

Cvičení č. 19a z KMA-MMAN2

29. března 2010

1 Nevlastní integrály

1.1 Nevlastní integrál vlivem meze

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_a^K f(x) \, dx \quad \text{označíme} \quad \int_a^{+\infty} f(x) \, dx$$

Definice dává návod i pro jeho výpočet.

Úloha 1.1. Vypočtěte $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Řešení. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_1^K \frac{dx}{x^2} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1}^K = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{K} \right) = 1$.
Zadaný integrál konverguje. $\square$

Úloha 1.2. Vypočtěte $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Řešení. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_1^K \frac{dx}{x} = \lim_{K \rightarrow +\infty} [\ln x]_{x=1}^K = \lim_{K \rightarrow +\infty} (\ln K - \ln 1) = +\infty$. Zadaný integrál diverguje. $\square$

Rozšíření definice:

$$\int_{-\infty}^b f(x) \, dx \quad \text{jako} \quad \lim_{H \rightarrow -\infty} \int_H^b f(x) \, dx$$

a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx \quad \text{jako} \quad \lim_{\substack{H \rightarrow -\infty \\ K \rightarrow +\infty}} \int_H^K f(x) \, dx \quad (\text{jde o dvojnou limitu}).$$

Výpočet této dvojné limity lze převést na výpočet dvou jednoduchých limit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^c f(x) \, dx + \int_c^{+\infty} f(x) \, dx.$$

Úloha 1.3. Vypočtěte $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{H \rightarrow -\infty} [\arctg x]_{x=H}^0 + \lim_{K \rightarrow +\infty} [\arctg x]_{x=0}^K = \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \end{aligned}$$

□

Úloha 1.4. Vypočtěte $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{1+x^2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{x \, dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{H \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{x=H}^0 + \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{x=0}^K = \\ &= 0 - (+\infty) + (+\infty) - 0, \end{aligned}$$

limita neexistuje, tedy daný integrál je divergentní.

□

Hlavní hodnota nevlastního integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx := \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K f(x) \, dx$$

(tj. místo dvojné limity jde o limitu jednoduchou, kde $H = -K$). (*konvergence ve smyslu hlavní hodnoty.*)

Úloha 1.5. Vypočtěte v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{1+x^2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{1+x^2} &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \frac{x \, dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{K \rightarrow +\infty} \left(\ln(1+K^2) - \ln(1+(-K)^2) \right) = \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+K^2}{1+K^2} = 0. \end{aligned}$$

V úloze 1.4 jsme viděli, že zadaný integrál (dvojná limita) diverguje, ale nyní jsme zjistili, že ve smyslu hlavní hodnoty konverguje. $\square$

1.2 Nevlastní integrál vlivem funkce

$$\lim_{s \rightarrow b^-} \int_a^s f(x) \, dx \quad \text{označíme} \quad \int_a^b f(x) \, dx$$

Je třeba dát pozor na to, že ze zápisu integrálu nemusí být hned patrné, zda jde o určitý integrál Riemannův nebo integrál nevlastní.

Úloha 1.6. Vypočtěte $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Řešení. Funkce není omezená v pravém okolí počátku, tj. bod 0 je singulární, je však integrace schopná na každém intervalu $\langle s, 1 \rangle$, kde $s \in (0, 1)$.

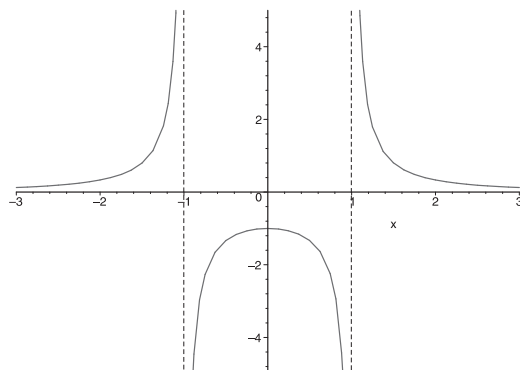
$$I = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{s \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{x=s}^1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{s}) = 2.$$

$\square$

Případ singulárního bodu (nebo více singulárních bodů) uvnitř intervalu integrace:

Je-li na daném intervalu integrace více singulárních bodů, rozdělíme tento interval na podintervaly tak, aby na každém z nich byl singulární bod nejvýše jeden (jako krajní bod), a vyšetřujeme integrály z dané funkce na jednotlivých podintervalech. Jsou-li všechny tyto integrály konvergentní, pak je konvergentní i výchozí integrál a je roven součtu komponent.

Úloha 1.7. Vypočtěte $I = \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$.



