

Cvičení č. 17 z KMA-MMAN2

22. a 25. března 2010

1 Aplikace určitého integrálu v geometrii

1.1 Vzorce pro obsah a délku

	Obsah	Délka křivky
Explicitně	$\int_a^b f(x) \, dx$	$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$
Parametricky	$\left \int_\alpha^\beta y \, dx \right = \left \int_\alpha^\beta \psi(t) \varphi'(t) \, dt \right $	$\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt$
Polárně	$\frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \, d\varphi$	$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} \, d\varphi$

1.2 Plocha rovinných obrazců

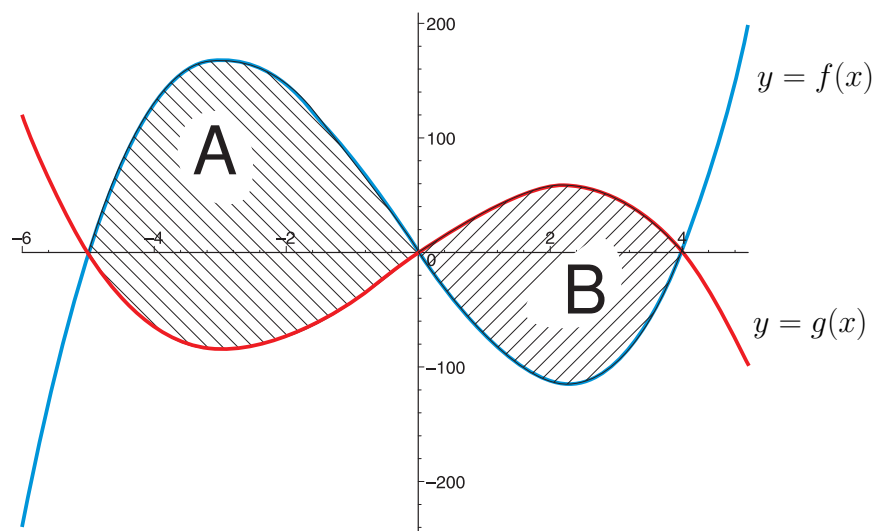
Úloha 1.1. *Grafy funkcí f a g vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočítejte obsah této plochy, jestliže:*

$$f(x) = 4x^3 + 4x^2 - 80x, \quad g(x) = -2x^3 - 2x^2 + 40x.$$

Řešení. Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

Průsečíky: $f(x) = g(x) \implies x_1 = -5, x_2 = 0, x_3 = 4.$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:



Ze znalosti vzájemné velikosti $f(x)$ a $g(x)$ na intervalech $\langle -5, 0 \rangle$ a $\langle 0, 4 \rangle$ dostaneme plochy oblastí A a B:

$$P = P_A + P_B = \int_{-5}^0 (f(x) - g(x)) \, dx + \int_0^4 (g(x) - f(x)) \, dx,$$

pokud bychom neznali jejich uspořádání, stačí vzít:

$$P = P_A + P_B = \left| \int_{-5}^0 (f(x) - g(x)) \, dx \right| + \left| \int_0^4 (f(x) - g(x)) \, dx \right|,$$

nebo dokonce

$$P = \int_{-5}^4 |f(x) - g(x)| \, dx.$$

Pro konečný výpočet použijeme prostřední vztah:

$$\begin{aligned} \int (f(x) - g(x)) \, dx &= \int ((4x^3 + 4x^2 - 80x) - (-2x^3 - 2x^2 + 40x)) \, dx \\ &= \int (6x^3 + 6x^2 - 120x) \, dx = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_{-5}^0 (f(x) - g(x)) \, dx \right| + \left| \int_0^4 (f(x) - g(x)) \, dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 \right]_{-5}^0 \right| + \left| \left[\frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 60x^2 \right]_0^4 \right| \\ &= \left| \frac{1625}{2} \right| + |-448| = \frac{2521}{2}. \end{aligned}$$

