

Cvičení č. 15 z KMA-MMAN2

1. a 4. března 2010

1 Neurčitý integrál — pokračování integračních metod

1.1 Integrace některých iracionálních funkcí

Úloha 1.1. Vypočtěte $I = \int \frac{\sqrt[6]{x}}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{4x}} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Řešení. } I &= \int \frac{\sqrt[6]{x}}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt[2]{4x}} dx = \left[\begin{array}{l} \text{NSN } \{2, 3, 6\} = 6 \\ x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{\sqrt[6]{t^6}}{2\sqrt[3]{t^6} + \sqrt[2]{4t^6}} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^6}{2t^2 + 2t^3} dt = 6 \int \frac{t^4}{2 + 2t} dt = \\ &= 3 \int \frac{t^4}{1 + t^2} dt = 3 \int \left(t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t + 1} \right) dt = \\ &= 3 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln |t + 1| \right) + C = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ t = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}} \end{array} \right] = \\ &= 3 \left(\frac{x^{\frac{4}{6}}}{4} - \frac{x^{\frac{3}{6}}}{3} + \frac{x^{\frac{2}{6}}}{2} - x^{\frac{1}{6}} + \ln |x^{\frac{1}{6}} + 1| \right) + C = \\ &\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x} - 3\sqrt[6]{x} + 3 \ln |\sqrt[6]{x} + 1| + C. \end{aligned}$$

□

Úloha 1.2. Vypočtěte $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x-1)}}$.

$$\text{Řešení. } I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x-1)}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(2x-1) \frac{(x-1)}{(x-1)}}} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^3 \frac{(2x-1)}{(x-1)}}} =$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{\frac{2x-1}{x-1}}} &= \left[\begin{array}{l} \boxed{\frac{2x-1}{x-1} = t^3}, \quad 2x-1 = (x-1)t^3, \\ 2x - xt^3 = 1 - t^3, \quad x(2-t^3) = 1 - t^3, \quad \boxed{x = \frac{1-t^3}{2-t^3}}, \\ dx = \frac{-3t^2(2-t^3) - (1-t^3)(-3t^2)}{(2-t^3)^2} dt, \\ dx = \frac{-6t^2 + 3t^5 + 3t^2 - 3t^5}{(2-t^3)^2} dt, \quad \boxed{dx = \frac{-3t^2}{(2-t^3)^2} dt} \end{array} \right] = \\
&= \int \frac{\frac{-3t^2}{(2-t^3)^2} dt}{\left(\frac{1-t^3}{2-t^3} - 1\right)\sqrt[3]{t^3}} = \int \frac{\frac{-3t^2}{(2-t^3)^2} dt}{\frac{1-t^3-2+t^3}{2-t^3}t} = \int \frac{-\frac{3t^2}{(2-t^3)^2} dt}{-\frac{t}{2-t^3}} = \\
&= \int \frac{3t^2}{(2-t^3)^2} \frac{2-t^3}{t} dt = \int \frac{3t}{2-t^3} dt = - \int \frac{3t}{(t-\sqrt[3]{2})(t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4})} dt = \\
&= \left[\begin{array}{l} \frac{-3t}{(t-\sqrt[3]{2})(t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4})} = \frac{A}{t-\sqrt[3]{2}} + \frac{Bt+C}{t^2+\sqrt[3]{2}t+\sqrt[3]{4}} \\ \vdots \end{array} \right] = \dots \quad \square
\end{aligned}$$

1.2 Eulerovy substituce

Používají se pro výpočet integrálů typu $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$, kde R je racionální funkce dvou proměnných. Účelem substituce je převést integrování iracionální funkce na integrování funkce racionální. Eulerovy substituce jsou tři:

- (1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{ax} + t$ [pro $a > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy ax^2 .
- (2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ [pro $c > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy c a rovnost lze dělit x .
- (3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$ [kde λ je reálný kořen]; hlavní myšlenka: po umocnění lze rovnost dělit kořenovým činitelem $(x-\lambda)$.

