

Cvičení č. 19 z KMA-MMAN2

9. a ? . 4. 2009

Separace proměnných

Úloha 0.1. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $yy' = \frac{1-2t}{y}$.

Řešení.

$$y \cdot y' = \frac{1-2t}{y} \quad | : y \neq 0 \leftarrow \text{definiční obor}$$

$$y' = \frac{1-2t}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1-2t}{y^2} \quad | \cdot y^2, \cdot dt$$

$$y^2 \cdot dy = (1-2t) dt$$

$$\int y^2 dy = \int (1-2t) dt$$

$$\frac{1}{3} y^3 = t - t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$y^3 = 3t - 3t^2 + C_2, \quad C_2 = 3C_1 \Rightarrow C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\left[y = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R} \right]$$

□

1 Substituce a) (lineární výraz)

Úloha 1.1. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $y' = (4y - t)^2$.

Řešení.

$$y' = (4y - t)^2 \quad (\text{lineární výraz})$$

$$\begin{aligned} \text{Substituce: } z &= 4y - t \\ z' &= 4y' - 1 \\ y' &= \frac{z' + 1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dosadíme: } \frac{z' + 1}{4} = z^2, \quad z' = 4z^2 - 1,$$

$$\frac{dz}{dt} = 4z^2 - 1 \quad | : (4z^2 - 1) \neq 0 \Rightarrow \boxed{z \neq \pm \frac{1}{2}}$$

$$\frac{dz}{4z^2 - 1} = dt, \quad \int \frac{dz}{4z^2 - 1} = \int dt,$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dz}{2z+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{2z-1} = \int dt$$

$$-\frac{1}{4} \ln|2z+1| + \frac{1}{4} \ln|2z-1| = t + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = t + \ln C_1$$

$z \equiv \frac{1}{2} : L = z' = 0$
 $P = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$
je řešením
 $z \equiv -\frac{1}{2} : L = z' = 0$
 $P = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$
je také řešením

$$\ln \left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = 4t + \ln C_2, \quad C_2 > 0$$

$$\left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = C_2 \cdot e^{4t}$$

$$\frac{2z-1}{2z+1} = C_3 e^{4t}, \quad C_3 \neq 0 \quad (C_3 = \pm C_2)$$

Když u C_3 povolíme 0, dostaneme do tohoto zápisu i řešení $z \equiv \frac{1}{2}$ (tedy nula v čitateli na levé straně).

$$\frac{2z-1}{2z+1} = C \cdot e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Řešení $z \equiv -\frac{1}{2}$ odpovídá nule ve jmenovateli, takže je zapíšeme zvlášť:

$$\left[\frac{2z-1}{2z+1} = C \cdot e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad z \equiv -\frac{1}{2} \right]$$

Návrat před substitucí:

$$\left[\frac{8y-2t-1}{8y-2t+1} = C \cdot e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{t-\frac{1}{2}}{4} \right]$$

□

2 Substituce b) (homogenní)

Úloha 2.1. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $y^2 dt + (t^2 - ty) dy$.

Řešení.

$$y^2 dt + (t^2 - ty) dy = 0 \quad | : dt$$

$$y^2 + (t^2 - ty) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$y' = \frac{-y^2}{t^2 - ty}$$

$$t^2 - ty \neq 0$$

$$t(t-y) \neq 0 \Rightarrow$$

$$t \neq 0$$

$$y \neq t$$

Je homogenní

Případ $y = t$:

$$t^2 + (t^2 - t^2) \cdot 1 = t^2 \neq 0$$

nejde o řešení DR

$$y' = \frac{y^2}{ty - t^2} \cdot \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2}{\left(\frac{y}{t}\right) - 1}$$

