

Cvičení č. 17 z KMA-MMAN2

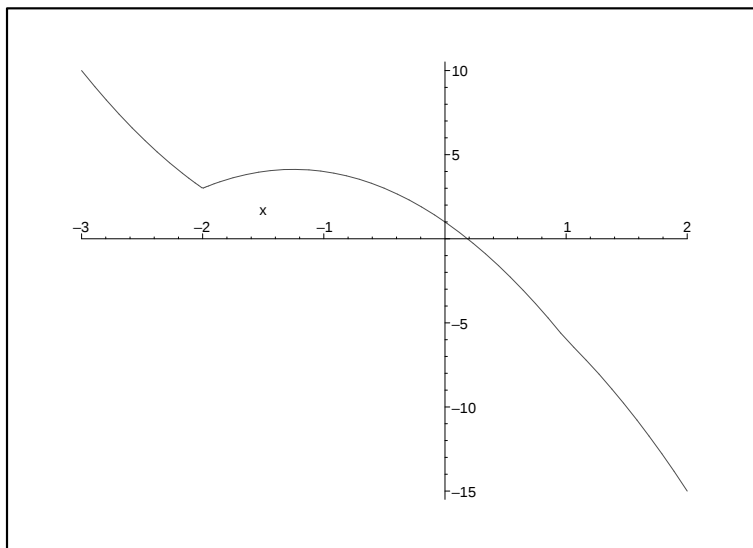
15. a 18. března 2010

1 Vlastnosti určitého integrálu závislé na intervalu integrování

Věta 1.1 (aditivita integrálu). *Nechť $a < c < b$. Pak $f \in R(\langle a, b \rangle)$, právě když $f \in R(\langle a, c \rangle) \wedge f \in R(\langle c, b \rangle)$. Přitom platí*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Úloha 1.2. *Vypočtěte $I = \int_{-3}^2 |x - 1| - 2x|x + 2| \, dx$.*



Obrázek 1: Graf funkce $y = |x - 1| - 2x|x + 2|$.

Řešení. Pro integraci výrazů s absolutní hodnotou rozdělíme na intervaly:

x	$\langle -3, -2 \rangle$	$\langle -2, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$
$ x - 1 $	$1 - x$	$1 - x$	$x - 1$
$ x + 2 $	$-(x + 2)$	$x + 2$	$x + 2$
$ x - 1 - 2 x + 2 $	$1 - x + 2x(x + 2)$	$1 - x - 2x(x + 2)$	$x - 1 - 2x(x + 2)$
po úpravě	$2x^2 + 3x + 1$	$-2x^2 - 5x + 1$	$-2x^2 - 3x - 1$

Po rozdělení na tři integrály a dosazení dostaneme:

$$I = \int_{-3}^{-2} (2x^2 + 3x + 1) dx + \int_{-2}^1 (-2x^2 - 5x + 1) dx + \int_1^2 (-2x^2 - 3x - 1) dx.$$

Nyní již provedeme výpočet:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-3}^{-2} (2x^2 + 3x + 1) dx + \int_{-2}^1 (-2x^2 - 5x + 1) dx + \int_1^2 (-2x^2 - 3x - 1) dx = \\
 &= \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x \right]_{x=-3}^{-2} + \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x \right]_{x=-2}^1 + \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x \right]_{x=1}^2 = \\
 &= \left[\left(\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{3}{2}(-2)^2 + (-2) \right) - \left(\frac{2}{3}(-3)^3 + \frac{3}{2}(-3)^2 + (-3) \right) \right] + \\
 &\quad + \left[\left(-\frac{2}{3}1^3 - \frac{5}{2}1^2 + 1 \right) - \left(-\frac{2}{3}(-2)^3 - \frac{5}{2}(-2)^2 + (-2) \right) \right] + \\
 &\quad + \left[\left(-\frac{2}{3}2^3 - \frac{3}{2}2^2 - 2 \right) - \left(-\frac{2}{3}1^3 - \frac{3}{2}1^2 - 1 \right) \right] = \\
 &= \left[\left(-\frac{16}{3} + 6 - 2 \right) - \left(-18 + \frac{27}{2} - 3 \right) \right] + \left[\left(-\frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 1 \right) - \left(\frac{16}{3} - 10 - 2 \right) \right] + \\
 &\quad + \left[\left(-\frac{16}{3} - 6 - 2 \right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{2} - 1 \right) \right] = \\
 &= \frac{-16 - 2 - 16 - 16 + 2}{3} + \frac{-27 - 5 + 3}{2} + (4 + 21 + 1 + 12 - 8 + 1) = \\
 &= -\frac{48}{3} - \frac{29}{2} + 31 = -16 - 14 - \frac{1}{2} + 31 = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