Po nalezení integrálu z příslušné racionální funkce se vracíme k původní proměnné, tj. dosadíme

- při 1. substituci $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax}$,
- při 2. substituci to je $t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{c}}{x}$,

- a při 3. dosadíme $t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - \lambda}$.

Úloha 1.3. *Ověřte, že při výpočtu $\int x\sqrt{4x^2 + 5x + 1} dx$ lze použít všechny tři substituce. Ve všech případech převedte integrál na integrál z funkce racionální.*

Řešení. $a = 4 > 0$, $c = 1 > 0$, a uvedený trojčlen má reálné kořeny, takže jsou splněny předpoklady pro všechny tři Eulerovy substituce:

1.ES: Při použití 1. substituce máme $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 2x + t$, a tedy

$$4x^2 + 5x + 1 = 4x^2 + 4xt + t^2,$$

$$5x + 1 = 4xt + t^2,$$

$$5x - 4xt = t^2 - 1,$$

$$x(5 - 4t) = t^2 - 1,$$

$$\boxed{x} = \frac{t^2 - 1}{5 - 4t},$$

$$dx = \frac{2t(5 - 4t) - (t^2 - 1)(-4)}{(5 - 4t)^2} dt,$$

$$dx = \frac{10t - 8t^2 + 4t^2 - 4}{(5 - 4t)^2} dt,$$

$$\boxed{dx} = \frac{10t - 4t^2 - 4}{(5 - 4t)^2} dt,$$

$$\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 2x + t,$$

$$\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = 2\frac{t^2 - 1}{5 - 4t} + t,$$

$$\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = \frac{2t^2 - 2 + 5t - 4t^2}{5 - 4t},$$

$$\boxed{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}} = \frac{-2t^2 + 5t - 2}{5 - 4t}.$$

Vrátíme se k integrálu a dosadíme:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{4x^2 + 5x + 1} dx &= \int \frac{t^2 - 1}{5 - 4t} \cdot \frac{-2t^2 + 5t - 2}{5 - 4t} \cdot \frac{10t - 4t^2 - 4}{(5 - 4t)^2} dt = \dots = \\ &= \frac{1}{96} t^3 - \frac{17}{256} t - \frac{243}{2048} \frac{1}{(-5 + 4t)^3} - \frac{405}{2048} \frac{1}{(-5 + 4t)^2} + \frac{81}{2048} \frac{1}{(-5 + 4t)} - \\ &- \frac{45}{512} \ln(-5 + 4t) + C = \left[\text{za } t \text{ dosadíme } \sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2x \right] = \\ &= \frac{1}{96} \left(\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 2x \right)^3 - \frac{17}{256} \sqrt{4x^2 + 5x + 1} + \frac{17}{128} x - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{243}{2048} \frac{1}{(-5 + 4\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 8x)^3} - \\
&- \frac{405}{2048} \frac{1}{(-5 + 4\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 8x)^2} + \\
&+ \frac{81}{2048} \frac{1}{(-5 + 4\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 8x)} - \\
&- \frac{45}{512} \ln(-5 + 4\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 8x) + C.
\end{aligned}$$

2.ES: Při použití 2. substituce máme $\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = xt + 1$, a tedy:

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2 + 5x + 1} &= xt + 1, \\
4x^2 + 5x + 1 &= x^2t^2 + 2xt + 1, \\
4x^2 + 5x &= x^2t^2 + 2xt, \\
4x + 5 &= xt^2 + 2t, \\
4x - xt^2 &= 2t - 5, \\
\boxed{x} &= \frac{2t - 5}{4 - t^2}, \\
dx &= \frac{2(4 - t^2) - (2t - 5)(-2)}{(4 - t^2)^2} dt, \\
\boxed{dx} &= \frac{-2t^2 + 4t - 2}{(4 - t^2)^2} dt, \\
\sqrt{4x^2 + 5x + 1} &= \frac{2t - 5}{4 - t^2}t + 1 \\
\boxed{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}} &= \frac{2t^2 - t - t^3}{4 - t^2}.
\end{aligned}$$