□

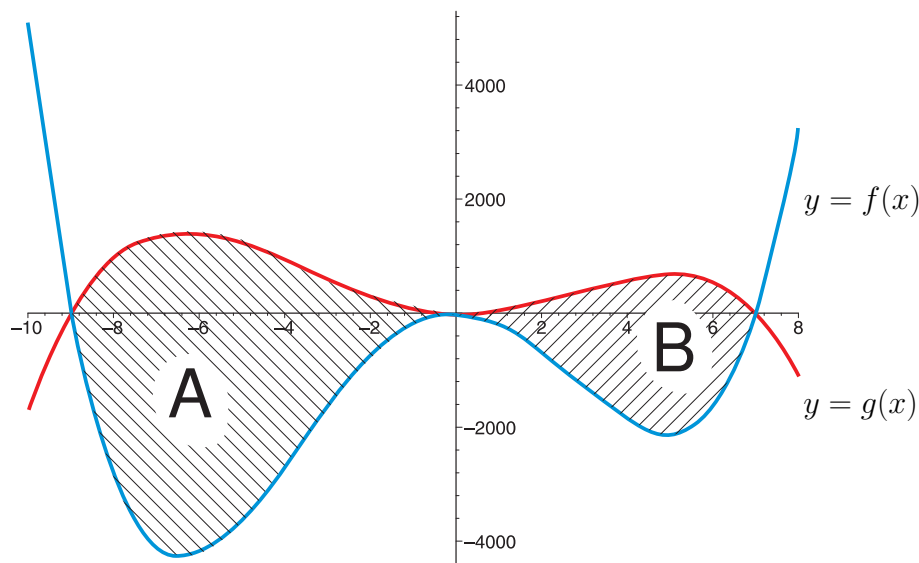
Úloha 1.2. Grafy funkcí f a g vymezily v rovině jistou konečnou plochu. Vypočítejte obsah této plochy, jestliže:

$$f(x) = 3x^4 + 6x^3 - 189x^2, \quad g(x) = -x^4 - 2x^3 + 63x^2.$$

Řešení. Nejprve musíme zjistit, zda se grafy obou funkcí vůbec protnou, a jakým způsobem:

$$\text{Průsečíky: } f(x) = g(x) \implies x_1 = -9, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 7.$$

Situaci si ilustrujeme na následujícím obrázku:



Nebudeme hledat uspořádání funkcí na intervalech $\langle -9, 0 \rangle$ a $\langle 0, 7 \rangle$, a přímo vezmeme:

$$P = P_A + P_B = \left| \int_{-9}^0 (f(x) - g(x)) \, dx \right| + \left| \int_0^7 (f(x) - g(x)) \, dx \right|.$$

$$\begin{aligned} \int (f(x) - g(x)) \, dx &= \int \left((3x^4 + 6x^3 - 189x^2) - (-x^4 - 2x^3 + 63x^2) \right) \, dx \\ &= \int \left(4x^4 + 8x^3 - 252x^2 \right) \, dx = \frac{4}{5}x^5 + 2x^4 - 84x^2 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_{-9}^0 (f(x) - g(x)) \, dx \right| + \left| \int_0^7 (f(x) - g(x)) \, dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{4}{5}x^5 + 2x^4 - 84x^2 \right]_{-9}^0 \right| + \left| \left[\frac{4}{5}x^5 + 2x^4 - 84x^2 \right]_0^7 \right| \\ &= \left| -\frac{135594}{5} \right| + \left| -\frac{52822}{5} \right| = \frac{188416}{5}. \end{aligned}$$

