Cvičení č. 14 z KMA-MMAN2

26. 2. a 2. 3. 2009

1 Integrace racionálních funkcí — rozklad na parciální zlomky

1.1 Typy parciálních zlomků a jejich integrace

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

3. $$\int \frac{Ax+b}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{A}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+q-q+\frac{2b}{A}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+q}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\int \frac{-q+\frac{2b}{A}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{A}{2}\left(-q+\frac{2b}{A}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} = \cdots.$$

4. $$\frac{Ax+b}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{A}}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\int \frac{2x+q-q+\frac{2b}{A}}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+q}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x + \frac{A}{2}\int \frac{-q+\frac{2b}{A}}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{A}{2}\frac{1}{k-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{A}{2}\left(-q+\frac{2b}{A}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^k} = \cdots.$$

Typy 3. a 4. mají ve svých jmenovatelích nerozložitelné polynomy (nemají reálné kořeny).

Úloha 1.1 (Příklad dopočtu 3. typu). $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+1)+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$

Úloha 1.2 (Příklad dopočtu 4. typu). $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x^2+2x+1)+2]^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+1)^2+2]^2} = \left[\begin{array}{c} u=x+1 \\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+2)^2} = \frac{1}{4}\frac{u}{2+u^2} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} = \frac{1}{4}\frac{u}{2+u^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{1}{4}\frac{u}{2+u^2}+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C = \frac{1}{4}\frac{x+1}{2+(x+1)^2}+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$

1.2 Postup při integraci racionálních funkcí $P(x)/Q(x)$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy:

Při jejich integrování převádíme racionální funkci na uvedené základní typy, přičemž využíváme poznatků z algebry.

Algoritmus:

(1) Je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, přejdeme na krok (2). Jinak užitím dělení upravíme funkci na tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $A(x)$ je polynom, který již dovedeme integrovat a $R(x)$ (zbytek dělení) je polynom stupně nižšího než $Q(x)$; tedy: *snížíme stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele.*

(2) Je-li jmenovatel rozložen na lineární kořenové činitele a nerozložitelné kvadratické polynomy, přejdeme na bod (3), jinak tento *rozklad jmenovatele* provedeme.

(3) Je-li ve jmenovateli jen jeden kořenový činitel nebo jeho mocnina nebo jen jeden nerozložitelný kvadratický polynom nebo jeho mocnina, přejdeme na bod (4); jinak provedeme *rozklad zlomku $R(x)/Q(x)$ na parciální zlomky.*

(4) *Integrujeme* všechny komponenty rozkladu funkce $y = P(x)/Q(x)$.

1.3 Příklady na integraci racionálních funkcí

Úloha 1.3. *Najděte primitivní funkci* $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.

Řešení. Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3},$$

odkud

$$x = A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2).$$

Dosazením

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & = & -1: & -1 & = & -4A & \Rightarrow & A & = & \frac{1}{4} \\ x & = & -2: & -2 & = & 5B & \Rightarrow & B & = & -\frac{2}{5} \\ x & = & 3: & 3 & = & 20C & \Rightarrow & C & = & \frac{3}{20} \end{array}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + \frac{3}{20}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} =$$
$$= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{2}{5}\ln|x+2| + \frac{3}{20}\ln|x-3| + c\ .$$

□

Úloha 1.4. *Najděte primitivní funkci* $\displaystyle\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Vydělením a rozkladem jmenovatele dostaneme

$$\frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} = x + \frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{6x^2+x-2}{(x-1)(2x^2+2x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{2x^2+2x+1}$$

odkud

$$6x^2+x-2 = A(2x^2+2x+1) + (Bx+C)(x-1)\,.$$

Dosazením

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & = & 1: & 5 & = & 5A & \Rightarrow & A & = & 1 \end{array}$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x^2: & & 6 & = & 2A+B & \Rightarrow & B & = & 4 \\ x^0: & & -2 & = & A-C & \Rightarrow & C & = & 3\,. \end{array}$$

Je tedy

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zlomek $\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}$ je parciální zlomek 2. druhu, při jeho integraci postupujeme následovně

$$\int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x\,,$$

první integrál vpravo řešíme substitucí $t = 2x^2+2x+1$, pak $\mathrm{d}t = (4x+2)\,\mathrm{d}x$ a po dosazení

$$\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln(2x^2+2x+1)\,,$$

ve druhém integrálu upravíme nejprve jmenovatele

$$\begin{aligned} 2x^2+2x+1 = 2[x^2+x]+1 = 2[(x+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}]+1 = 2(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{2} = \\ = \tfrac{1}{2}[4(x+\tfrac{1}{2})^2+1] = \tfrac{1}{2}[(2x+1)^2+1] \end{aligned}$$

a dále substitucí $t = 2x+1$, pak $\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x$ a po dosazení