Vrátíme se k integrálu a dosadíme:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{4x^2 + 5x + 1} dx &= \int \frac{2t - 5}{4 - t^2} \cdot \frac{2t^2 - t - t^3}{4 - t^2} \cdot \frac{-2t^2 + 4t - 2}{(4 - t^2)^2} dt = \\
&= \int \left(-\frac{1}{64} \frac{1}{(t - 2)^4} - \frac{3}{128} \frac{1}{(t - 2)^3} + \frac{23}{512} \frac{1}{(t - 2)^2} + \frac{27}{256} \frac{1}{(t - 2)} + \right. \\
&+ \left. \frac{729}{64} \frac{1}{(t + 2)^4} - \frac{1539}{128} \frac{1}{(t + 2)^3} + \frac{1809}{512} \frac{1}{(t + 2)^2} - \frac{27}{256} \frac{1}{(t + 2)} \right) dt = \\
&= \frac{1}{192} \frac{1}{(t - 2)^3} + \frac{3}{256} \frac{1}{(t - 2)^2} - \frac{23}{512} \frac{1}{(t - 2)} + \frac{27}{256} \ln(t - 2) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{243}{64} \frac{1}{(t+2)^3} + \frac{1539}{256} \frac{1}{(t+2)^2} - \frac{1809}{512} \frac{1}{(t+2)} - \frac{27}{256} \ln(t+2) + C = \\
& = \left[\text{za } t \text{ dosadíme } \frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 1}{x} \right] = \\
& = \frac{1}{192} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 1}{x} - 2 \right)^{-3} + \frac{3}{256} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 1}{x} - 2 \right)^{-2} - \\
& \frac{23}{512} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 1}{x} - 2 \right)^{-1} + \frac{27}{256} \ln \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 1}{x} - 2 \right) - \\
& \frac{243}{64} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 1}{x} + 2 \right)^{-3} + \frac{1539}{256} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 1}{x} + 2 \right)^{-2} - \\
& \frac{1809}{512} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 1}{x} + 2 \right)^{-1} - \frac{27}{256} \ln \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1} - 1}{x} + 2 \right) + \\
& C.
\end{aligned}$$

3.ES: Při použití 3. substituce máme

$$\sqrt{4x^2 + 5x + 1} = \sqrt{(x+1)(4x+1)} = \sqrt{4(x+1)\left(x + \frac{1}{4}\right)} = t(x+1),$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+1)(4x+1)} &= t(x+1), \\
(x+1)(4x+1) &= t^2(x+1)^2, \\
(4x+1) &= t^2(x+1), \\
4x - xt^2 &= t^2 - 1, \\
\boxed{x} &= \frac{t^2 - 1}{4 - t^2}, \\
dx &= \frac{2t(4 - t^2) - (t^2 - 1)(-2t)}{(4 - t^2)^2} dt, \\
\boxed{dx} &= \frac{6t}{(4 - t^2)^2} dt.
\end{aligned}$$

Vrátíme se k integrálu a dosadíme:

$$\begin{aligned}
\int x \sqrt{4x^2 + 5x + 1} dx &= \int \frac{t^2 - 1}{4 - t^2} \cdot t \left(\frac{t^2 - 1}{4 - t^2} + 1 \right) \cdot \frac{6t}{(4 - t^2)^2} dt = \\
&= \int \frac{t^2 - 1}{4 - t^2} \cdot \left(\frac{3t}{4 - t^2} \right) \cdot \frac{6t}{(4 - t^2)^2} dt = 18 \int \frac{(t^2 - 1)t^2}{(4 - t^2)^4} dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{18}{13} t^{13} - \frac{306}{11} t^{11} + 224 t^9 - \frac{6336}{7} t^7 + \frac{9216}{5} t^5 - 1536 t^3 + C = \\
&= \left[\text{za } t \text{ dosadíme } \frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{x + 1} \right] = \\
&= \frac{18}{13} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{(x + 1)} \right)^{13} - \frac{306}{11} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{(x + 1)} \right)^{11} + \\
&+ 224 \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{(x + 1)} \right)^9 - \frac{6336}{7} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{(x + 1)} \right)^7 + \\
&+ \frac{9216}{5} \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{(x + 1)} \right)^5 - 1536 \left(\frac{\sqrt{4x^2 + 5x + 1}}{(x + 1)} \right)^3 + C.
\end{aligned}$$