Substituce:

$$z = \frac{y}{t}$$

$$zt = y$$

$$y' = z't + z$$

Dosadíme:

$$z't + z = \frac{z^2}{z-1} \quad , \quad z't = \frac{z^2}{z-1} - z$$

$$z't = \frac{z^2 - z^2 + z}{z-1} \quad , \quad z't = \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{dz}{dt} t = \frac{z}{z-1} \quad | : t, : \frac{z}{z-1} dt$$

$$\frac{z-1}{z} dz = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{z-1}{z} dz = \int \frac{dt}{t}$$

$$e^{(z - \ln|z|)} = e^{(\ln|t| + \ln C_1)}, \quad C_1 > 0$$

$$\frac{e^z}{|z|} = C_1 \cdot |t|, \quad \frac{e^z}{z} = C_2 t, \quad C_2 \neq 0$$

$$\text{Dosadíme: } \frac{e^{\frac{y}{t}}}{\frac{y}{t}} = C_2 t, \quad y = C_3 e^{\frac{y}{t}}, \quad C_3 \neq 0$$

$$\boxed{y = C e^{\frac{y}{t}}, C \in \mathbb{R}}$$

$t \neq 0$ již máme ↑
 $z \neq 0$ jde o řešení?

$$z \equiv 0: L = 0 \cdot t = 0 \quad L = P$$

Ano, $z \equiv 0$ je řeš. DR.

$\Rightarrow y \equiv 0$ je řeš. DR.
 $\downarrow C=0$

□

Úloha 2.2. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $t dy - y dt = y dy$.

Řešení.

$$t dy - y dt = y dy, \quad (t-y) dy = y dt \quad | : dt$$

$$(t-y) \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t-y} \quad \begin{array}{l} y \neq t \\ y=t \text{ není řešením DR} \end{array}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}} \quad \text{Substitution: } z = \frac{y}{t} \\ y' = z't + z$$

$$z't + z = \frac{z}{1-z}, \quad z't = \frac{z}{1-z} - z, \quad z't = \frac{z - z + z^2}{1-z}$$

$$z't = \frac{z^2}{1-z} \quad | : t, \quad \frac{z^2}{1-z}$$

$t \neq 0$ automaticky
 $z^2 \neq 0, z \neq 0$
 $y \equiv 0$ je řeš. DR

$$\int \frac{1-z}{z^2} dz = \int \frac{dt}{t}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln|z| = \ln|t| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\left(\frac{1}{z} + \ln|z| \right) = (-\ln|t| + \ln C_2), \quad C_2 > 0$$

$$|z| \cdot e^{\frac{1}{z}} = C_2 \cdot \frac{1}{|t|}, \quad z \cdot e^{\frac{1}{z}} = C_3 \cdot \frac{1}{t}, \quad C_3 \neq 0$$

zpětné dosazení:

$$\frac{y}{t} \cdot e^{\frac{t}{y}} = C_3 \cdot \frac{1}{t} \quad | \cdot t (\neq 0), \quad y \cdot e^{\frac{t}{y}} = C_3 \quad | : e^{\frac{t}{y}} (\neq 0)$$

$$y = C_3 \cdot e^{\frac{y}{t}}$$

$$\boxed{y = C \cdot e^{\frac{y}{t}}, C \in \mathbb{R}}$$

□

c) Rovnice typu $y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$

Ve zvláštním případě, pokud determinant $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ nebo $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0$, lze rovnici řešit separací proměnných s případnou předchozí substitucí pro rovnici homogenní.

Úloha 2.3 ($\Delta = 0$). *Řešte:* $(t + y + 1) dt + (2t + 2y - 1) dy = 0$.

Řešení. Upravíme:

$$(t + y + 1) dt + (2t + 2y - 1) dy = 0,$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-t - y - 1}{2t + 2y - 1}.$$

Vidíme, že

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Jde tedy o speciální případ, ve kterém volíme lineární substituci:

$$z = t + y, \quad z' = 1 + y', \quad y' = z' - 1,$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} - 1 &= -\frac{-z - 1}{2z - 1}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{-z - 1}{2z - 1} + 1, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{-z - 1 + 2z - 1}{2z - 1}, \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{z - 2}{2z - 1}, \end{aligned}$$

což už je tvar vhodný k separaci...

□

Úloha 2.4 ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$). *Řešte:* $y' = \frac{3t - y}{t + y}$.