Řešení. Nejprve si nachystáme primitivní funkci:

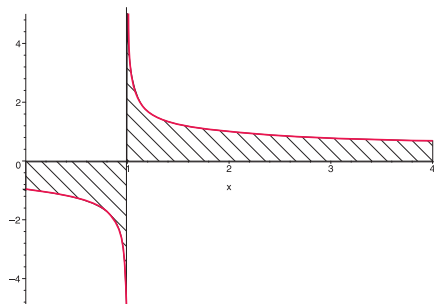
$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right) + C.$$

Singulární body: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, takže integraci rozdělíme na čtyři intervaly:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2 - 1} = \int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^2 - 1} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 1} + \int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1^-} \int_{-3}^s \frac{dx}{x^2 - 1} + \lim_{s \rightarrow -1^+} \int_s^0 \frac{dx}{x^2 - 1} + \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_0^s \frac{dx}{x^2 - 1} + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^3 \frac{dx}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right) \right]_{-3}^s + \lim_{s \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right) \right]_s^0 + \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right) \right]_0^s + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right) \right]_s^3 = \\ &= +\infty - \infty - \infty + \infty = \text{nedefinováno.} \end{aligned}$$

□

Úloha 1.8. Vypočtete obsah části roviny ohraničené přímkami $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ a grafem $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.



Řešení. Daná funkce není omezená na okolí bodu 1, ve kterém není definována. Při výpočtu plochy budeme tedy muset vypočítat nevlastní integrál vlivem funkce. Vzhledem k tomu, že singulární bod je uvnitř intervalu integrace, rozdělíme jej na dva:

$$\begin{aligned}
 P &= \left| \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \right| + \left| \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \right| = \\
 &= \left| \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_0^s \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \right| + \left| \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \right| = \\
 &= \left| \lim_{s \rightarrow 1^-} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} \right]_0^s \right| + \left| \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} \right]_s^4 \right| = \\
 &= \left| \lim_{s \rightarrow 1^-} \left(\frac{3}{2} (\sqrt[3]{(s-1)^2} - 1) \right) \right| + \left| \lim_{s \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{2} (\sqrt[3]{(4-1)^2} - \sqrt[3]{(s-1)^2}) \right) \right| = \\
 &= \left| \frac{3}{2} (-1) \right| + \left| \frac{3}{2} (\sqrt[3]{(3)^2}) \right| = \frac{3}{2} (1 + \sqrt[3]{(3)^2}) \text{ [j}^2\text{]}.
 \end{aligned}$$

□

1.3 Vlastnosti nevlastních integrálů

Oba druhy nevlastních integrálů lze formálně sloučit do vyjádření: $\int_a^A f(x) dx$, kde A je (jediný) singulární bod: buď $A = +\infty$ nebo $A \in \mathbb{R}$, $A > a$, přičemž funkce f není omezená v levém okolí bodu A .

Věta 1.9 (lineární vlastnosti). *Jsou-li integrály $\int_a^A f(x) dx$, $\int_a^A g(x) dx$ konvergentní a $c \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo, pak*

- (1) $\int_a^A [f(x) + g(x)] dx$ konverguje a je roven součtu integrálů obou komponent,
- (2) $\int_a^A cf(x) dx$ konverguje a rovná se $c \int_a^A f(x) dx$.

I některé další vlastnosti Riemannova integrálu se přenášejí na integrály nevlastní. Například $\forall p \in \langle a, A \rangle$ platí pro konvergentní integrál

$$\int_a^A f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^A f(x) dx.$$

1.4 Kriteria konvergence nevlastních integrálů

Věta 1.10 (srovnávací kritérium). *Nechť $0 \leq f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, A \rangle$, kde $a < A \leq +\infty$, funkce f, g jsou integrace schopné na každém intervalu $\langle a, s \rangle$, kde $s \in (a, A)$, A je (jediný) singulární bod. Pak*

- (1) z konvergence $\int_a^A g(x) dx$ plyne konvergence $\int_a^A f(x) dx$
- (2) z divergence $\int_a^A f(x) dx$ plyne divergence $\int_a^A g(x) dx$.

Z definice konvergence plyne:

Věta 1.11. $\forall c \in \langle a, A \rangle$ platí, že integrály $\int_a^A f(x) dx$ a $\int_c^A f(x) dx$ současně konvergují nebo divergují.

Při použití srovnávacího kriteria proto není třeba uvažovat celý interval $\langle a, A \rangle$, ale nerovnost mezi funkcemi stačí dokázat jen na jeho části $\langle c, A \rangle$.

