

Cvičení č. 20 z KMA-MMAN2

17. dubna 2009

1 Snížení řádu diferenciální rovnice

Úloha 1.1. Řešte $y'' = \frac{y'}{x}$.

Řešení. Substitute:

$$z = y', \quad z' = y'' \quad z' = \frac{z}{x}.$$

Separace proměnných ($z \equiv 0$ je řešením):

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \quad \ln |z| = \ln |x|, \quad z = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substitute:

$$y' = Cx, \quad y = \frac{C}{2}x^2 + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Řešení ($C_2 = \frac{C}{2}$):

$$y = C_1 + C_2x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 1.2. Řešte počáteční úlohu:

$$y''' = e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0.$$

Řešení. Substitute:

$$z = y'', \quad z' = y''', \quad z' = e^{2x}, \quad z = \frac{1}{2}e^{2x} + C_4, \quad C_4 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substitute:

$$y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_4.$$

Substitute:

$$z = y', \quad z' = y'', \quad z' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_4, \quad z = \frac{1}{4}e^{2x} + C_4x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substitute:

$$y' = \frac{1}{4}e^{2x} + C_4x + C_2, \quad y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{C_4}{2}x^2 + C_2x + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení ($C_1 = \frac{C_4}{2}$):

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Počáteční podmínky:

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3, \quad y' = \frac{1}{4}e^{2x} + 2C_1x + C_2, \quad y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + 2C_1.$$

$$\begin{array}{lcl} y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & -1 \\ y''(0) & = & 0 \end{array} \left| \begin{array}{lcl} \frac{1}{8}e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + C_3 & = & 1 \\ \frac{1}{4}e^0 + 2C_1 \cdot 0 + C_2 & = & -1 \\ \frac{1}{2}e^0 + 2C_1 & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{lcl} \frac{1}{8} + C_3 & = & 1 \\ \frac{1}{4} + C_2 & = & -1 \\ \frac{1}{2} + 2C_1 & = & 0 \end{array}$$

Tudíž:

$$C_1 = -\frac{1}{4}, \quad C_2 = -\frac{5}{4}, \quad C_3 = \frac{7}{8}.$$

Partikulární řešení:

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.$$

□

2 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Nehomogenní úloha: $y' + p(t)y = q(t)$.

Příslušná homogenní úloha: $y' + p(t)y = 0$.

Úloha 2.1 (přednáška). *Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' = t + y$.*

Řešení. Danou rovnici lze zapsat ve tvaru $y' - y = t$, pravá strana je t , příslušná rovnice homogenní je $y' - y = 0$.

1. $y' = \frac{dy}{dt}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\frac{dy}{y} = dt$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru $y = K \cdot e^t$.
2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je funkce. Proto po dosazení máme

$$K' \cdot e^t + K \cdot e^t - K \cdot e^t = t;$$

dva členy s K se ruší (a to vždy!) a máme

$$K' = t \cdot e^{-t}.$$

3. Integrujeme:

$$K = \int t e^{-t} dt = [\text{metoda per partes}] = C - t \cdot e^{-t} - e^{-t}.$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot e^t$ a dostáváme

$$y = (C - t \cdot e^{-t} - e^{-t}) \cdot e^t.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$y = C \cdot e^t - t - 1.$$

□

Úloha 2.2 (cvičení). Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y \cos t = \sin 2t$.

Řešení. Pravá strana je $\sin 2t$, příslušná rovnice homogenní je $y' + y \cos t = 0$.

1. $y' = \frac{dy}{dt}$, tedy separací proměnných při řešení homogenní rovnice máme $\frac{dy}{y} = \cos t \, dt$, z čehož dostáváme obecné řešení příslušné rovnice homogenní ve tvaru

$$y = K \cdot e^{-\sin t}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

2. Toto řešení dosadíme do dané nehomogenní rovnice s tím, že $K = K(t)$ je funkce. Proto po dosazení máme

$$K' \cdot e^{-\sin t} + K \cdot e^{-\sin t}(-\cos t) + K \cdot e^{-\sin t} \cos t = \sin 2t;$$

dva členy s K se ruší (jako vždy) a máme

$$K' = e^{\sin t} \sin 2t.$$

3. Integrujeme:

$$\begin{aligned} K &= \int e^{\sin t} \sin 2t \, dt = \int e^{\sin t} 2 \sin t \cos t \, dt = \left[\begin{array}{ll} u = 2 \sin t & v' = e^{\sin t} \cos t \\ u' = 2 \cos t & v = e^{\sin t} \end{array} \right] \\ &= 2 e^{\sin t} \sin t - \int 2 e^{\sin t} \cos t \, dt = 2 e^{\sin t} \sin t - 2 e^{\sin t} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Toto vypočtené K dosadíme do rovnice $y = K \cdot e^{-\sin t}$ a dostáváme

$$y = (2 e^{\sin t} \sin t - 2 e^{\sin t} + C) \cdot e^{-\sin t}.$$

Obecné řešení dané nehomogenní rovnice je tedy

$$y = 2(\sin t - 1) + C \cdot e^{-\sin t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 2.3. Řešte $y' + 2ty = 2t e^{-t^2}$.