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+2x+1} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{(2x+1)^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg}(2x+1)\,.$$

Výsledkem je tedy

$$\int \frac{2x^4+5x^2-2}{2x^3-x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x^2 + \ln|x-1| + \ln(2x^2+2x+1) + \operatorname{arctg}(2x+1) + c\,.$$

□

Úloha 1.5. *Najděte primitivní funkci* $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Úpravou jmenovatele

$$x^5+x^4-x^3-x^2 = x^2(x^3+x^2-x-1) = x^2(x+1)(x^2-1) = x^2(x+1)^2(x-1)$$

a rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x-1}\,.$$

Máme

$$\begin{aligned} x^4+1 \;=\; & Ax(x+1)^2(x-1) + B(x+1)^2(x-1) + \\ & + Cx^2(x^2-1) + Dx^2(x-1) + Ex^2(x+1)^2, \end{aligned}$$

odkud dosazením

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & = & 0: & 1 & = & -B & \Rightarrow & B & = & -1 \\ x & = & -1: & 2 & = & -2D & \Rightarrow & D & = & -1 \\ x & = & 1: & 2 & = & 4E & \Rightarrow & E & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{array}{rcl} x^4: & 1 & = A + C + E \\ x^1: & 0 & = -A - B \end{array}$$

dostaneme $A = 1$, $B = -1$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = -1$, $E = \frac{1}{2}$.

Je tedy

$$\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} =$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c\ .$$

□

1.4 Integrace některých iracionálních funkcí

Úloha 1.6. *Vypočtěte* $I = \int \frac{\sqrt[6]{x}}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{4x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \int \frac{\sqrt[6]{x}}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{4x}}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} \mathrm{NSN}\,\{2,3,6\} = 12 \\ x = t^{12} \\ \mathrm{d}x = 12t^{11}\,\mathrm{d}t \end{array}\right] =$

$$= \int \frac{\sqrt[6]{t^{12}}}{2\sqrt[3]{t^{12}} + \sqrt[2]{4t^{12}}} 12t^{11}\,\mathrm{d}t = 12\int \frac{t^{13}}{2t^4+2t^6}\,\mathrm{d}t = 12\int \frac{t^9}{2+2t^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 6\int \frac{t^9}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 6\int \left(t^7 - t^5 + t^3 - t + \frac{t}{t^2+1}\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= 6\left(\frac{t^8}{8} - \frac{t^6}{6} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|t^2+1|\right) + C =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} + 3\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.$$

□

Úloha 1.7. *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x+1)}}$.

Řešení. $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x-1)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x-1)\frac{(x-1)}{(x-1)}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^3\frac{(2x-1)}{(x-1)}}} =$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x-1}}} = \left[\begin{array}{l} \boxed{\dfrac{2x-1}{x-1} = t^3}, \quad 2x-1 = (x-1)t^3, \\ 2x - xt^3 = 1 - t^3, \quad x(2-t^3) = 1-t^3, \quad \boxed{x = \dfrac{1-t^3}{2-t^3}}, \\ \mathrm{d}x = \dfrac{-3t^2(2-t^3) - (1-t^3)(-3t^2)}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}x = \dfrac{-6t^2 + 3t^5 + 3t^2 - 3t^5}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t, \quad \boxed{\mathrm{d}x = \dfrac{-3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t} \end{array}\right] =$$

$$= \int \frac{\frac{-3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t}{\left(\frac{1-t^3}{2-t^3} - 1\right)\sqrt[3]{t^3}} = \int \frac{\frac{-3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1-t^3-2+t^3}{2-t^3}t} = \int \frac{-\frac{3t^2}{(2-t^3)^2}\,\mathrm{d}t}{-\frac{t}{2-t^3}} =$$

$$= \int \frac{3t^2}{(2-t^3)^2}\frac{2-t^3}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{3t}{2-t^3}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{3t}{(t-\sqrt[3]{2})(t^2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \dfrac{-3t}{(t-\sqrt[3]{2})(t^2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})} = \dfrac{A}{t-\sqrt[3]{2}} + \dfrac{Bt+C}{t^2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}} \\ \vdots \end{array}\right] = \dots. \qquad \square$$

1.5 Eulerovy substituce

Používají se pro výpočet integrálů typu $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\,\mathrm{d}x$, kde R je racionální funkce dvou proměnných. Účelem substituce je převést integrování iracionální funkce na integrování funkce racionální. Eulerovy substituce jsou tři:

(1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ [pro $a > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy ax^2.

