

Cvičení č. 17 z KMA-MMAN2

19. a 23. 3. 2009

1 Věta o střední hodnotě integrálního počtu

Věta 1.1 (o střední hodnotě integrálního počtu). *Nechť $f \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí $m \leq f(x) \leq M$. Pak existuje číslo $\mu \in \langle m, M \rangle$ tak, že*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \mu(b - a).$$

Je-li f spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a)f(\xi).$$

Úloha 1.2. *Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu určete střední hodnotu μ funkce:*

$$y = \sqrt{x} \text{ na intervalu } \langle 0, 4 \rangle.$$

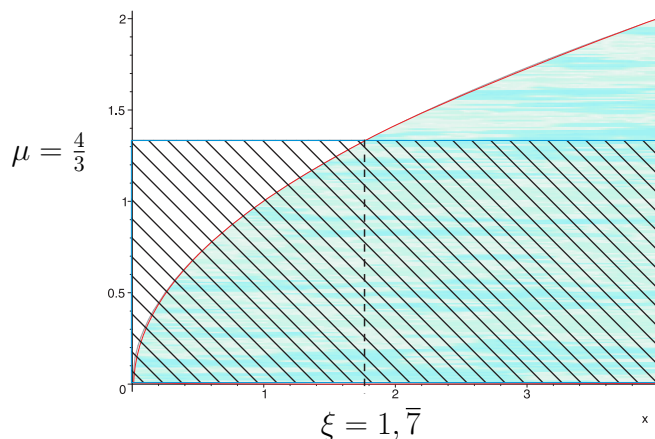
Řešení. Podle věty o střední hodnotě μ vypočteme následovně:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \mu(b - a) \implies \mu = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{(b - a)} = \frac{\int_0^4 \sqrt{x} \, dx}{(4 - 0)} = \frac{4}{3}.$$

Funkce $\sqrt{x}$ je na $\langle 0, 4 \rangle$ spojitá, takže existuje příslušné ξ :

$$\mu = f(\xi), \quad \frac{4}{3} = \sqrt{\xi} \implies \xi = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} = 1, \bar{7}.$$

Situaci ilustruje následující obrázek:



□

Úloha 1.3. Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu určete střední hodnotu μ funkce:

$$y = \sin x \text{ na intervalu } \langle 0, \pi \rangle.$$

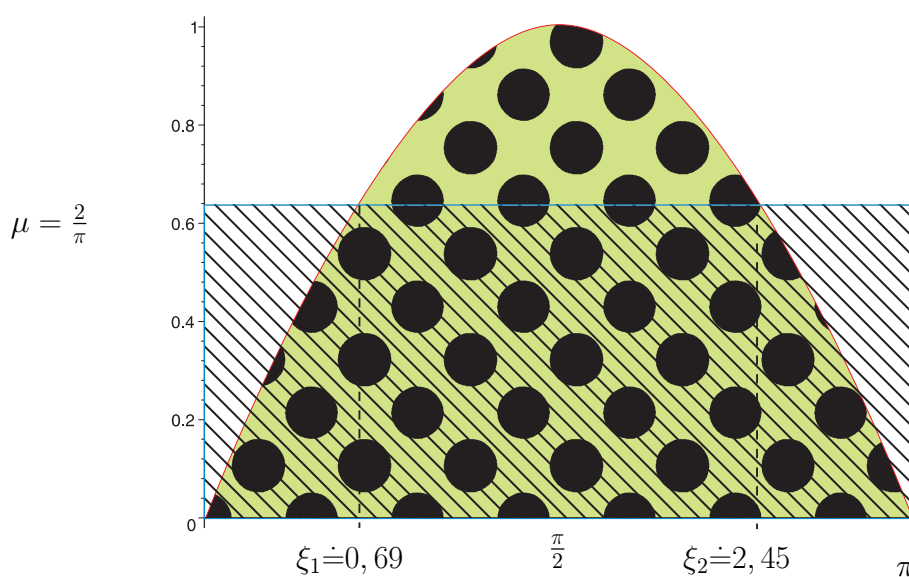
Řešení. Podle věty o střední hodnotě μ vypočteme následovně:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a) \implies \mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)} = \frac{\int_0^\pi \sin x dx}{(\pi-0)} = \frac{2}{\pi}.$$