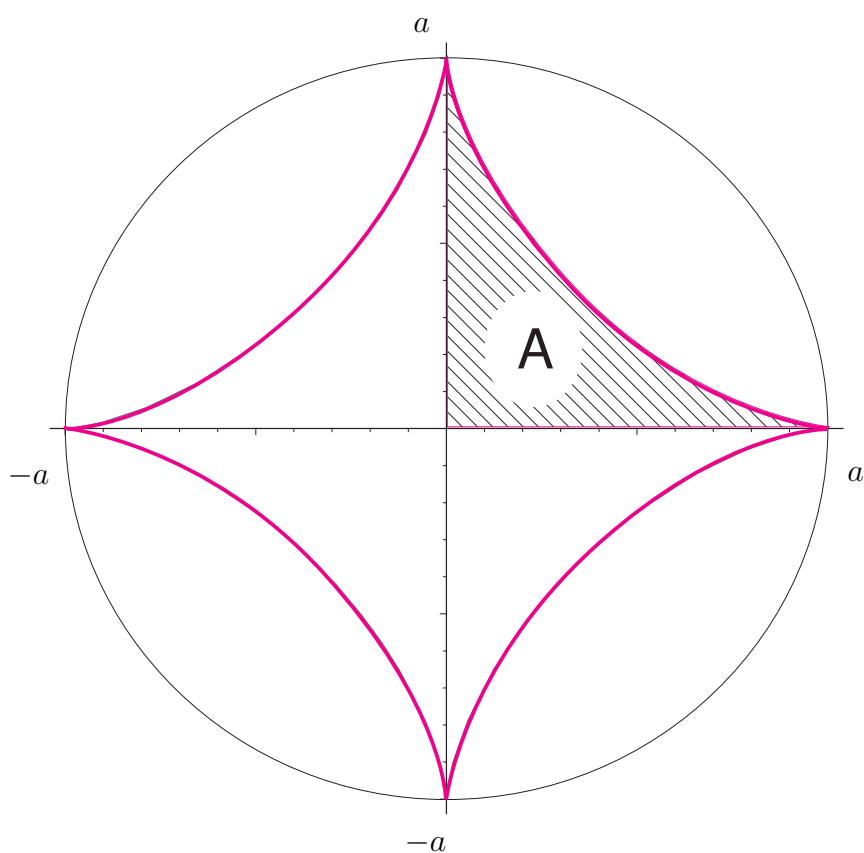
□

Úloha 1.3. *Určete obsah asteroidy*

$$\begin{array}{l} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{array} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Řešení. Máme tedy $x = a \cos^3 t = \varphi(t)$, $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,
 $y = a \sin^3 t = \psi(t)$,

Na následujícím obrázku je znázorněna asteroida a postup výpočtu (vyjdeme ze symetrie asteroidy, a tak vypočteme obsah obrazce A jako čtvrtinu obsahu celé asteroidy):



Použijeme vzorec pro výpočet obsahu plochy ohraničené grafem funkce zadané

parametricky:

$$\begin{aligned}
P_A &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} y \, dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) \, dt \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a \sin^3 t) (a 3 \cos^2 t (-\sin t)) \, dt \right| \\
&= \left| -3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t \, dt \right| = \left[\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \sin^2 t \cos^2 t = \frac{\sin^2 2t}{4} \right] \\
&= \left| -\frac{3}{8} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) \sin^2 2t \, dt \right| = \left| -\frac{3}{16} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)(1 - \cos 4t) \, dt \right| \\
&= \left| -\frac{3}{16} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t - \cos 2t + \cos 2t \cos 4t) \, dt \right| \\
&= \left[\cos 2t \cos 4t = \frac{\cos 6t + \cos 2t}{2} \right] \\
&= \left| -\frac{3}{16} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 4t - \cos 2t + \frac{\cos 6t + \cos 2t}{2} \right) \, dt \right| \\
&= \left| -\frac{3}{32} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - \cos 2t - 2 \cos 4t + \cos 6t) \, dt \right| \\
&= \left| -\frac{3}{32} a^2 \left[\left(2t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + \frac{1}{6} \sin 6t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right| \\
&= \left| -\frac{3}{32} a^2 \left(\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{6} 0 \right) - \left(2 \cdot 0 - \frac{1}{2} 0 - \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{6} 0 \right) \right) \right| \\
&= \left| -\frac{3}{32} a^2 \pi \right| = \frac{3}{32} \pi a^2
\end{aligned}$$

A tedy celková plocha asteroidy je

$$P = 4P_A = \frac{3}{8} \pi a^2.$$

□

1.3 Délka oblouku (křivky)

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} ds = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

Úloha 1.4. Určete délku oblouku asteroidy

$$\begin{array}{lcl} x & = & a \cos^3 t, \\ y & = & a \sin^3 t, \end{array} \quad t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Řešení.

$$x' = -3a \cos^2 t \sin t,$$

$$y' = 3a \sin^2 t \cos t,$$

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= 9a^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t. \end{aligned}$$

$$s = \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t dt = 3a \left[\frac{1}{2} \sin^2 t \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a.$$

(Funkce $\sin t$ i $\cos t$ jsou na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ nezáporné, takže po odmocnění není třeba psát absolutní hodnotu.)

$$\boxed{\text{Délka oblouku asteroidy je } s = \frac{3}{2}a.}$$

(Celková délka asteroidy je tedy $4s = 6a$.)

□

Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

- a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$, $x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x .