□

2 Integrace metodou per partes

Věta 2.1. Jsou-li u' , v' spojité na $\langle a, b \rangle$, pak

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_{x=a}^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Úloha 2.2. Vypočtěte $I = \int_0^\pi x \sin x \, dx$.

Řešení.

$$I = \left[\begin{array}{cc} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right] = [-\cos x]_{x=0}^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx = \dots = \pi.$$

□

3 Integrace metodou substituční

Máme-li při výpočtu určitého integrálu použít substituci, pak můžeme

- nejprve vypočít primitivní funkci a pak použít Newtonův vzorec,
- nebo můžeme provést *transformaci mezí*. V závislosti na tom, jakou substituci provádíme ($h(x) = t$ nebo $x = \varphi(z)$) použijeme jednu z následujících dvou vět.

Věta 3.1 (substituce $h(x) = z$). *Nechť $f(x)$ má tvar $f(x) = g[h(x)]h'(x)$, kde $h'(x)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $g(z)$ je spojitá pro všechna $z = h(x)$, pokud $x \in \langle a, b \rangle$. Pak*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g[h(x)]h'(x) \, dx = \int_{h(a)}^{h(b)} g(z) \, dz. \quad (1)$$

Úloha 3.2. Vypočtěte $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx$.

Řešení. Použijeme předchozí větu, neboť zřejmě funkce

$$\sin^3 x \cos x \quad \text{má tvar} \quad g[h(x)]h'(x),$$

kde

$$h(x) = \sin x \quad \text{a} \quad g(z) = z^3.$$

Dále máme ověřit, že

$$h'(x) = \cos x \quad \text{je spojitá na} \quad \langle a, b \rangle = \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

což jistě je, a

$$g(z) = z^3 \quad \text{je spojitá pro všechna } z \in h(\langle a, b \rangle) = \sin\left(\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle\right) = \langle 0, 1 \rangle,$$

což je jistě také pravda.

Substitucí $\sin x = z$ tedy bude

$$I = \left[\begin{array}{ll} h(x) = \sin x = z, & h(a) = \sin 0 = 0 \\ h'(x) dx = \cos x dx = dz, & h(b) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 z^3 dz = \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}. \quad \square$$

Věta 3.3 (substituce $x = \varphi(z)$). *Nechť $A \leq a < b \leq B$, nechť $f(x)$ je spojitá na $\langle A, B \rangle$, $\varphi'(z)$ nechť je spojitá na $\langle \alpha, \beta \rangle$ a nechť pro $z \in \langle \alpha, \beta \rangle$ leží $\varphi(z)$ v intervalu $\langle A, B \rangle$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Pak*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz. \quad (2)$$