Funkce $\sin x$ je na $\langle 0, \pi \rangle$ spojitá, takže existuje příslušné ξ (dokonce dvě):

$$\mu = f(\xi), \quad \frac{2}{\pi} = \sin \xi \implies \xi_1 = \arcsin \frac{2}{\pi} \doteq 0,69, \quad \xi_2 = \pi - \xi_1 \doteq 2,45.$$

Situaci ilustruje následující obrázek:



□

2 Aplikace určitého integrálu v geometrii

2.1 Vzorce pro obsah a délku

	Obsah	Délka křivky
Explicitně	$\int_a^b f(x) dx$	$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$
Parametricky	$\left \int_\alpha^\beta y dx \right = \left \int_\alpha^\beta \psi(t) \varphi'(t) dt \right $	$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$
Polárně	$\frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) d\varphi$	$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi$

2.2 Plocha rovinných obrazců

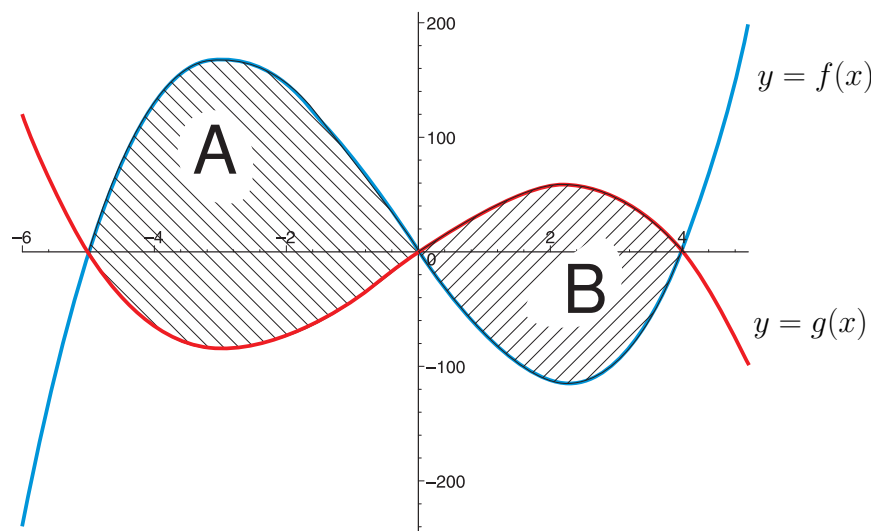
Úloha 2.1. Grafy funkcí f a g vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočtete obsah této plochy, jestliže:

$$f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 80x, \quad g(x) = -2x^3 - 2x^2 + 40x.$$

Řešení. Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

Průsečíky: $f(x) = g(x) \implies x_1 = -5, x_2 = 0, x_3 = 4.$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:



Ze znalosti vzájemné velikosti $f(x)$ a $g(x)$ na intervalech $\langle -5, 0 \rangle$ a $\langle 0, 4 \rangle$ dostaneme plochy oblastí A a B :

$$P = P_A + P_B = \int_{-5}^0 (f(x) - g(x)) \, dx + \int_0^4 (g(x) - f(x)) \, dx,$$

pokud bychom neznali jejich uspořádání, stačí vzít:

$$P = P_A + P_B = \left| \int_{-5}^0 (f(x) - g(x)) \, dx \right| + \left| \int_0^4 (f(x) - g(x)) \, dx \right|,$$

nebo dokonce

$$P = \int_{-5}^4 |f(x) - g(x)| \, dx.$$

Pro konečný výpočet použijeme prostřední vztah:

$$\begin{aligned} \int (f(x) - g(x)) \, dx &= \int ((4x^3 + 4x^2 - 80x) - (-2x^3 - 2x^2 + 40x)) \, dx \\ &= \int (6x^3 + 6x^2 - 120x) \, dx = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \left| \int_{-5}^0 (f(x) - g(x)) \, dx \right| + \left| \int_0^4 (f(x) - g(x)) \, dx \right| \\
&= \left| \left[\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 \right]_{-5}^0 \right| + \left| \left[\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 \right]_0^4 \right| \\
&= \left| \frac{1625}{2} \right| + |-448| = \frac{2521}{2}.
\end{aligned}$$