(2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ [pro $c > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy c a rovnost lze dělit x.

(3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$ [kde λ je reálný kořen]; hlavní myšlenka: po umocnění lze rovnost dělit kořenovým činitelem $(x-\lambda)$.

Po nalezení integrálu z příslušné racionální funkce se vracíme k původní proměnné, tj. dosadíme

- při 1. substituci $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x$,
- při 2. substituci to je $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c}}{x}$,
- a při 3. dosadíme $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\lambda}$.

Úloha 1.8. *Ověřte, že při výpočtu* $\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x$ *lze použít všechny tři substituce. Ve všech případech převeďte integrál na integrál z funkce racionální.*

Řešení. $a = 4 > 0$, $c = 1 > 0$, a uvedený trojčlen má reálné kořeny, takže jsou splněny předpoklady pro všechny tři Eulerovy substituce:

1.ES: Při použití 1. substituce máme $\sqrt{4x^2+5x+1} = 2x + t$, a tedy

$$\begin{aligned}
4x^2+5x+1 &= 4x^2+4xt+t^2,\\
5x+1 &= 4xt+t^2,\\
5x-4xt &= t^2-1,\\
x(5-4t) &= t^2-1,\\
\boxed{x} &= \boxed{\frac{t^2-1}{5-4t}},\\
\mathrm{d}x &= \frac{2t(5-4t)-(t^2-1)(-4)}{(5-4t)^2}\,\mathrm{d}t,\\
\mathrm{d}x &= \frac{10t-8t^2+4t^2-4}{(5-4t)^2}\,\mathrm{d}t,\\
\boxed{\mathrm{d}x} &= \boxed{\frac{10t-4t^2-4}{(5-4t)^2}\,\mathrm{d}t},\\
\sqrt{4x^2+5x+1} &= 2x+t,\\
\sqrt{4x^2+5x+1} &= 2\frac{t^2-1}{5-4t}+t,\\
\sqrt{4x^2+5x+1} &= \frac{2t^2-2+5t-4t^2}{5-4t},\\
\boxed{\sqrt{4x^2+5x+1}} &= \boxed{\frac{-2t^2+5t-2}{5-4t}}.
\end{aligned}$$

Vrátíme se k integrálu a dosadíme:

$$\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2-1}{5-4t}\cdot\frac{-2t^2+5t-2}{5-4t}\cdot\frac{10t-4t^2-4}{(5-4t)^2}\,\mathrm{d}t = \cdots =$$

$$\frac{1}{96}\,t^3-\frac{17}{256}\,t-\frac{243}{2048}\,\frac{1}{(-5+4\,t)^3}-\frac{405}{2048}\,\frac{1}{(-5+4\,t)^2}+\frac{81}{2048}\,\frac{1}{(-5+4\,t)}-$$

$$-\frac{45}{512}\,\ln\left(-5+4\,t\right)+C=\left[\text{za } t \text{ dosadíme } \sqrt{4x^2+5x+1}-2x\right]=$$

$$=\frac{1}{96}\,\left(\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-2\,x\right)^3-\frac{17}{256}\,\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}+\frac{17}{128}\,x-$$

$$=\frac{243}{2048}\,\frac{1}{\left(-5+4\,\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-8\,x\right)^3}-$$

$$-\frac{405}{2048}\,\frac{1}{\left(-5+4\,\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-8\,x\right)^2}+$$

$$+\frac{81}{2048}\,\frac{1}{\left(-5+4\,\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-8\,x\right)}-$$

$$-\frac{45}{512}\,\ln\left(-5+4\,\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-8\,x\right)+C.$$