Úloha 3.4. Vypočtěte $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Řešení. } I &= \left[\begin{array}{ll} x = \sin z & x = 0 \Rightarrow z = 0 \\ dx = \cos z dz & x = 1 \Rightarrow z = \frac{\pi}{2} \end{array} \right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 z} \cos z dz = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 z dz = \left[\frac{1}{2}z + \frac{\sin 2z}{2} \right]_{z=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Zde jsme hledali α a β z rovnic

$$\sin(\alpha) = \varphi(\alpha) = a = 0,$$

$$\sin(\beta) = \varphi(\beta) = b = 1,$$

a tak máme (nejjednodušší řešení, ale možností je více a je lhostejné, kterou z nich vybereme)

$$\alpha = 0 \quad \text{a} \quad \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Máme ověřit, že derivace substituční funkce je spojitá na zvoleném intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$, což je jistě pravda, neboť $\varphi'(z) = \cos(z)$ je spojitá funkce. Dále nás zajímá, kam substituční funkce zobrazí interval $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$,

$$\varphi\left(\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle\right) = \langle 0, 1 \rangle.$$

Zde tedy k rozšíření původního intervalu $\langle a, b \rangle = \langle 0, 1 \rangle$ nedochází, a tak stačí vyšetřit případ $A = a = 0$ a $B = b = 1$, a tedy vyšetřit spojitost původní integrované funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ na intervalu $\langle A, B \rangle = \langle 0, 1 \rangle$, což zřejmě opravdu je. $\square$

Úloha 3.5. Vypočtěte $\int_0^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Řešení. } \int_0^{\ln 5} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx &= \left[\begin{array}{l} z = h(x) = \sqrt{e^x - 1}, \quad z^2 = e^x - 1, \quad e^x = z^2 + 1 \\ dz = h'(x) dx = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx \\ x = 0 \Rightarrow z = \sqrt{e^0 - 1} = 0 \\ x = \ln 5 \Rightarrow z = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = 2 \end{array} \right] = \\ &= \int_0^{\ln 5} \underbrace{2e^x}_{g[h(x)]} \cdot \underbrace{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}}_{h'(x)} dx = \int_0^{\ln 5} \underbrace{2[(\sqrt{e^x - 1})^2 + 1]}_{g[h(x)]} \cdot \underbrace{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}}_{h'(x)} dx = \\ &= \int_0^2 \underbrace{2(z^2 + 1)}_{g(z)} dz = 2 \int_0^2 (z^2 + 1) dz = 2 \left[\frac{z^3}{3} + z \right]_{z=0}^2 = 2 \left[\left(\frac{8}{3} + 2 \right) - (0) \right] = \frac{28}{3}. \quad \square \end{aligned}$$

Poznámka 3.6 (K. Rektorys a kol.: Přehled užití matematiky). *Jak nesmíme provádět integraci substitucí, vyplývá z těchto příkladů:*

Příklad 3.7. Integrál $\int_1^4 \sqrt{x^2 - 1} dx$ nelze integrovat substitucí $x = \sin z$, neboť pro žádný interval $\alpha \leq z \leq \beta$ nebude $x = \sin z$ probíhat interval $\langle 1, 4 \rangle$. Daný integrál lze jistě řešit například substitucí $\sqrt{x^2 - 1} = z - x$. Přitom bude $1 \leq x \leq 4$, $1 \leq z \leq 4 + \sqrt{15}$.

Příklad 3.8. Řešme integrál

$$\int_0^\pi \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + k \operatorname{tg}^2 x} dx, \quad k > 0, \quad k \neq 1.$$

Substituce:

$$\operatorname{tg} x = z, \quad \frac{1}{\cos^2 x} dx = dz, \quad (1 + \operatorname{tg}^2 x) dx = dz; \quad \operatorname{tg}(0) = 0, \quad \operatorname{tg}(\pi) = 0.$$

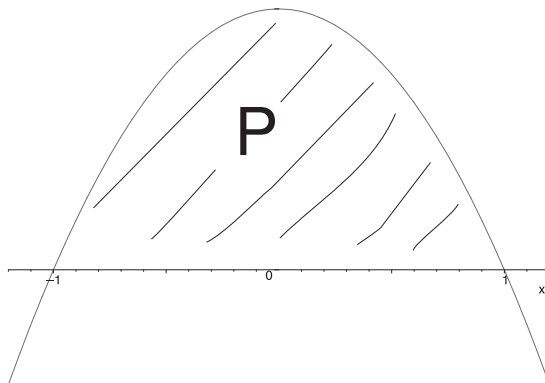
Je tedy

$$\int_0^\pi \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + k \operatorname{tg}^2 x} dx = \int_0^0 \frac{dz}{1 + k^2 z^2} = 0.$$