□

2 Určitý integrál

Newtonův vzorec

Věta 2.1 (Newtonův vzorec). *Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a má tu (zobecněnou) primitivní funkci F . Pak platí*

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_{x=a}^b = F(b) - F(a).$$

2.1 Integrace goniometrických funkcí

Přehled substitucí pro $\int R(\cos x, \sin x) \, dx$, kde R je racionální funkce dvou proměnných:

- (1) $\sin x = t$, pokud $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,
- (2) $\cos x = t$, pokud $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,
- (3) $\operatorname{tg} x = t$, pokud $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$,
- (4) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ (univerzální substituce). $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2 \, dt}{1 + t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$,
 $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}$.

Převeďte na integrál z racionální funkce:

Úloha 2.2. $I = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$

Řešení. $I = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t+1-t^2} = \dots \quad \square$

Úloha 2.3. $I = \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x dx.$

Řešení. $I = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \int t^3 dt = \left[\frac{1}{4} t^4 \right] = \frac{1}{4} [\sin^4 x]_{x=0}^{\pi/2} =$
 $= \frac{1}{4}(1-0) = \frac{1}{4}. \quad \square$

Úloha 2.4. $I = \int_{-\pi/4}^0 \cos^5 2x \sin 2x dx.$

Řešení. $I = \left[\begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -2 \sin 2x dx = dt \\ \sin 2x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int t^5 dt = -\frac{1}{12} [t^6] =$
 $= -\frac{1}{12} [\cos^6 2x]_{x=-\pi/4}^0 = -\frac{1}{12} (\cos^6 0 - \cos^6(-\pi/2)) = -\frac{1}{12}(1-0) = -\frac{1}{12}. \quad \square$

Úloha 2.5. Vypočítejte $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$ takto: Čtyřmi různými substitucemi

převeďte příslušný neurčitý integrál $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$ na integrál z racionální funkce, z těchto čtyř výsledků vyberte ten nejjednodušší a příklad dopočítejte jen tímto jedním způsobem.

Řešení.

$$\begin{aligned} t = \sin x : \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] = \int \frac{\sin^3 x \cos x}{\cos x \cos x} dx = \\ &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \cos x dx = \int \frac{\sin^3 x}{1 - \sin^2 x} \cos x dx = \int \frac{t^3}{1 - t^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t = \cos x : \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ -dt = \sin x dx \end{array} \right] = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \sin x dx = \\
&= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \sin x dx = \int \frac{1 - t^2}{t} (-dt) = \int \frac{t^2 - 1}{t} dt = \\
&= \boxed{\int \left(t - \frac{1}{t} \right) dt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t = \operatorname{tg} x : \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{array} \right] = \int \frac{\sin^3 x \cos x}{\cos^2 x} dx = \\
&= \int \frac{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \cos^4 x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^3 x \cos^4 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \\
&= \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 \\ \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{t^2 + 1} \\ \cos^4 x = \frac{1}{(1 + t^2)^2} \end{array} \right] = \int t^3 \frac{1}{(1 + t^2)^2} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} : \quad \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx &= \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^3}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \\
&= \int \frac{16t^3}{(1+t^2)^3(1-t^2)} dt
\end{aligned}$$

Dopočítáme nejjednodušší tvar (v rámečku):

$$\int \left(t - \frac{1}{t} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \ln |t| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C.$$

Určitý integrál:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \left[\frac{\cos^2 x}{2} - \ln |\cos x| \right]_{x=0}^{\pi/4} = \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{2} - \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} \right| - \left(\frac{\cos^2 0}{2} - \ln |\cos 0| \right) = \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2}{2} - \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| - \left(\frac{1}{2} - \ln |1| \right) = \frac{1}{4} - \ln \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \\ &= \frac{1}{4} - \ln |2^{-\frac{1}{2}}| - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \ln 2 = -\frac{1}{4} + \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

□