Řešení. Řešení HÚ:

$$y = C e^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení NHÚ:

$$y = C e^{-t^2} + t^2 e^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

3 Bernoulliova diferenciální rovnice

Obecný tvar:

$$y' + p(t)y = q(t)y^m, \quad \text{kde } m \neq 1, m \neq 0.$$

3.0.1 Postup při řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice:

1. Rovnici dělíme činitelem y^m (pro $m > 0$ je funkce $y = 0$ řešením Bernoulliovy rovnice, přidáme je k výsledku nakonec):

$$\frac{y'}{y^m} + p(t)\frac{1}{y^{m-1}} = q(t).$$

2. Provedeme substituci $\frac{1}{y^{m-1}} = z$, tj. $\frac{y'}{y^m} = \frac{1}{1-m}z'$. Pak do rovnice dosadíme a dostaneme tak lineární rovnici

$$z' + (1-m)p(t)z = (1-m)q(t).$$

3. Řešíme tuto lineární rovnici s neznámou funkcí z .

4. V získaném řešení se vrátíme k původní proměnné dosazením $z = \frac{1}{y^{m-1}}$.

Úloha 3.1 (přednáška). *Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + y = t\sqrt{y}$ (pro $y > 0$).*

Řešení. Provedeme dělení dle bodu 1:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \sqrt{y} = t.$$

Substitucí $\sqrt{y} = z$ dle bodu 2 přejde tato rovnice v rovnici lineární

$$2z' + z = t \quad (z > 0).$$

Obecné řešení příslušné rovnice homogenní je

$$z = K e^{-\frac{1}{2}t}$$

a metodou variace konstanty dostaneme

$$K = C + t e^{\frac{1}{2}t} - 2 e^{\frac{1}{2}t},$$

takže

$$z = C e^{-\frac{1}{2}t} + t - 2$$

a je tím naplněn bod 3.

Dle bodu 4 položíme $z = \sqrt{y}$ a po umocnění máme výsledné obecné řešení ve tvaru

$$y = \left(C e^{-\frac{1}{2}t} + t - 2 \right)^2.$$

□

Úloha 3.2 (cvičení). Určete obecné řešení diferenciální rovnice $y' + \frac{2}{x}y = \frac{2 \sin x}{x} \sqrt{y}$, (pro $y > 0$).

Řešení. Provedeme dělení dle bodu 1:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{2}{x} \sqrt{y} = \frac{2 \sin x}{x}.$$

Substitucí $\sqrt{y} = z$ dle bodu 2 přejde tato rovnice v rovnici lineární

$$2z' + \frac{2}{x}z = \frac{2 \sin x}{x} \quad (z > 0).$$

Obecné řešení příslušné rovnice homogenní je

$$z = K \frac{1}{x}$$

a metodou variace konstanty dostaneme

$$z = C \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{x}$$

a tím je naplněn bod 3.

Dle bodu 4 položíme $z = \sqrt{y}$ a po umocnění máme výsledné obecné řešení ve tvaru

$$y = \left(C \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{x} \right)^2.$$

□

4 Ortogonální trajektorie

Úloha 4.1. $y = 3x + q$.

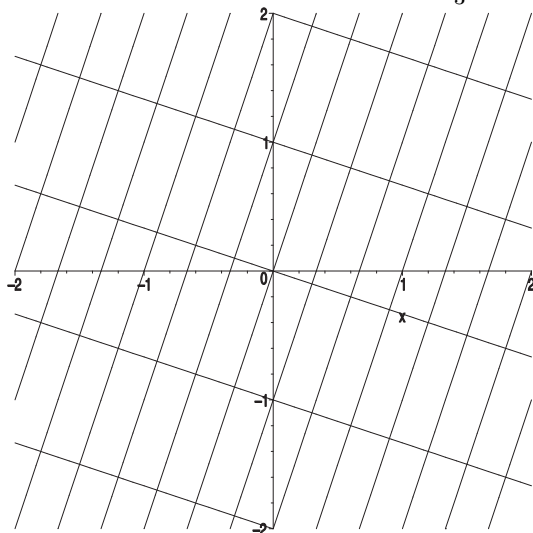
Řešení. Jde o soustavu rovnoběžných přímek o směrnici 3. Derivováním definující rovnice dostaneme

$$y' = 3,$$

a tak DR popisující soustavu ortogonální bude mít tvar:

$$y' = -\frac{1}{3} \implies y = -\frac{1}{3}x + q,$$

tedy jde o soustavu rovnoběžných přímek o směrnici $-\frac{1}{3}$.