Výsledek je zřejmě nesprávný, neboť integrál z kladné funkce je kladný a nemůžeme dostat jako výsledek nulu. Chyba vzniklá substitucí $\operatorname{tg} x = z$ je v tom, že $\operatorname{tg} x$ je v $\langle 0, \pi \rangle$ nespojitá v bodě $x = \frac{\pi}{2}$.

4 Počáteční úvahy o výpočtu obsahu geometrických útvarů v rovině

Úloha 4.1. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = 1 - x^2$ a osou x .



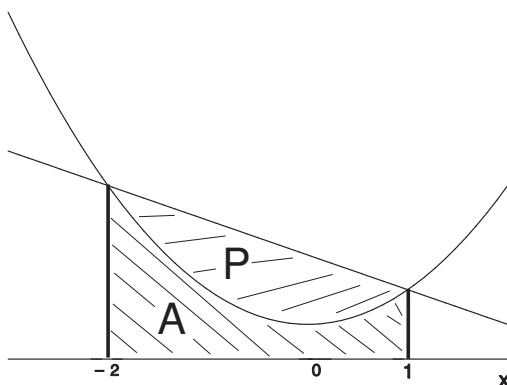
Řešení. Po načrtnutí grafu zjistíme, že jde vlastně o úlohu na výpočet určitého integrálu (dotčený graf paraboly leží nad osou x), u které ale nejprve musíme nalézt integrační meze. Jde o průsečíky paraboly s osou x , tedy nulové body:

$$y = 1 - x^2 = 0, \quad x^2 = 1 \implies x_1 = a = -1, \quad x_2 = b = 1.$$

$$P = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} [j^2].$$

□

Úloha 4.2. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = x^2 + 1$ a přímkou $y = 3 - x$.



Řešení. Z obrázku je zřejmé, že meze pro výpočet najdeme jako x -ové souřadnice průsečíků obou grafů, tedy z rovnice:

$$x^2 + 1 = 3 - x, \quad x^2 + x - 2 = 0, \quad x_1 = a = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2, \quad x_2 = b = 1.$$

Dále z obrázku víme, že

$$A = \int_{-2}^1 (x^2 + 1) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_{x=-2}^1 = \frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} + 2 = 6 [j^2]$$

a

$$A + P = \int_{-2}^1 (3 - x) \, dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_{x=-2}^1 = 3 - \frac{1}{2} + 6 + 2 = \frac{21}{2} [j^2].$$

A tedy dohromady:

$$P = (A + P) - A = \frac{21}{2} - 6 = \frac{9}{2} [j^2].$$

□

5 Věta o střední hodnotě integrálního počtu

Věta 5.1 (o střední hodnotě integrálního počtu). *Nechť $f \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí $m \leq f(x) \leq M$. Pak existuje číslo $\mu \in \langle m, M \rangle$ tak, že*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \mu(b - a).$$

Je-li f spojitá, pak existuje číslo $\xi \in \langle a, b \rangle$ tak, že

$$\int_a^b f(x) \, dx = (b - a)f(\xi).$$

Úloha 5.2. *Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu určete střední hodnotu μ funkce:*

