafu funkce $f \iff$ funkce f má v bodě c alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní.

- I nekonečně mnoho: tangens.
- Kromě toho nejvýše dvě asymptoty s rovnicemi tvaru $y = kx + q$.

Definice

- Přímka $y = kx + q$ se nazývá **asymptota (se směrnicí)** grafu funkce $f \iff$
- pro $x \rightarrow -\infty$ nebo pro $x \rightarrow +\infty$ je $\lim[f(x) - (kx + q)] = 0$.

Asymptoty se směrnicí

Věta (o výpočtu asymptot)

Přímka $y = kx + q$ je asymptotou grafu funkce f $\iff$
existují limity (pro $x \rightarrow -\infty$ nebo pro $x \rightarrow +\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = q.$$

Praktický postup v běžných případech

- 1) Vyšetříme okolí těch hromadných bodů $D(f)$, které leží v $\mathbb{R} - D(f)$
 - (body nespojitosti - zejména izolované body množiny $\mathbb{R} - D(f)$ nebo krajní body intervalů, jež jsou součástí $D(f)$).
 - Zjistíme ve kterém z těchto bodů existují alespoň jednostranné nevlastní limity.
- 2) Je-li $+\infty$ nebo $-\infty$ hromadným bodem $D(f)$, hledáme $\lim \frac{f(x)}{x}$.
 - Jestliže tato limita (nebo obě) existuje, je to směrnice k asymptot, *pokud asymptoty existují*.
 - Dále ještě hledáme $\lim [f(x) - kx]$ s oním k , jež bylo vypočteno v předchozí limitě.
 - Existuje-li tato limita, je to q a asymptota existuje.

Při výpočtu $k = \lim \frac{f(x)}{x}$ lze použít l'Hospitalova pravidla, z něhož $k = \lim f'(x)$. Také tento vztah se často využívá k výpočtu směrnice asymptot (ovšem neexistuje-li $\lim f'(x)$, neznamená to neexistenci asymptot).

Úloha

Určete asymptoty pro funkci $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$.

Řešení.

- $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right) = \frac{1}{2}.$

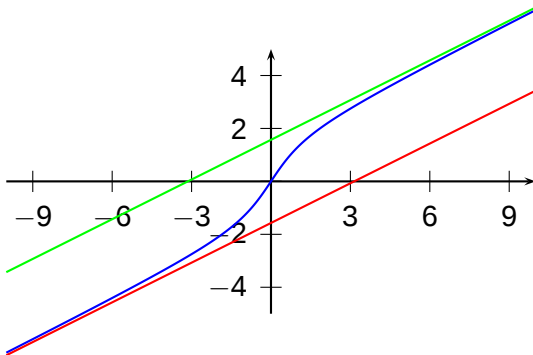
- Dále $q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x \right) = \pm \frac{\pi}{2}$

- Existují tedy 2 asymptoty:

$$y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } x \rightarrow -\infty \text{ a}$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \quad \text{pro } x \rightarrow +\infty.$$





Obrázek: Asymptoty $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}$ a $y = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}$ grafu funkce $y = \frac{x}{2} + \arctg x$.

Úloha

Určete asymptoty pro funkci $y = x + \sqrt{x}$.

Řešení.

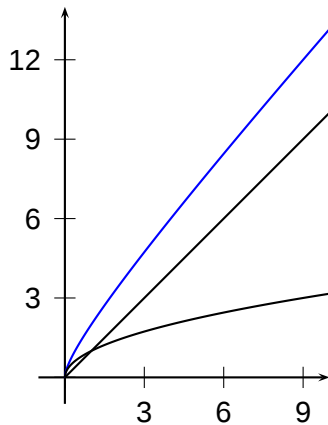
- Zde je nevlastním hromadným bodem $D(f)$ jen $+\infty$.
- Počítáme

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty,$$

- asymptota neexistuje.





Obrázek: Graf funkce $y = x + \sqrt{x}$ je bez asymptot.