2.ES: Při použití 2. substituce máme $\sqrt{4x^2+5x+1}=xt+1$, a tedy:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2+5x+1} &= xt+1,\\
4x^2+5x+1 &= x^2t^2+2xt+1,\\
4x^2+5x &= x^2t^2+2xt,\\
4x+5 &= xt^2+2t,\\
4x-xt^2 &= 2t-5,\\
\boxed{x} &= \boxed{\frac{2t-5}{4-t^2}},\\
\mathrm{d}x &= \frac{2(4-t^2)-(2t-5)(-2)}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,\\
\boxed{\mathrm{d}x} &= \boxed{\frac{-2t^2+4t-2}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t},\\
\sqrt{4x^2+5x+1} &= \frac{2t-5}{4-t^2}t+1\\
\boxed{\sqrt{4x^2+5x+1}} &= \boxed{\frac{2t^2-t-t^3}{4-t^2}}.
\end{aligned}$$

Vrátíme se k integrálu a dosadíme:

$$\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2t-5}{4-t^2}\cdot\frac{2t^2-t-t^3}{4-t^2}\cdot\frac{-2t^2+4t-2}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$= \int \left(-\frac{1}{64}\,\frac{1}{(t-2)^4} - \frac{3}{128}\,\frac{1}{(t-2)^3} + \frac{23}{512}\,\frac{1}{(t-2)^2} + \frac{27}{256}\,\frac{1}{(t-2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{729}{64}\,\frac{1}{(t+2)^4} - \frac{1539}{128}\,\frac{1}{(t+2)^3} + \frac{1809}{512}\,\frac{1}{(t+2)^2} - \frac{27}{256}\,\frac{1}{(t+2)} \right) \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{192}\,\frac{1}{(t-2)^3} + \frac{3}{256}\,\frac{1}{(t-2)^2} - \frac{23}{512}\,\frac{1}{(t-2)} + \frac{27}{256}\,\ln(t-2) -$$
$$- \frac{243}{64}\,\frac{1}{(t+2)^3} + \frac{1539}{256}\,\frac{1}{(t+2)^2} - \frac{1809}{512}\,\frac{1}{(t+2)} - \frac{27}{256}\,\ln(t+2) + C =$$
$$= \left[\text{za } t \text{ dosadíme } \frac{\sqrt{4x^2+5x+1}-1}{x}\right] =$$
$$= \frac{1}{192}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x} - 2\right)^{-3} + \frac{3}{256}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x} - 2\right)^{-2} -$$
$$\frac{23}{512}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x} - 2\right)^{-1} + \frac{27}{256}\ln\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x} - 2\right) -$$
$$\frac{243}{64}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x} + 2\right)^{-3} + \frac{1539}{256}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x} + 2\right)^{-2} -$$
$$\frac{1809}{512}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x} + 2\right)^{-1} - \frac{27}{256}\ln\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}-1}{x} + 2\right) +$$
C.

3.ES: Při použití 3. substituce máme

$$\sqrt{4x^2+5x+1} = \sqrt{(x+1)(4x+1)} = \sqrt{4(x+1)(x+\frac{1}{4})} = t(x+1),$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+1)(4x+1)} &= t(x+1),\\
(x+1)(4x+1) &= t^2(x+1)^2,\\
(4x+1) &= t^2(x+1),\\
4x - xt^2 &= t^2 - 1,\\
\boxed{x} &= \boxed{\frac{t^2-1}{4-t^2}},\\
\mathrm{d}x &= \frac{2t(4-t^2)-(t^2-1)(-2t)}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,\\
\boxed{\mathrm{d}x} &= \boxed{\frac{6t}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t}.
\end{aligned}$$

Vrátíme se k integrálu a dosadíme:

$$\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2-1}{4-t^2}\cdot t\left(\frac{t^2-1}{4-t^2}+1\right)\cdot\frac{6t}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{t^2-1}{4-t^2}\cdot\left(\frac{3t}{4-t^2}\right)\cdot\frac{6t}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 18\int\frac{(t^2-1)t^2}{(4-t^2)^4}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{18}{13}\,t^{13} - \frac{306}{11}\,t^{11} + 224\,t^9 - \frac{6336}{7}\,t^7 + \frac{9216}{5}\,t^5 - 1536\,t^3 + C =$$

$$= \left[\text{za } t \text{ dosadíme } \frac{\sqrt{4x^2+5x+1}}{x+1}\right] =$$

$$= \frac{18}{13}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^{13} - \frac{306}{11}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^{11} +$$

$$+224\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^{9} - \frac{6336}{7}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^{7} +$$

$$+\frac{9216}{5}\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^{5} - 1536\left(\frac{\sqrt{4\,x^2+5\,x+1}}{(x+1)}\right)^{3} + C.$$

□