□

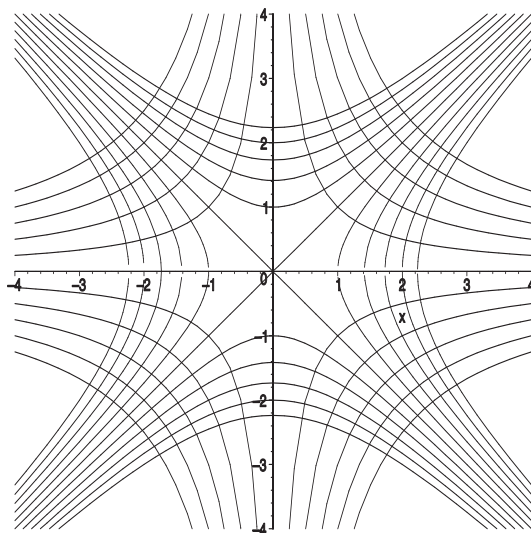
Úloha 4.2. $x \cdot y = a$, $a \in \mathbb{R}$.

Řešení. Derivujeme:

$$y + xy' = 0 \implies y' = -\frac{y}{x}.$$

DR popisující soustavu ortogonální bude mít tvar:

$$y' = \frac{x}{y} \implies y = \pm \sqrt{x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$



□

5 Izogonální trajektorie

Soustavy trajektorií diferenciálních rovnic, které se protínají pod konstantním úhlem φ .

Úhel, pod kterým se dvě křivky v daném bodě protínají je definován jako úhel, který svírají tečny k těmto křivkám v daném bodě průniku.

Úhel α , který svírá první tečna s osou x je určen prostřednictvím její směrnice, což je $\tan \alpha$. Tato směrnice je dána pravou stranou tvořící diferenciální rovnice prvního řádu:

$$y' = f_1(t, y), \quad \text{tedy} \quad \tan \alpha = f_1(t, y).$$

Úhel, který svírá druhá tečna s osou x , bude o dané φ větší nebo menší (to závisí na tom, kterým směrem budeme daný úhel uvažovat). Její směrnice tedy bude

$$\tan(\alpha \pm \varphi).$$

Pokud druhou křivku uvažujeme jako trajektorii diferenciální rovnice 1. řádu

$$y' = f_2(t, y),$$

bude její směrnice také dána pravou stranou této DR:

$$\tan(\alpha \pm \varphi) = f_2(t, y).$$

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi)$ rozvedeme pomocí součtových vzorců a tím získáme vztah mezi $f_1(t, y)$ a $f_2(t, y)$:

$$f_2(t, y) = \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi},$$

a tedy

$$f_2(t, y) = \frac{f_1(t, y) \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp f_1(t, y) \operatorname{tg} \varphi}.$$

Úloha hledání izogonální soustavy trajektorií tedy zpočívá v tom, že k dané soustavě čar najdeme DR

$$y' = f_1(t, y),$$

načež řešením DR

$$y' = \frac{f_1(t, y) \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp f_1(t, y) \operatorname{tg} \varphi}$$

dostaneme soustavu čar, resp. dvě soustavy čar, které se s tou původní protínají pod úhlem φ .

Úloha 5.1. Najděte obě soustavy čar, které se protínají se soustavou hyperbol

$$xy = a, \quad a \in \mathbb{R},$$

pod konstantním úhlem $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Řešení. Derivujeme:

$$y + xy' = 0 \implies y' = -\frac{y}{x} \quad (= f_1(x, y)).$$

DR $y' = f_2(x, y)$ popisující soustavu izogonální bude mít tvar:

$$y' = \frac{f_1(x, y) \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp f_1(x, y) \operatorname{tg} \varphi}, \quad \text{a tedy} \quad y' = \frac{-\frac{y}{x} \pm \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 \mp -\frac{y}{x} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}.$$

