

Cvičení č. 15 z KMA-MMAN2

5. a 9. března 2009

Newtonův vzorec

Věta 0.1 (Newtonův vzorec). *Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a má tu (zobecněnou) primitivní funkci F . Pak platí*

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_{x=a}^b = F(b) - F(a).$$

1 Integrace goniometrických funkcí

Přehled substitucí pro $\int R(\cos x, \sin x) \, dx$, kde R je racionální funkce dvou proměnných:

- (1) $\sin x = t$, pokud $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,
- (2) $\cos x = t$, pokud $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,
- (3) $\operatorname{tg} x = t$, pokud $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$,
- (4) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ (univerzální substituce). $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$,
 $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Převeďte na integrál z racionální funkce:

Úloha 1.1. $I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

$$\text{Řešení. } I = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2 \, dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2 \, dt}{2t + 1 - t^2} = \dots \quad \square$$

Úloha 1.2. $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx$.

Řešení. $I = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right] = \int t^3 \, dt = \left[\frac{1}{4} t^4 \right] = \frac{1}{4} [\sin^4 x]_{x=0}^{\pi/2} =$
 $= \frac{1}{4}(1 - 0) = \frac{1}{4}. \quad \square$

Úloha 1.3. $I = \int_{-\pi/4}^0 \cos^5 2x \sin 2x \, dx$.

Řešení. $I = \left[\begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -2 \sin 2x \, dx = dt \\ \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int t^5 \, dt = -\frac{1}{12} [t^6] =$
 $= -\frac{1}{12} [\cos^6 2x]_{x=-\pi/4}^0 = -\frac{1}{12} (\cos^6 0 - \cos^6(-\pi/2)) = -\frac{1}{12} (1 - 0) = -\frac{1}{12}. \quad \square$

Úloha 1.4. Vypočítejte $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx$ takto: Čtyřmi různými substitucemi převeďte příslušný neurčitý integrál $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx$ na integrál z racionální funkce, z těchto čtyř výsledků vyberte ten nejjednodušší a příklad dopočítejte jen tímto jedním způsobem.

Řešení.

$$t = \sin x : \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{array} \right] = \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \cos x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{1 - \sin^2 x} \cos x \, dx = \int \frac{t^3}{1 - t^2} \, dt$$

$$t = \cos x : \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} \, dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x \, dx \\ -dt = \sin x \, dx \end{array} \right] = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \sin x \, dx =$$

$$= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - t^2}{t} (-dt) = \int \frac{t^2 - 1}{t} \, dt =$$

$$= \boxed{\int \left(t - \frac{1}{t} \right) \, dt}$$

$$\begin{aligned}
t = \operatorname{tg} x : \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right] = \int \frac{\sin^3 x \cos x}{\cos^2 x} dx = \\
&= \int \frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cos^4 x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cos^4 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \\
&= \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 \\ \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2 + 1} \\ \cos^4 x = \frac{1}{(1+t^2)^2} \end{array} \right] = \int t^3 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} : \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2 dt}{1+t^2} = \\
&= \int \frac{16t^3}{(1+t^2)^3(1-t^2)} dt
\end{aligned}$$

Dopocítáme nejjednodušší tvar (v rámečku):

$$\int \left(t - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \ln |t| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C.$$

Určitý integrál:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \left[\frac{\cos^2 x}{2} - \ln |\cos x| \right]_{x=0}^{\pi/4} = \\
&= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{2} - \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| - \left(\frac{\cos^2 0}{2} - \ln |\cos 0| \right) = \\
&= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} - \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| - \left(\frac{1}{2} - \ln |1| \right) = \frac{1}{4} - \ln \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \\
&= \frac{1}{4} - \ln |2^{-\frac{1}{2}}| - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}.
\end{aligned}$$

□

Integrace součinu goniometrických funkcí

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x],$$

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2} [\sin(n-m)x + \sin(n+m)x],$$

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x],$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Úloha 1.5. Vypočtěte $I = \int \sin 3x \sin 4x \, dx$.

Řešení. Integrand upravíme pomocí vzorce v rámečku:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{2} [\cos(3-4)x - \cos(3+4)x] \, dx = \frac{1}{2} \int [\cos(-x) - \cos 7x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \cos(x) \, dx - \int \cos 7x \, dx \right) = \frac{1}{2} \left(\sin(x) - \frac{\sin 7x}{7} \right) + C. \end{aligned}$$

□

2 Goniometrické a hyperbolické substituce

Přehled substitucí:

$$(1) \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \text{ substituce } x = a \sin t \text{ (nebo } x = a \operatorname{th} t),$$

$$(2) \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \text{ substituce } x = a \operatorname{tg} t \text{ (nebo } x = a \operatorname{sh} t),$$

$$(3) \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \text{ substituce } x = \frac{a}{\cos t} \text{ (nebo } x = a \operatorname{ch} t).$$

Úloha 2.1. Vypočtete $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx$.