Element objemu je

$$\Delta V = P(x) \cdot \Delta x, \quad \text{tj.} \quad dV = P(x) \cdot dx,$$

a objem tělesa je

$$V = \int_a^b P(x) dx.$$

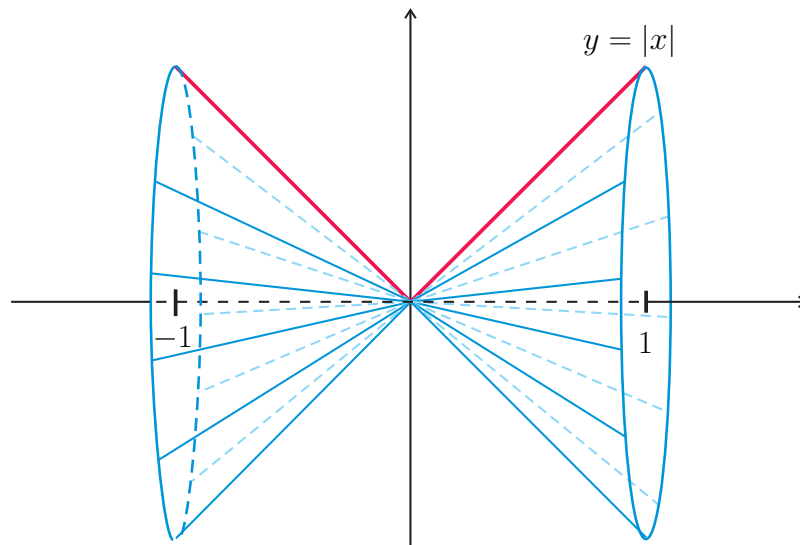
- b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa x a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi[f(x)]^2$ a platí

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Úloha 1.5. Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = |x|$ kolem osy x na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

Řešení. Vyjdeme ze vzorce pro objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce f kolem osy x :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_{-1}^1 |x|^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^2 dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} [j^3].$$

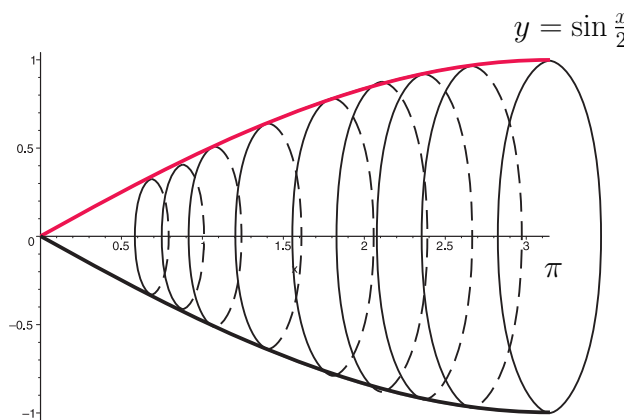


□

Úloha 1.6. Vypočtete objem tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = \sin \frac{x}{2}$ kolem osy x na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

Řešení. Obdobně jako u předchozí úlohy:

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 \frac{x}{2} dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{\pi}{2} [x - \sin x]_0^\pi = \frac{\pi}{2} (\pi) = \frac{1}{2} \pi^2 [j^3].$$



□

Povrch rotační plochy

Jde o plochy vzniklé rotací křivky l kolem osy x . Element povrchu plochy je

$$\Delta S = 2\pi y \Delta s,$$

takže diferenciál povrchu plochy je

$$dS = 2\pi y ds.$$

Je-li křivka l dána parametricky:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

je-li křivka l dána explicitně:

$$y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

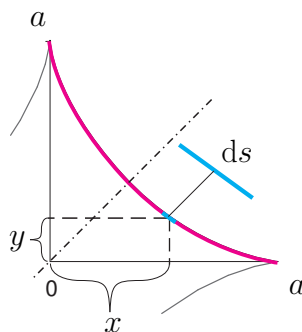
Úloha 1.7. Vypočtěte povrch tělesa vzniklého rotací grafu asteroidy kolem osy x .

Řešení. Ze symetrie asteroidy vyplývá, že celkový povrch získáme jak dvojnásobek povrchu tělesa vzniklého rotací prvního oblouku asteroidy kolem osy x :

$$\begin{aligned} P &= 2 \left(2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y ds \right) = 2 \left(2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t dt \right) = \\ &= 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t dt = \dots = \frac{12}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

□

2 Těžiště oblouku



Nahrazení tělesa hmotným bodem o stejné hmotnosti umístěným v těžišti
 $\Rightarrow$ stejné statické momenty vůči osám.

Hmotnost křivky $m = \sigma s$, při jednotkové měrné hmotnosti: $\sigma = 1 \Rightarrow m = s$.