□

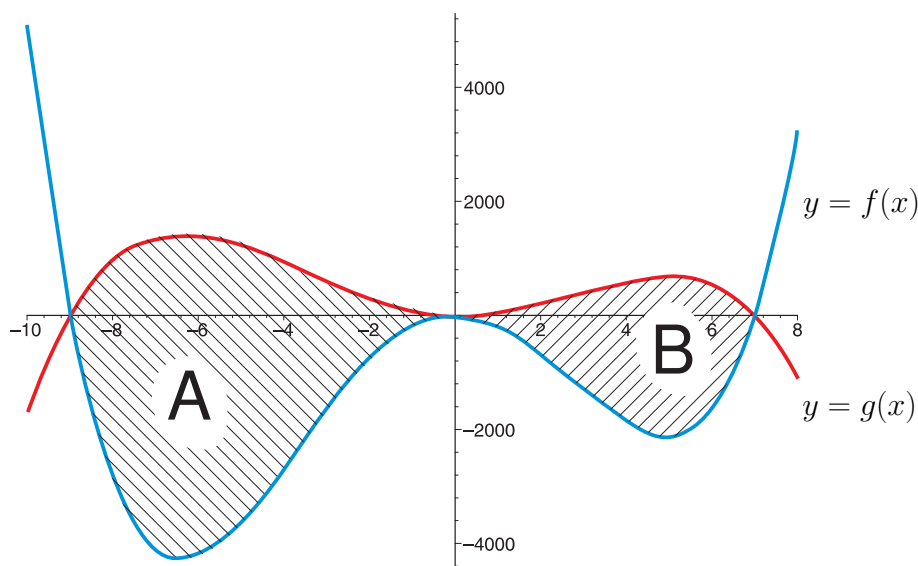
Úloha 2.2. Grafy funkcí f a g vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočtěte obsah této plochy, jestliže:

$$f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 189x^2, \quad g(x) = -x^4 - 2x^3 + 63x^2.$$

Řešení. Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

$$\text{Průsečíky: } f(x) = g(x) \implies x_1 = -9, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 7.$$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:



Nebudeme hledat uspořádání funkcí na intervalech $\langle -9, 0 \rangle$ a $\langle 0, 7 \rangle$, a přímo vezmeme:

$$P = P_A + P_B = \left| \int_{-9}^0 (f(x) - g(x)) \, dx \right| + \left| \int_0^7 (f(x) - g(x)) \, dx \right|.$$

$$\begin{aligned}
\int (f(x) - g(x)) \, dx &= \int \left((3x^4 + 6x^3 - 189x^2) - (-x^4 - 2x^3 + 63x^2) \right) \, dx \\
&= \int (4x^4 + 8x^3 - 252x^2) \, dx = \frac{4}{5}x^5 + 2x^4 - 84x^2 + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &= \left| \int_{-9}^0 (f(x) - g(x)) \, dx \right| + \left| \int_0^7 (f(x) - g(x)) \, dx \right| \\
&= \left| \left[\frac{3}{2} \frac{4}{5} x^5 + 2x^4 - 84x^2 \right]_{-5}^0 \right| + \left| \left[\frac{4}{5} x^5 + 2x^4 - 84x^2 \right]_0^4 \right| \\
&= \left| -\frac{135594}{5} \right| + \left| -\frac{52822}{5} \right| = \frac{188416}{5}.
\end{aligned}$$