Řešení. Vidíme, že speciální případ $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ vede na homogenní rovnici:

$$y' = \frac{3t - y}{t + y} \cdot \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}, \quad y' = \frac{3 - \frac{y}{t}}{1 + \frac{y}{t}}.$$

Provedeme tedy substituci $z = \frac{y}{t}, \dots$

□

Je-li $\Delta \neq 0$ a též $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, provedeme substituci, při níž transformujeme jak neznámou funkci y , tak nezávisle proměnnou t :

$$\begin{aligned}y &= z + r \\t &= \tau + s.\end{aligned}$$

Koeficienty r, s volíme tak, abychom pro neznámou funkci $z(\tau)$ dostali rovnici homogenní, tj. aby se vynuly absolutní členy v čitateli i ve jmenovateli uvedeného zlomku. Z transformačních rovnic plyne $dy = dz$, $dt = d\tau$ (tedy $\frac{dz}{d\tau} = \frac{dy}{dt}$) a daná rovnice přejde na tvar rovnice homogenní:

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y}{\alpha_2 t + \beta_2 y}\right),$$

pokud položíme

$$\begin{aligned}\alpha_1 s + \beta_1 r + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 s + \beta_2 r + \gamma_2 &= 0.\end{aligned}$$

Ježto determinant této soustavy $\Delta \neq 0$, existuje řešení r, s .

Úloha 2.5. Řešte rovnici $y' = \frac{5t - 2y - 1}{2t - y + 1}$.

Řešení. Nejprve řešíme soustavu

$$\begin{aligned}5s - 2r - 1 &= 0, \\ 2s - r + 1 &= 0,\end{aligned}$$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = -1 \neq 0$; je $r = 7, s = 3$. Substituce $y = z + 7, t = \tau + 3$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{5\tau - 2z}{2\tau - z} \quad \text{neboli} \quad z' = \frac{5 - 2\frac{z}{\tau}}{2 - \frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\frac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\tau$. Z toho $z' = u + u'\tau$, takže

$$u + u'\tau = \frac{5 - 2u}{2 - u}, \quad \text{odkud} \quad u'\tau = \frac{u^2 - 4u + 5}{2 - u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{2 - u}{u^2 - 4u + 5} du = \frac{d\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u - 4}{u^2 - 4u + 5} du = -2 \frac{d\tau}{\tau}.$$

Po integraci máme

$$\ln(u^2 - 4u + 5) = -2 \ln |\tau| + \ln C_1, \quad \text{kde } C_1 > 0,$$

tedy

$$u^2 - 4u + 5 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \frac{z}{\tau}$, $z = y - 7$, $\tau = t - 3$, je $u = \frac{y-7}{t-3}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit funkcí danou implicitně:

$$\left(\frac{y-7}{t-3}\right)^2 - 4\frac{y-7}{t-3} + 5 = \frac{C}{(t-3)^2}, \quad \text{kde } C \neq 0.$$

□

Úloha 2.6. Řešte rovnici $y' = \frac{2t - y + 1}{t - 2y + 1}$.

Řešení. Nejprve řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2s - r + 1 &= 0, \\ s - 2r + 1 &= 0, \end{aligned}$$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$; je $r = \frac{1}{3}$, $s = -\frac{1}{3}$. Substituce $y = z + \frac{1}{3}$, $t = \tau - \frac{1}{3}$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{2\tau - z}{\tau - 2z} \quad \text{neboli} \quad z' = \frac{2 - \frac{z}{\tau}}{1 - 2\frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\frac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\tau$. Z toho $z' = u + u'\tau$, takže

$$u + u'\tau = \frac{2 - u}{1 - 2u}, \quad \text{odkud} \quad u'\tau = 2\frac{u^2 - u + 1}{1 - 2u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{1 - 2u}{u^2 - u + 1} du = 2\frac{d\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u - 1}{u^2 - u + 1} du = -2\frac{d\tau}{\tau},$$

Po integraci máme

$$\ln(u^2 - u + 1) = -2 \ln |\tau| + \ln C, \quad \text{kde } C > 0,$$

tedy

$$u^2 - u + 1 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \frac{z}{\tau}$, $z = y - \frac{1}{3}$, $\tau = t + \frac{1}{3}$, je $u = \frac{y - \frac{1}{3}}{t + \frac{1}{3}}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit funkcí danou implicitně:

$$\left(\frac{y - \frac{1}{3}}{t + \frac{1}{3}}\right)^2 - \frac{y - \frac{1}{3}}{t + \frac{1}{3}} + 1 = \frac{C}{(t + \frac{1}{3})^2}, \quad \text{kde } C > 0.$$

□