

Cvičení č. 21 z KMA-MMAN2

22. dubna 2009

1 Nalezení součtu řady pomocí rozkladu na parciální zlomky

Úloha 1.1 (přednáška). *Stanovte součet řady* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Řešení. Nejprve si vypíšeme několik prvních členů studované řady:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots.$$

Rozkladem na parciální zlomky dostaneme pro n -tý člen:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1+n-n}{n(n+1)} = \frac{1+n}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

n -tý částečný součet se tedy dá vyjádřit:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Pro zajímavost si můžeme vyčíslit některé částečné součty:

$$s_1 = 1 - \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0,5, \quad s_{10} = \frac{10}{11} = 0,90\overline{90}, \quad s_{100} = \frac{100}{101} = 0,9900\overline{99}, \dots$$

Posloupnost částečných součtů je zjevně konvergentní, a tak dostáváme:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1.$$

Tedy součet dané řady je $s = 1$. □

Úloha 1.2 (cvičení). *Stanovte součet řady* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{(2n-3)(2n+5)}$.

Řešení. Nejprve si ještě přehledněji vypíšeme několik prvních členů studované řady:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{(2n-3)(2n+5)} &= \frac{3}{(2-3)(2+5)} + \frac{3}{(4-3)(4+5)} + \frac{3}{(6-3)(6+5)} + \cdots \\ &= \frac{3}{(-1)(7)} + \frac{3}{(1)(9)} + \frac{3}{(3)(11)} + \cdots \\ &= -\frac{3}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{3}{65} + \frac{1}{35} + \frac{1}{51} + \frac{3}{209} + \cdots \end{aligned}$$

Rozkladem na parciální zlomky dostaneme pro n -tý člen:

$$a_n = \frac{3}{(2n-3)(2n+5)} = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+5} \right).$$

n -tý částečný součet se tedy dá vyjádřit:

$$s_n = \frac{3}{8} \left[\left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n+5} \right) \right].$$

Pokusíme se jej zapsat přehledněji (rovnici podělíme $\frac{3}{8}$ a do prvního řádku zapíšeme hodnoty z prvního parciálního zlomku a do druhého řádku z druhého parciálního zlomku):

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}s_n &= -1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{2n-7} + \frac{1}{2n-5} + \frac{1}{2n-3} - \\ &\quad - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \cdots - \frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}. \end{aligned}$$

Z tohoto zápisu by mělo být zřejmé, že ke zlomkům v prvním řádku, od $\frac{1}{7}$ až do jeho konce, existují opačné zlomky ve druhém řádku. Po jejich vzájemném odečtení nám zbyde:

$$\frac{8}{3}s_n = -1 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5},$$

a tedy

$$s_n = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \right).$$

Pro zajímavost si můžeme opět vyčíslit některé částečné součty:

$$s_1 = -\frac{3}{7} \doteq -0,429, \quad s_{10} \doteq 0,131, \quad s_{100} \doteq 0,193, \quad s_{1000} \doteq 0,199, \dots$$

Posloupnost částečných součtů je zjevně konvergentní, a tak dostáváme:

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{8} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} \right) \\ &= \frac{3}{8} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Součet dané řady je tedy $s = \frac{1}{5}$. □

2 Konvergence geometrických řad

Úloha 2.1. *Užitím geometrických řad určete, pro která x konverguje daná řada, a vypočítejte její součet:*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 - \frac{x}{x+2} \right)^n.$$

Řešení. Nejprve si uvedeme několik prvních členů řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 - \frac{x}{x+2}\right)^n = \left(2 - \frac{x}{x+2}\right) + \left(2 - \frac{x}{x+2}\right)^2 + \left(2 - \frac{x}{x+2}\right)^3 + \left(2 - \frac{x}{x+2}\right)^4 + \dots$$

Jde o řadu, ve které figuruje parametr $x \in \mathbb{R}$. My máme za úkol najít všechny takové hodnoty $x \in \mathbb{R}$ (pokud existují), pro které daná řada konverguje.

Vzhledem k tomu, že před sebou máme geometrickou řadu:

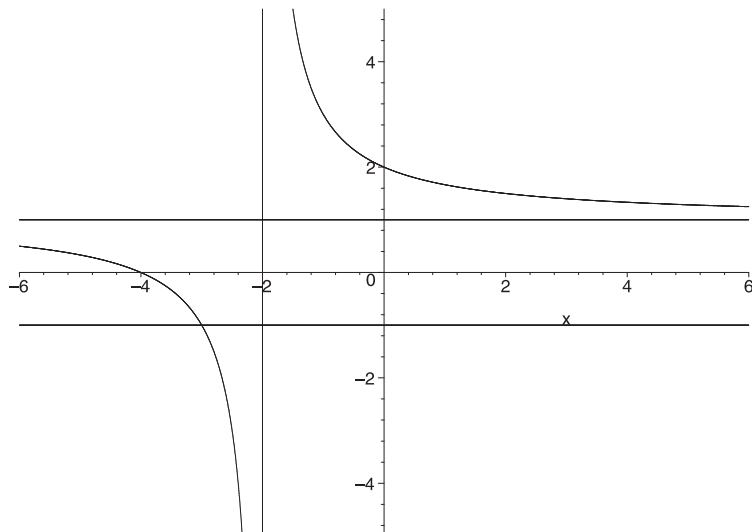
$$\sum_{n=1}^{+\infty} aq^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2 - \frac{x}{x+2}\right) \cdot \left(2 - \frac{x}{x+2}\right)^{n-1},$$

a tedy

$$a = \left(2 - \frac{x}{x+2}\right), \quad q = \left(2 - \frac{x}{x+2}\right).$$

Víme, že geometrická řada konverguje pro $|q| < 1$, tedy

$$q = \left|2 - \frac{x}{x+2}\right| < 1,$$



Pro $x > -2$ nedostaneme žádné řešení a pro $x < -2$ zjistíme, že $x < -3$.

