

## Vyšetřování průběhu funkce a užití extrémů funkcí

Jiří Fišer

11. prosince 2009

# Průběh funkce

O vyšetřování průběhu funkce lze pojednat dvěma způsoby:

- uvést věcně, ze kterých činností se vyšetřování průběhu funkce skládá,
- popsat praktický postup při vyšetřování průběhu funkce.

# Věcný výčet činností při vyšetřování PF

- 1) Definiční obor, body nespojitosti.
- 2) Funkční obor, omezenost; nulové body funkce; intervaly, kde je funkce kladná, kde je záporná.
- 3) Funkční vlastnosti funkce: parita, periodičnost.
- 4) Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti funkce, v krajních bodech definičního oboru, resp. v  $-\infty$ ,  $+\infty$ .
- 5) Intervaly monotonnosti (kde funkce roste, kde klesá) nebo konstantnosti.
- 6) Lokální extrémy funkce.
- 7) Intervaly konvexnosti a konkávnosti.
- 8) Inflexe, inflexní body grafu funkce.
- 9) Asymptoty grafu funkce.
- 10) Sestrojení grafu funkce.

# Praktický postup při vyšetřování PF

V běžném případě sleduje i myšlenku správného a přehledného záznamu výsledků a mezivýsledků do tabulky:

- A. Zjistíme údaje potřebné pro sestavení tabulky, sestavíme tabulku a zaznamenáme do ní dosud známé údaje o funkci,
- B. postupně zjišťujeme další vlastnosti funkce a zaznamenáváme je do tabulky,
- C. doplníme údaje potřebné pro sestrojení grafu a sestrojíme graf funkce.

## Doporučené pořadí prací u bodu A.

- A1. Provedeme 1 (určíme  $D(f)$  a body nespojitosti).
- A2. Provedeme 3 (stanovení parity a periodičnosti), tj. zjistíme, zda bychom mohli zmenšit rozsah vyšetřování funkce tím, že se omezíme např. jen na interval  $\langle 0, +\infty \rangle$  nebo jen na jednu periodu u funkce periodické.
- A3. Vypočteme 1. derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme stacionární body. K nim přidáme ty body z  $D(f)$ , v nichž 1. derivace neexistuje. Má-li funkce lokální extrém, pak nastane v některém z těchto bodů.
- A4. Vypočteme 2. derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme body, v nichž může mít funkce inflexi. K nim přidáme ty body z  $D(f')$ , v nichž 2. derivace neexistuje.
- A5. Sestavíme tabulku, kde v horizontálním záhlaví zaznameneáme rozčlenění číselné osy s ohledem na A1, A2, A3, A4; ve vertikálním záhlaví jsou řádky pro  $x$ ,  $y$ ,  $y'$ ,  $y''$ , a pro záznam vlastností funkce  $f$ . Do tabulky přeneseme údaje již zjištěné.

## Doporučené pořadí prací u bodu B.

- B1. Užitím znaménka 1. derivace určíme 5 (intervaly monotonnosti).
- B2. Na základě B1 zjistíme 6 (lokální extrémy), včetně funkčních hodnot v těchto bodech.
- B3. Užitím znaménka 2. derivace určíme 7 (konvexnost a konkávnost).
- B4. Na základě B3 zjistíme 8 (inflexi), včetně funkčních hodnot v těchto bodech a hodnot 1. derivací.
- B5. Určíme 9 (asymptoty).
- B6. Určíme 4 (limity), pokud je to po B5 ještě třeba.
- B7. Určíme 2 (funkční obor, nulové body, znaménka funkce).

## Doporučené pořadí prací u bodu C.

- C1. Podle potřeby doplníme např. průsečík grafu funkce s osou  $y$ , hodnoty funkce v dalších bodech  $D(f)$ , případně i hodnoty derivací (připojíme k tabulce jako dodatek).
- C2. Provedeme bod 10 (sestrojíme graf funkce).

## Úloha

Sestavte tabulku pro vyšetření průběhu funkce  $y = x + \frac{1}{x}$ .

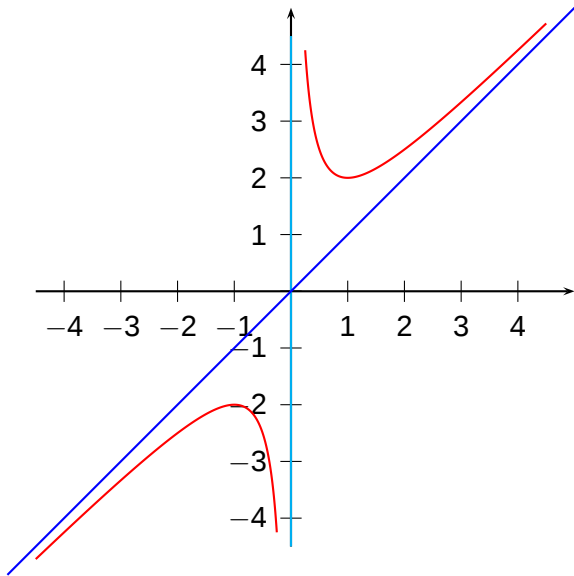
## Řešení.

