

Cvičení č. 14 z KMA-MMAN2

22. a 25. 2. 2010

1 Integrace racionálních funkcí — rozklad na parciální zlomky

1.1 Typy parciálních zlomků a jejich integrace

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C.$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$\begin{aligned} 3. \int \frac{Ax+b}{x^2+px+q} dx &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+\frac{2b}{A}}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+q-q+\frac{2b}{A}}{x^2+px+q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+q}{x^2+px+q} dx + \frac{A}{2} \int \frac{-q+\frac{2b}{A}}{x^2+px+q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \ln |x^2+px+q| + \frac{A}{2} \left(-q + \frac{2b}{A}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \frac{Ax+b}{(x^2+px+q)^k} &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+\frac{2b}{A}}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+q-q+\frac{2b}{A}}{(x^2+px+q)^k} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+q}{(x^2+px+q)^k} dx + \frac{A}{2} \int \frac{-q+\frac{2b}{A}}{(x^2+px+q)^k} dx = \\ &= \frac{A}{2} \frac{1}{k-1} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{A}{2} \left(-q + \frac{2b}{A}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \dots \end{aligned}$$

Typy 3. a 4. mají ve svých jmenovatelích nerozložitelné polynomy (nemají reálné kořeny).

Úloha 1.1 (Příklad dopočtu 3. typu). $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 2} =$
 $\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$

Úloha 1.2 (Příklad dopočtu 4. typu). $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \int \frac{dx}{[(x^2 + 2x + 1) + 2]^2} =$
 $\int \frac{dx}{[(x+1)^2 + 2]^2} = \left[\begin{array}{l} u = x+1 \\ du = dx \end{array} \right] = \int \frac{du}{(u^2 + 2)^2} = \frac{1}{4} \frac{u}{2 + u^2} + \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^2 + 2} =$
 $\frac{1}{4} \frac{u}{2 + u^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int \frac{du}{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{4} \frac{u}{2 + u^2} + \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) + C = \frac{1}{4} \frac{x+1}{2 + (x+1)^2} +$
 $\frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C.$

1.2 Postup při integraci racionálních funkcí $P(x)/Q(x)$, kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy:

Při jejich integrování převádíme racionální funkci na uvedené základní typy, přičemž využíváme poznatků z algebry.

Algoritmus:

- (1) Je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, přejdeme na krok (2). Jinak užitím dělení upravíme funkci na tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $A(x)$ je polynom, který již dovedeme integrovat a $R(x)$ (zbytek dělení) je polynom stupně nižšího než $Q(x)$; tedy: *snížíme stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele.*

- (2) Je-li jmenovatel rozložen na lineární kořenové činitele a nerozložitelné kvadratické polynomy, přejdeme na bod (3), jinak tento *rozklad jmenovatele* provedeme.
- (3) Je-li ve jmenovateli jen jeden kořenový činitel nebo jeho mocnina nebo jen jeden nerozložitelný kvadratický polynom nebo jeho mocnina, přejdeme na bod (4); jinak provedeme *rozklad zlomku $R(x)/Q(x)$ na parciální zlomky.*
- (4) *Integrujeme* všechny komponenty rozkladu funkce $y = P(x)/Q(x)$.

1.3 Příklady na integraci racionálních funkcí

Úloha 1.3. Najděte primitivní funkci $\int \frac{x \, dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$.

Řešení. Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-3},$$

odkud

$$x = A(x+2)(x-3) + B(x+1)(x-3) + C(x+1)(x+2).$$

Dosazením

$$\begin{aligned} x = -1 : \quad -1 &= -4A \Rightarrow A = \frac{1}{4} \\ x = -2 : \quad -2 &= 5B \Rightarrow B = -\frac{2}{5} \\ x = 3 : \quad 3 &= 20C \Rightarrow C = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{(x+1)(x+2)(x-3)} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{2}{5} \int \frac{dx}{x+2} + \frac{3}{20} \int \frac{dx}{x-3} = \\ &= \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{2}{5} \ln|x+2| + \frac{3}{20} \ln|x-3| + c. \end{aligned}$$

□

Úloha 1.4. Najděte primitivní funkci $\int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} \, dx$.

Řešení. Vydělením a rozkladem jmenovatele dostaneme

$$\frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} = x + \frac{6x^2 + x - 2}{2x^3 - x - 1} = x + \frac{6x^2 + x - 2}{(x-1)(2x^2 + 2x + 1)}$$

Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{6x^2 + x - 2}{(x-1)(2x^2 + 2x + 1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{2x^2 + 2x + 1}$$

odkud

$$6x^2 + x - 2 = A(2x^2 + 2x + 1) + (Bx + C)(x-1).$$

Dosazením

$$x = 1 : \quad 5 = 5A \Rightarrow A = 1$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$\begin{aligned} x^2 : \quad 6 &= 2A + B \Rightarrow B = 4 \\ x^0 : \quad -2 &= A - C \Rightarrow C = 3. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} dx = \int x dx + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1} dx.$$

Zlomek $\frac{4x+3}{2x^2+2x+1}$ je parciální zlomek 2. druhu, při jeho integraci postupujeme následovně

$$\int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1} dx = \int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} dx + \int \frac{1}{2x^2+2x+1} dx,$$

první integrál vpravo řešíme substitucí $t = 2x^2 + 2x + 1$, pak $dt = (4x+2) dx$ a po dosazení

$$\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln(2x^2+2x+1),$$

ve druhém integrálu upravíme nejprve jmenovatele

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2x + 1 &= 2[x^2 + x] + 1 = 2[(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}] + 1 = 2(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2}[4(x + \frac{1}{2})^2 + 1] = \frac{1}{2}[(2x+1)^2 + 1] \end{aligned}$$

a dále substitucí $t = 2x + 1$, pak $dt = 2 dx$ a po dosazení

$$\int \frac{dx}{2x^2+2x+1} = \int \frac{2 dx}{(2x+1)^2+1} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctg t = \arctg(2x+1).$$

Výsledkem je tedy

$$\int \frac{2x^4 + 5x^2 - 2}{2x^3 - x - 1} dx = \frac{1}{2} x^2 + \ln|x-1| + \ln(2x^2+2x+1) + \arctg(2x+1) + c.$$

□

Úloha 1.5. Najděte primitivní funkci $\int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} dx$.

Řešení. Úpravou jmenovatele

$$x^5 + x^4 - x^3 - x^2 = x^2(x^3 + x^2 - x - 1) = x^2(x+1)(x^2-1) = x^2(x+1)^2(x-1)$$

a rozkladem na parciální zlomky dostaneme

$$\frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x-1}.$$

Máme

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= Ax(x+1)^2(x-1) + B(x+1)^2(x-1) + \\ &+ Cx^2(x^2-1) + Dx^2(x-1) + Ex^2(x+1)^2, \end{aligned}$$

odkud dosazením

$$x = 0 : \quad 1 = -B \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$x = -1 : \quad 2 = -2D \quad \Rightarrow \quad D = -1$$

$$x = 1 : \quad 2 = 4E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}$$

a porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x

$$x^4 : \quad 1 = A + C + E$$

$$x^1 : \quad 0 = -A - B$$

dostaneme $A = 1$, $B = -1$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = -1$, $E = \frac{1}{2}$.

Je tedy

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^4 + 1}{x^5 + x^4 - x^3 - x^2} dx = \\ &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \ln|x-1| + c . \end{aligned}$$

□