$$y = \sqrt{x} \text{ na intervalu } \langle 0, 4 \rangle.$$

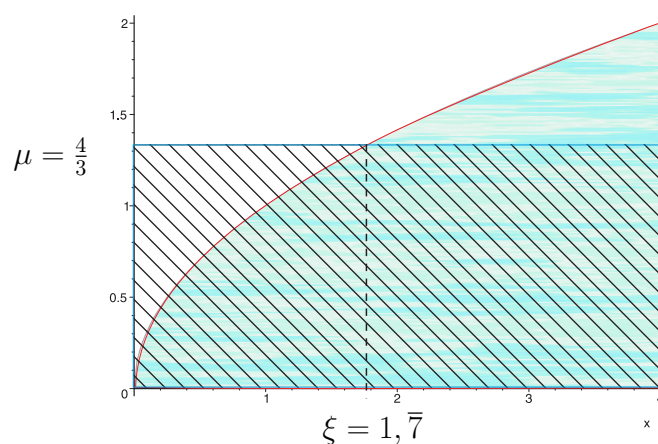
Řešení. Podle věty o střední hodnotě μ vypočteme následovně:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \mu(b - a) \implies \mu = \frac{\int_a^b f(x) \, dx}{(b - a)} = \frac{\int_0^4 \sqrt{x} \, dx}{(4 - 0)} = \frac{4}{3}.$$

Funkce $\sqrt{x}$ je na $\langle 0, 4 \rangle$ spojitá, takže existuje příslušné ξ :

$$\mu = f(\xi), \quad \frac{4}{3} = \sqrt{\xi} \implies \xi = \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{16}{9} = 1, \bar{7}.$$

Situaci ilustruje následující obrázek:



□

Úloha 5.3. Podle věty o střední hodnotě integrálního počtu určete střední hodnotu μ funkce:

$$y = \sin x \text{ na intervalu } \langle 0, \pi \rangle.$$

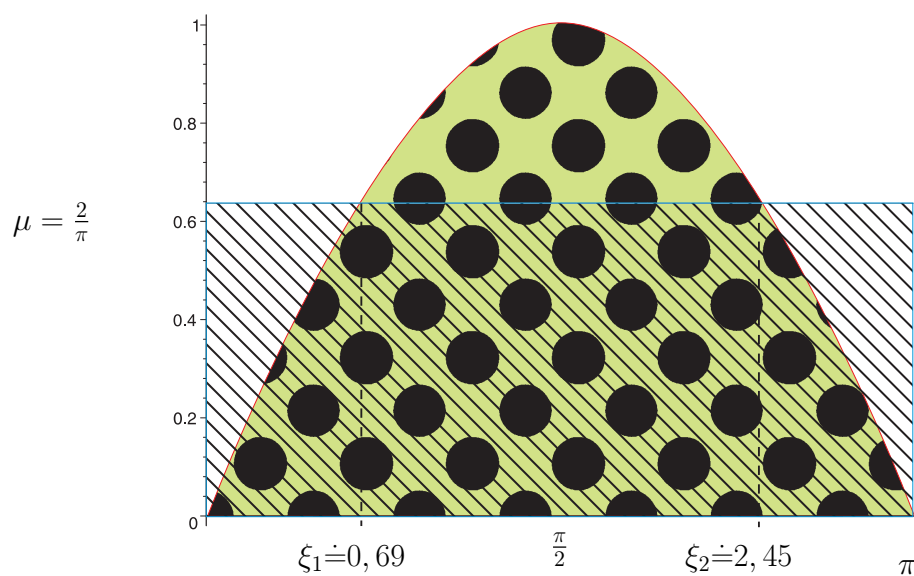
Řešení. Podle věty o střední hodnotě μ vypočteme následovně:

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a) \implies \mu = \frac{\int_a^b f(x) dx}{(b-a)} = \frac{\int_0^\pi \sin x dx}{(\pi-0)} = \frac{2}{\pi}.$$

Funkce $\sin x$ je na $\langle 0, \pi \rangle$ spojitá, takže existuje příslušné ξ (dokonce dvě):

$$\mu = f(\xi), \quad \frac{2}{\pi} = \sin \xi \implies \xi_1 = \arcsin \frac{2}{\pi} \doteq 0,69, \quad \xi_2 = \pi - \xi_1 \doteq 2,45.$$

Situaci ilustruje následující obrázek:



□