$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , lichá, graf souměrný podle počátku.  
 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$ ;  $y' = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 1\}$  (stacionární body);  $y'' = \frac{2}{x^3} \neq 0$ .  
Sestavíme tabulku (např. jen) pro interval  $\langle 0, +\infty \rangle$ .

|       |      |                       |          |          |                |                       |
|-------|------|-----------------------|----------|----------|----------------|-----------------------|
| $x$   | 0    | $\rightarrow 0^+$     | $(0, 1)$ | 1        | $(1, +\infty)$ | $\rightarrow +\infty$ |
| $y$   | n.d. | $\rightarrow +\infty$ | —        | 2        | —              | $\rightarrow +\infty$ |
| $y'$  | n.d. | $\rightarrow -\infty$ | $< 0$    | 0        | $> 0$          | $\rightarrow +\infty$ |
| $y''$ | n.d. | —                     | $> 0$    | $> 0$    | $> 0$          | —                     |
| $fce$ | n.d. | $\rightarrow +\infty$ | klesá    | lok.min. | roste          | $\rightarrow +\infty$ |
|       |      | asymptota<br>$x = 0$  | konvexní |          |                | asymptota<br>$y = x$  |

Inflexní body neexistují.





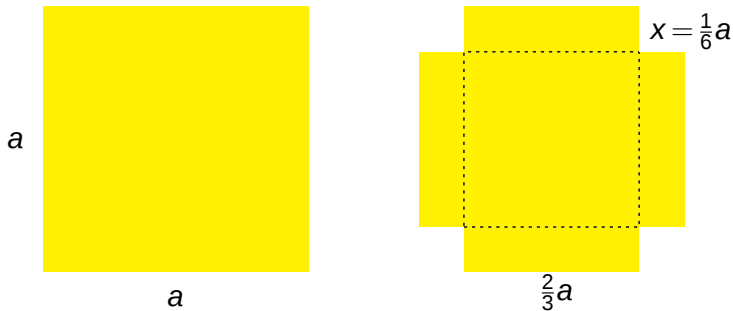
Obrázek: Graf funkce  $y = x + \frac{1}{x}$ , vertikální asymptota  $x = 0$  a asymptota se směrnici  $y = x$ .

# Užití extrémů funkcí

Na výpočet extrémů vede řada praktických úloh.

## Úloha

- Ze čtvercového listu papíru o straně  má být po vystřížení čtverečků (o straně ) v rozích složena krabice o maximálním objemu.
- Vypočtete stranu čtverečků, jež mají být v rozích vystříženy a rozměry výsledné krabice.



Obrázek: Budoucí krabice o maximálním objemu

## Řešení.

Výsledná krabice má rozměry

$$(a - 2x) \times (a - 2x) \times x.$$

Její objem je tedy:

$$V = (a - 2x)^2 x, \quad x \in \left(0; \frac{a}{2}\right)$$

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{a}{6}, \quad x_2 = \frac{a}{2}$$

( $x_2$  nevyhovuje praktické úloze);

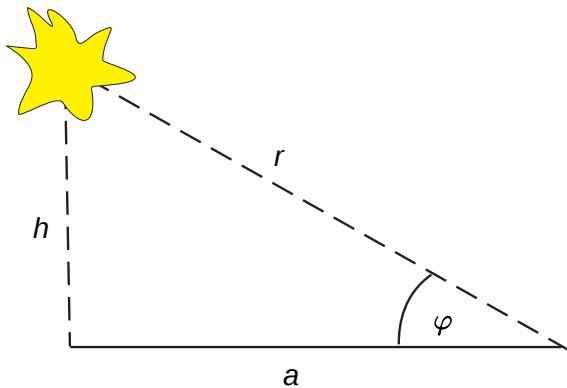
$$\frac{2}{3}a \times \frac{2}{3}a \times \frac{1}{6}a$$

- rozměry krabice jsou
- výška je rovna čtvrtině šířky čtvercového dna.



## Úloha

- Pracoviště je v konstantní vzdálenosti  $a$  od průmětu světla na vodorovnou rovinu.
- Při jaké výšce  $h$  světla je osvětlení pracoviště maximální?



Obrázek: Intenzita osvětlení

## Řešení.

Intenzita osvětlení závisí na vstupních podmínkách takto:

$$I = c \frac{\sin \varphi}{r^2},$$

kde

$$\sin \varphi = \frac{h}{r} \quad \text{a} \quad r = \sqrt{h^2 + a^2},$$

takže  $I = I(h)$ ; po dosazení

$$I = c \frac{h}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$I' = c \frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} (= 0) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0,7a.$$



# Užití extrémů funkcí

## Úloha

- Výkon Peltonova kola je  $P = k \cdot u \cdot (v - u)$ , kde
  - $u$  je obvodová rychlost Peltonova kola a
  - $v$  je rychlost vodního paprsku.
- Při jaké rychlosti  $u$  je výkon Peltonovy turbíny maximální?

## Řešení.

$$P = P(u), \quad P' = kv - 2ku (= 0) \implies u = \frac{v}{2}.$$



# Užití extrémů funkcí



Obrázek: Příliš mnoho plechu.

## Úloha

Určete rozměry konzerv tvaru rotačního válce o daném objemu  tak, aby se při jejich výrobě spotřebovalo **co nejmenší množství plechu**.

- Hledá se minimum funkce  $S = 2\pi xv + 2\pi x^2$ , kde
  - $x$  je poloměr dna konzervy a
  - $v$  výška konzervy,
  - za podmínky, že  $V = \pi x^2 v$  je zadané (tedy konstantní).
- Po dosazení za  $v$  z této podmínky ( $v = \frac{V}{\pi x^2}$ ) máme

$$S = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2, \quad \text{odkud} \quad S' = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x.$$

Z rovnice  $S' = 0$  máme  $x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$

$$v_0 = \frac{V}{\pi x_0^2} = \dots = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2x_0$$

Odsud je: výška konzervy je rovna průměru dna.