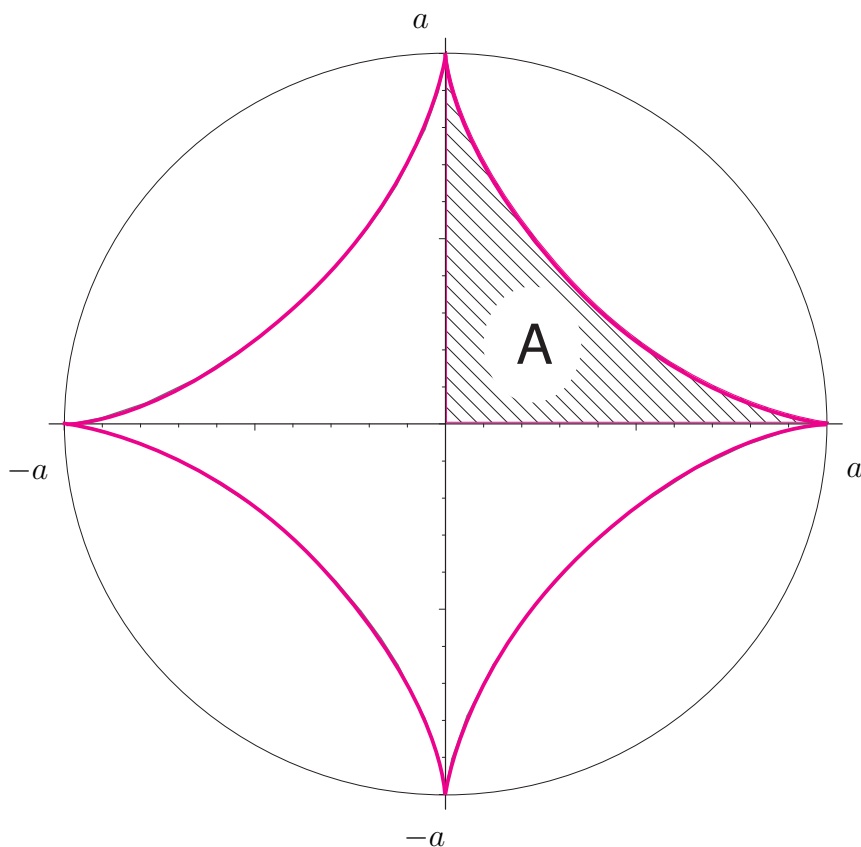
□

Úloha 2.3. Určete obsah asteroidy

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Řešení. Máme tedy $x = a \cos^3 t = \varphi(t)$, $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.
 $y = a \sin^3 t = \psi(t)$,

Na následujícím obrázku je znázorněna asteroida a postup výpočtu (vyjdeme ze symetrie asteroidy, a tak vypočteme obsah obrazce A jako čtvrtinu obsahu celé asteroidy):



Použijeme vzorec pro výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce zadané

parametricky:

$$\begin{aligned}
P_A &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} y \, dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) \, dt \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin^3 t) (a 3 \cos^2 t (-\sin t)) \, dt \right| \\
&= \left| -3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t \, dt \right| = \left[\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \sin^2 t \cos^2 t = \frac{\sin^2 2t}{4} \right] \\
&= \left| -\frac{3}{8} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \sin^2 2t \, dt \right| = \left| -\frac{3}{16} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)(1 - \cos 4t) \, dt \right| \\
&= \left| -\frac{3}{16} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t - \cos 2t + \cos 2t \cos 4t) \, dt \right| \\
&= \left[\cos 2t \cos 4t = \frac{\cos 6t + \cos 2t}{2} \right] \\
&= \left| -\frac{3}{16} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 4t - \cos 2t + \frac{\cos 6t + \cos 2t}{2} \right) \, dt \right| \\
&= \left| -\frac{3}{32} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos 2t - 2 \cos 4t + \cos 6t) \, dt \right| \\
&= \left| -\frac{3}{32} a^2 \left[\left(2t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{1}{6} \sin 6t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| \\
&= \left| -\frac{3}{32} a^2 \left(\left(2 \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{6} 0 \right) - \left(2 \cdot 0 - \frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{6} 0 \right) \right) \right| \\
&= \left| -\frac{3}{32} a^2 \pi \right| = \frac{3}{32} \pi a^2
\end{aligned}$$