Řešení. Zřejmě jde o případ (1), kde $a = 1$. Použijeme substituci $x = 1 \sin t$.

$$\begin{aligned} I &= \int x\sqrt{1-x^2} dx = \left[\begin{array}{c} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ 1-x^2 = 1-\sin^2 t = \cos^2 t \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=1 \Rightarrow t=\pi/2 \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin t \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt = \left[\begin{array}{c} z = \cos t \\ dz = -\sin t dt \\ -dz = \sin t dt \end{array} \right] = \\ &= - \int_{\cos t=1}^{\cos t=0} z^2 dz = \left[-\frac{1}{3} z^3 \right]_{z=1}^{\cos t=0} = \left[-\frac{1}{3} \cos^3 t \right]_{t=0}^{\pi/2} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Při přechodu od x k t jsme meze transformovali, ve druhém případě ne, stačilo, že jsme se nakonec vrátili k proměnné t . $\square$

Úloha 2.2. Vypočtete $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4x + 7)^3}}$.

Řešení. Nejprve je potřeba převést integrand na potřebný tvar (pomocí doplnění na čtverec a substituce:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4x + 7)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{[(x+2)^2 + 3]^3}} = \left[\begin{array}{c} z = x+2 \\ dz = dx \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dz}{\sqrt{[z^2 + 3]^3}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + 3}^3} = \left[\begin{array}{l} \text{subst. \text{č.} (2), kde } a = \sqrt{3} \\ z = \sqrt{3} \operatorname{tg} t \\ dz = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} dt \\ z^2 + 3 = 3 \operatorname{tg}^2 t + 3 = \\ = 3(\operatorname{tg}^2 t + 1) = 3 \frac{1}{\cos^2 t} \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}}{\sqrt{3 \frac{1}{\cos^2 t}}^3} dt = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}}{(\sqrt{3} \frac{1}{\cos t})^3} dt = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}} dt = \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{\cos^3 t}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{3}} \right) + C = \\
&= \frac{1}{3} \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{3}} \right) + C. \quad \square
\end{aligned}$$

Úloha 2.3. Vypočtete $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} dx$.

$$\begin{aligned}
\text{Řešení. } I &= \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} dx = \left[\begin{array}{l} \text{subst. \text{č.} (3), kde } a = 1 \\ x = \frac{1}{\cos t} \\ dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \operatorname{tg} t \frac{1}{\cos t} dt \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos t}\right)^2 - 1}}{\left(\frac{1}{\cos t}\right)^2} \operatorname{tg} t \frac{1}{\cos t} dt = \int \frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}}{\frac{\cos t}{\cos^2 t}} \operatorname{tg} t dt = \int \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}}}{\frac{1}{\cos t}} \operatorname{tg} t dt = \\
&= \int \sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \cos t \operatorname{tg} t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} \cos t \operatorname{tg} t dt = \int \sin t \operatorname{tg} t dt = \dots \quad \square
\end{aligned}$$

2.1 Užití Eulerových vzorců pro výpočet některých integrálů

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}).$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Úloha 2.4. Vypočtěte $I = \int e^{2x} \cos x \, dx$.

Řešení.

$$\begin{aligned} I &= \left[\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \right] = \int e^{2x} \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int e^{2x+ix} \, dx + \int e^{2x-ix} \, dx \right) = \frac{1}{2} \left(\int e^{(2+i)x} \, dx + \int e^{(2-i)x} \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+i} e^{(2+i)x} + \frac{1}{2-i} e^{(2-i)x} \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2+i} \frac{2-i}{2-i} e^{(2+i)x} + \frac{1}{2-i} \frac{2+i}{2+i} e^{(2-i)x} \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2-i}{5} e^{(2+i)x} + \frac{2+i}{5} e^{(2-i)x} \right) + C = \\ &= \frac{1}{10} ((2-i) e^{(2+i)x} + (2+i) e^{(2-i)x}) + C = \\ &= \frac{1}{10} e^{2x} ((2-i) e^{ix} + (2+i) e^{-ix}) + C = \\ &= \frac{1}{10} e^{2x} ((2-i)(\cos x + i \sin x) + (2+i)(\cos x - i \sin x)) + C = \\ &= \frac{1}{10} e^{2x} (2 \cos x + \sin x - i \cos x + 2i \sin x + \\ &\quad + 2 \cos x + \sin x + i \cos x - 2i \sin x) + C = \\ &= \frac{1}{10} e^{2x} (4 \cos x + 2 \sin x + i(-\cos x + 2 \sin x + \cos x - 2 \sin x)) + C = \\ &= \frac{1}{5} e^{2x} (2 \cos x + \sin x) + C. \end{aligned}$$

□