Řešíme tedy homogenní DR

$$y' = \frac{-\frac{y}{x} \pm 1}{1 \pm \frac{y}{x}}$$

substitucí

$$z = \frac{y}{x}, \quad zx = y, \quad z'x + z = y', \quad \text{tedy} \quad z'x + z = \frac{-z \pm 1}{1 \pm z}.$$

Po úpravě dostáváme

$$z'x = \frac{-z \pm 1 - (z \pm z^2)}{1 \pm z}, \quad z'x = \frac{-2z \pm (1 - z^2)}{1 \pm z}.$$

Nyní již rozdělíme naši úlohu volbou znamének na dva případy:

(+) Rovnici $z'x = \frac{-2z + (1 - z^2)}{1 + z}$ řešíme separací proměnných ($-z^2 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow z = -1 \pm \sqrt{2}$, $z \equiv -1 - \sqrt{2}$ a $z \equiv -1 + \sqrt{2}$ jsou dvě řešení, která budou později zahrnuta do konečného zápisu):

$$\frac{1 + z}{-z^2 - 2z + 1} dz = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1 + z}{-z^2 - 2z + 1} dz = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{-2} \int \frac{-2z - 2}{-z^2 - 2z + 1} dz = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{-2} \ln |-z^2 - 2z + 1| = \ln |x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

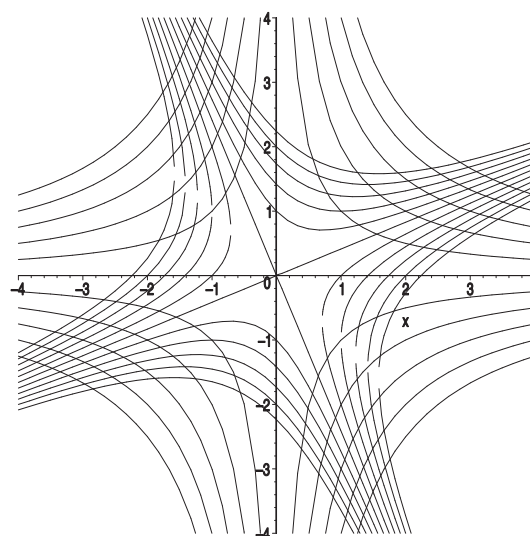
$$\ln |-z^2 - 2z + 1| = -2 \ln |x| + \ln C_2, \quad C_2 > 0,$$

$$|-z^2 - 2z + 1| = \frac{C_2}{x^2},$$

$$-z^2 - 2z + 1 = \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ (zahrnuta řešení pro } C = 0),$$

$$-\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x} + 1 = \frac{C}{x^2},$$

$$-y^2 - 2xy + x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$



(-) Rovnici $z'x = \frac{z^2 - 2z - 1}{1 - z}$ řešíme podobně ($z^2 - 2z - 1 = 0 \Rightarrow z = 1 \pm \sqrt{2}$, $z \equiv 1 - \sqrt{2}$ a $z \equiv 1 + \sqrt{2}$ jsou dvě řešení, která budou později zahrnuta do konečného zápisu):

$$\frac{1 - z}{z^2 - 2z - 1} dz = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{1 - z}{z^2 - 2z - 1} dz = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{-2} \int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z - 1} dz = \int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{-2} \ln |z^2 - 2z - 1| = \ln |x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0,$$

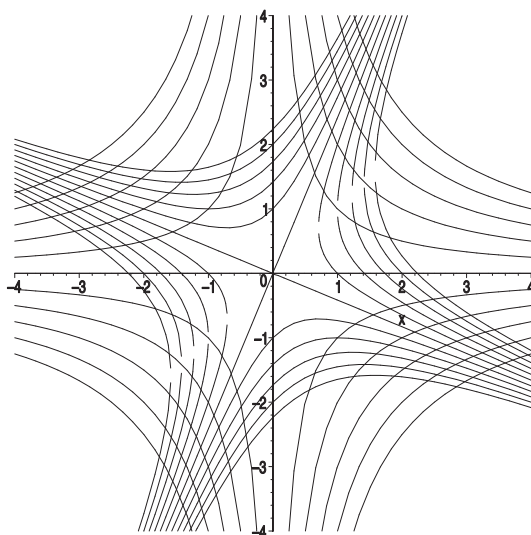
$$\ln |z^2 - 2z - 1| = -2 \ln |x| + \ln C_2, \quad C_2 > 0,$$

$$|z^2 - 2z - 1| = \frac{C_2}{x^2},$$

$$z^2 - 2z - 1 = \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ (zahrnuta řešení pro } C = 0),$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x} - 1 = \frac{C}{x^2},$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$



□