Celkem tedy máme, že $|q| < 1$ pro $x < -3$. Jinými slovy: daná řada konverguje pro $x \in (-\infty, -3)$.

Zbývá tedy zjistit, co je součtem pro $x < -3$.

Víme, že součet konvergentní geometrické řady je

$$\begin{aligned} s &= a \frac{1}{1-q} = \left(2 - \frac{x}{x+2}\right) \frac{1}{1 - \left(2 - \frac{x}{x+2}\right)} = \frac{2x+4-x}{x+2} \frac{1}{\frac{-x-2+x}{x+2}} \\ &= \left(\frac{x+4}{x+2}\right) \left(\frac{x+2}{-2}\right) = \frac{x+4}{-2} = -\frac{x}{2} - 2. \end{aligned}$$

Závěr: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 - \frac{x}{x+2}\right)^n$ je konvergentní pro $x < -3$ a v takovém případě má součet $-\frac{x}{2} - 2$. □

3 Využití lineárních operací s řadami

Úloha 3.1. *Určete součet řady*

$$3 - 2 + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{2}{9} + \frac{3}{8} - \frac{2}{18} + \cdots.$$

Řešení. Budeme hledat n -tý člen. Je zřejmé, že jde o součet členů dvojího charakteru, a tak můžeme pro začátek použít závorky:

$$(3 - 2) + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{9}\right) + \cdots + \left(\frac{3}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^{n-1}}\right) + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^{n-1}}\right).$$

Danou řadu bychom tedy mohli získat jako rozdíl dvou řad. Pokud by tyto řady byly konvergentní, pak jejich rozdíl bude také konvergentní a bude se rovnat rozdílu součtů daných řad.

Dvě dotčené řady jsou geometrické a konvergentní:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^{n-1}} = a' \frac{1}{1 - q'} = 3 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 6, \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = a'' \frac{1}{1 - q''} = 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 3,$$

Jejich rozdíl je tedy konvergentní se součtem rovným rozdílu dílčích součtů:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} - \frac{2}{3^{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^{n-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 6 - 3 = 3.$$

Daná řada má součet $s = 3$. □

4 Nutná podmínka konvergence

5 Srovnávací kritéria konvergence pro řady s nezápornými členy

Věta 5.1 (1. srovnávací kritérium). *Mějme řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ a necht' pro skoro všechna n platí $a_n \leq b_n$. Pak*

- z konvergence *majorantní* řady $\sum b_n$ plyne konvergence řady $\sum a_n$
- a z divergence *minorantní* řady $\sum a_n$ plyne divergence řady $\sum b_n$.

Důkaz. Předpokládejme, že nerovnost $a_n \leq b_n$ platí již od $n = 1$ (jinak můžeme vynechat členy, kde tato nerovnost neplatí, aniž se změní chování řad). Pak pro částečné součty s_n, σ_n těchto řad platí táž nerovnost $s_n \leq \sigma_n$. Z konvergence $\sigma_n \rightarrow \sigma$ a z nerovnosti $\sigma_n \leq \sigma$ plyne $s_n \leq \sigma$, takže také $\{s_n\}$ je konvergentní. □

Úloha 5.2. *Rozhodněte o chování řady $\sum e^{\frac{1}{n}-n}$.*

Řešení. Řada $\sum e^{-n}$ je geometrická řada s kvocientem $q = \frac{1}{e} < 1$ a je tedy konvergentní. Ježto $e^{\frac{1}{n}} < 3$ pro všechna n , je $e^{\frac{1}{n}-n} = e^{\frac{1}{n}} \cdot e^{-n} < 3 \cdot e^{-n}$, což je člen konvergentní geometrické řady. Proto také daná řada je konvergentní. □

Věta 5.3 (2. srovnávací kritérium). *Mějme dvě kladné řady $\sum a_n$, $\sum b_n$ a necht existuje*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = K.$$

Pak pro $K \in (0, +\infty)$ mají obě řady stejné chování.

Princip důkazu. $\forall \varepsilon > 0$ platí pro skoro všechna n :

$$(0 <) K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon \Rightarrow (K - \varepsilon)b_n < a_n < (K + \varepsilon)b_n$$

a tvrzení plyne z 1. srovnávacího kritéria. □

Kritérium lze doplnit případem $K = 0$ (pak platí stejné tvrzení jako u 1. srovnávacího kritéria) a případem $K = +\infty$ (pak platí analogické tvrzení, ale se záměnou obou řad).

Úloha 5.4. *Rozhodněte o konvergenci řady $\sum \frac{1}{an+b}$, kde $a > 0$, $an+b > 0$.*

Řešení. Danou řadu srovnáme se základní harmonickou řadou. Ježto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{an+b}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{an+b} = \frac{1}{a} > 0,$$

mají obě řady stejné chování, tedy daná řada je divergentní. □

Věta 5.5 (3. srovnávací kritérium). *Mějme kladné řady $\sum a_n$, $\sum b_n$. Necht pro skoro všechna n platí*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Pak

- z konvergence řady $\sum b_n$ plyne konvergence řady $\sum a_n$
- a z divergence řady $\sum a_n$ plyne divergence řady $\sum b_n$.

Princip důkazu. Necht uvedená nerovnost platí už od $n = 1$. Pro $k = 1, 2, \dots, n-1$ uvažujme $n-1$ nerovností $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$. Jestliže je všechny mezi sebou vynásobíme (provedte!), dostaneme po úpravě $a_n \leq \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n$ a tvrzení věty plyne z 1. srovnávacího kritéria. □