A tedy celková plocha asteroidy je

$$P = 4P_A = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

□

2.3 Délka oblouku (křivky)

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Úloha 2.4. Určete délku oblouku asteroidy

$$\begin{aligned} x &= a \cos^3 t, \\ y &= a \sin^3 t, \end{aligned} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} x' &= -3a \cos^2 t \sin t, \\ y' &= 3a \sin^2 t \cos t, \\ x'^2 + y'^2 &= 9a^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t. \\ s &= \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t dt = 3a \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a. \end{aligned}$$

(Funkce $\sin t$ i $\cos t$ jsou na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ nezáporné, takže po odmocnění není třeba psát absolutní hodnotu.)

$$\boxed{\text{Délka oblouku asteroidy je } s = \frac{3}{2}a.}$$

(Celková délka asteroidy je tedy $4s = 6a$.)

□

Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

- a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$, $x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x .

Element objemu je

$$\Delta V = P(x) \cdot \Delta x, \quad \text{tj.} \quad dV = P(x) \cdot dx,$$

a objem tělesa je

$$V = \int_a^b P(x) dx.$$

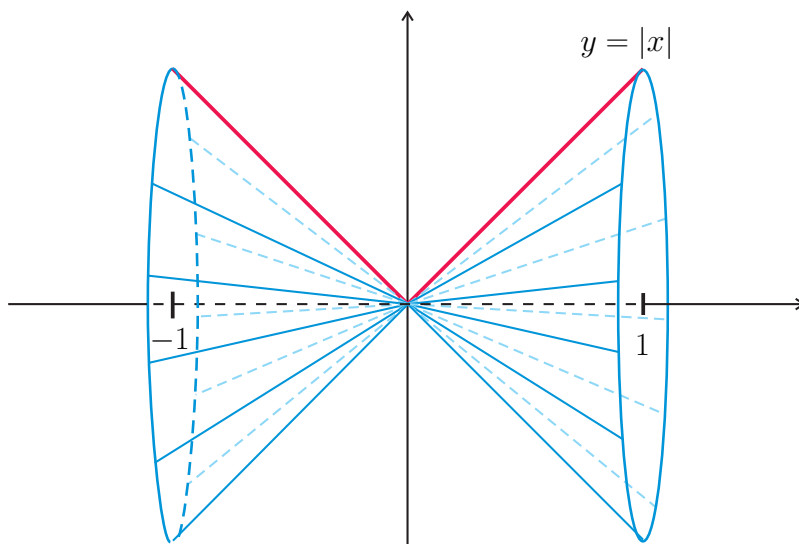
- b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa x a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi[f(x)]^2$ a platí

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Úloha 2.5. Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = |x|$ kolem osy x na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Řešení. Vyjdeme ze vzorce pro objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-1}^1 |x|^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^2 dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} [j^3].$$

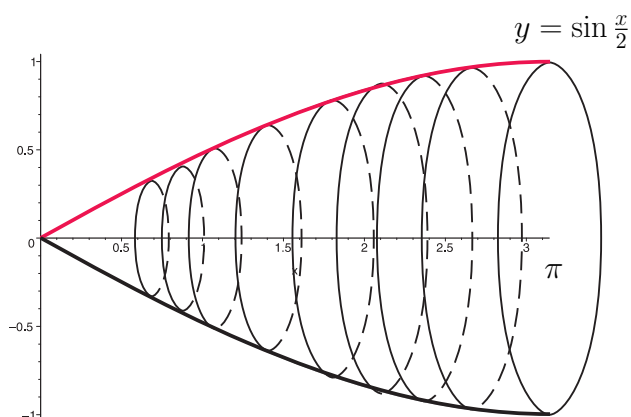


□

Úloha 2.6. Vypočítejte objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = \sin \frac{x}{2}$ kolem osy x na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení. Obdobně jako u předchozí úlohy:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 \frac{x}{2} dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{\pi}{2} [x - \sin x]_0^\pi = \frac{\pi}{2} (\pi) = \frac{1}{2} \pi^2 [j^3].$$



□