Těžiště: $T[x_T; y_T]$.

$$\begin{aligned} \text{Těleso:} \quad m &= s \\ M_x &= \int_{\alpha}^{\beta} x \, ds, \\ M_y &= \int_{\alpha}^{\beta} y \, ds. \end{aligned}$$

$$\text{Hmotný bod:} \quad M_x = my_T \Rightarrow y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x \, ds}{\int_{\alpha}^{\beta} ds},$$

$$M_y = mx_T \Rightarrow x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} y \, ds}{\int_{\alpha}^{\beta} ds}.$$

Úloha 2.1. *Určete těžiště jednoho oblouku asteroidy.*

Řešení. Z dřívějšíka víme, že délka (a tedy i hmotnost při jednotkové délkové hustotě) jednoho oblouku asteroidy je

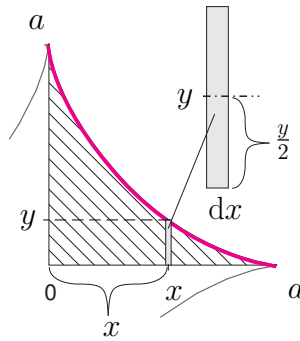
$$m = s = \frac{3}{2}a.$$

Vzhledem k tomu, že uvažovaný oblouk asteroidy leží v prvním kvadrantu a je symetrický vzhledem k ose prvního a třetího kvadrantu (viz obrázek), tak jeho těžiště leží na této ose, takže $y_T = x_T$.

$$\begin{aligned} y_T = x_T &= \frac{M_x}{m} = \frac{\int_0^{\pi/2} y \, ds}{s} = \frac{\int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t \, dt}{\frac{3}{2}a} \\ &= 2a \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t \, dt = 2a \left[\frac{\sin^5 t}{5} \right]_0^{\pi/2} = 2a \left(\frac{1}{5} - 0 \right) = \frac{2}{5}a. \end{aligned}$$

Těžiště prvního oblouku asteroidy tedy leží v bodě $T = \left[\frac{2}{5}a; \frac{2}{5}a \right]$. □

3 Těžiště plochy



Nyní uvažujme jeden element desky, který má šířku Δx ($= dx$).
 Statický moment tohoto elementu vzhledem k ose x je

$$dM_x = (y \, dx) \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2}y$$

(hmotnost elementu násobená ramenem síly), podobně

$$dM_y = (y \, dx) \cdot \sigma \cdot x.$$

Statický moment celé (homogenní) desky vzhledem k osám je

$$M_x = \frac{1}{2}\sigma \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \sigma \int_a^b xy dx.$$

Těžiště $T[x_T, y_T]$ rovinné desky je bod, který má vzhledem k souřadnicovým osám stejný statický moment jako celá deska, pokud za jeho hmotnost považujeme hmotnost m celé desky.

Proto

$$mx_T = M_y, \quad my_T = M_x$$

a z toho (po zkrácení σ)

$$x_T = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}, \quad y_T = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}.$$

Pokud má deska tvar oblasti normální vzhledem k ose x , tj. je-li

$$a \leq x \leq b, \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

pak lze podobně odvodit vzorce pro souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{\int_a^b x(y_2 - y_1) dx}{\int_a^b (y_2 - y_1) dx}, \quad y_T = \frac{\int_a^b \frac{(y_2 + y_1)}{2} (y_2 - y_1) dx}{\int_a^b (y_2 - y_1) dx}.$$

Úloha 3.1. Určete těžiště „prvního kvadrantu“ asteroidy

Řešení. Z dřívějšíka víme, že plocha (a tedy i hmotnost při jednotkové plošné hustotě) prvního kvadrantu asteroidy je

$$m = P = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

A opět ze symetrie

$$\begin{aligned}
x_T &= y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\left| \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^2(t) \varphi'(t) dt \right|}{P} = \frac{\left| \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t 3a \cos^2 t (-\sin t) dt \right|}{\frac{3}{8} \pi a^2} = \\
&= \frac{\left| \frac{3}{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt \right|}{\frac{3}{8} \pi a^2} = \frac{4a}{\pi} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2)^3 \cos^2 t \sin t dt \right| = \\
&= \left[\begin{array}{c} \cos t = z \\ -\sin t dt = dz \\ t = 0 \Rightarrow z = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{přehození} \\ \text{znaménka} \\ \text{a mezí} \end{array} \right] = \frac{4a}{\pi} \left| \int_0^1 (1 - z^2)^3 z^2 dz \right| = \\
&= \frac{4a}{\pi} \left| \int_0^1 ((1 - 3z^2 + 3z^4 - z^6) z^2) dz \right| = \frac{4a}{\pi} \left| \int_0^1 (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8) dz \right| = \\
&= \frac{4a}{\pi} \left| \left[\frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9} \right]_0^1 \right| = \frac{4a}{\pi} \left| \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right| = \frac{4a}{\pi} \left| \frac{16}{315} \right| = \frac{64}{315} \frac{a}{\pi}.
\end{aligned}$$

□