Věta 1.12 (o absolutní hodnotě integrálu). *Jestliže konverguje $\int_a^A |f(x)| dx$, pak konverguje i $\int_a^A f(x) dx$ a platí $\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq \int_a^A |f(x)| dx$.*

Úloha 1.13. *Zajímá nás konvergence integrálu $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^2}$.*

Řešení. Jelikož $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ je konvergentní a platí $|\sin x| \leq 1$, tj. též $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, je také zadaný integrál konvergentní. $\square$

Úloha 1.14. *Zajímá nás konvergence integrálu $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} \, dx$.*

Řešení. Použijeme srovnávací kritérium, porovnávat budeme náš nevlastní integrál z funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ s nevlastním integrálem z funkce $g(x) = \frac{1}{x}$. Jelikož potřebujeme srovnávat nezáporné funkce, využijeme ještě větu 1.11, která nám umožní omezit se na interval $\langle e, +\infty \rangle$ kde již platí:

$$0 \leq g(x) \leq f(x), \quad \text{konkrétně} \quad 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x},$$

a tedy

$$0 \leq \int_e^{+\infty} g(x) \, dx \leq \int_e^{+\infty} f(x) \, dx.$$

$$\begin{aligned} \int_e^{+\infty} g(x) \, dx &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_e^K \frac{dx}{x} = \lim_{K \rightarrow +\infty} [\ln |x|]_e^K = \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} (\ln K - \ln e) = +\infty, \end{aligned}$$

a tak podle srovnávacího kritéria 1.10 i $\int_e^{+\infty} f(x) \, dx$ diverguje a podle věty 1.11 diverguje i původní $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$.

$\square$

Elementární metody řešení obyčejných DR

Separace proměnných

Úloha 1.15. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $yy' = \frac{1-2t}{y}$.

Řešení.

$$y \cdot y' = \frac{1-2t}{y} \quad | : y \neq 0 \leftarrow \text{definiční obor}$$

$$y' = \frac{1-2t}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1-2t}{y^2} \quad | \cdot y^2 \cdot dt$$

$$y^2 \cdot dy = (1-2t) dt$$

$$\int y^2 dy = \int (1-2t) dt$$

$$\frac{1}{3} y^3 = t - t^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$y^3 = 3t - 3t^2 + C_2, \quad C_2 = 3C_1 \Rightarrow C_2 \in \mathbb{R}$$

$$\left[y = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R} \right]$$

□

2 Substituce a) (lineární výraz)

Úloha 2.1. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $y' = (4y - t)^2$.

Řešení.

$$y' = (4y - t)^2 \quad (\text{lineární výraz})$$

$$\begin{aligned} \text{Substituce: } z &= 4y - t \\ z' &= 4y' - 1 \\ y' &= \frac{z' + 1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Dosadíme: } \frac{z' + 1}{4} = z^2, \quad z' = 4z^2 - 1,$$

$$\frac{dz}{dt} = 4z^2 - 1 \quad | : (4z^2 - 1) \neq 0 \Rightarrow \boxed{z \neq \pm \frac{1}{2}}$$

$$\frac{dz}{4z^2 - 1} = dt, \quad \int \frac{dz}{4z^2 - 1} = \int dt,$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dz}{2z+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{2z-1} = \int dt$$

$$-\frac{1}{4} \ln|2z+1| + \frac{1}{4} \ln|2z-1| = t + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = t + \ln C_1$$

$z \equiv \frac{1}{2} : L = z' = 0$
 $P = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$
je řešením
 $z \equiv -\frac{1}{2} : L = z' = 0$
 $P = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$
je také řešením

$$\ln \left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = 4t + \ln C_2, \quad C_2 > 0$$

$$\left| \frac{2z-1}{2z+1} \right| = C_2 \cdot e^{4t}$$

$$\frac{2z-1}{2z+1} = C_3 e^{4t}, \quad C_3 \neq 0 \quad (C_3 = \pm C_2)$$

Když u C_3 povolíme 0, dostaneme do tohoto zápisu i řešení $z \equiv \frac{1}{2}$ (tedy nula v čitateli na levé straně).

$$\frac{2z-1}{2z+1} = C \cdot e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Řešení $z \equiv -\frac{1}{2}$ odpovídá nule ve jmenovateli, takže je zapíšeme zvlášť:

$$\left[\frac{2z-1}{2z+1} = C \cdot e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad z \equiv -\frac{1}{2} \right]$$

Návrat před substitucí:

$$\left[\frac{8y-2t-1}{8y-2t+1} = C \cdot e^{4t}, \quad C \in \mathbb{R}; \quad y = \frac{t-\frac{1}{2}}{4} \right]$$

□

3 Substituce b) (homogenní)

Úloha 3.1. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $y^2 dt + (t^2 - ty) dy$.

Řešení.

$$y^2 dt + (t^2 - ty) dy = 0 \quad | : dt$$

$$y^2 + (t^2 - ty) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$y' = \frac{-y^2}{t^2 - ty}$$

$$t^2 - ty \neq 0$$

$$t(t-y) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} t \neq 0 \\ y \neq t \end{matrix}$$

Je homogenní

Případ $y = t$:

$$t^2 + (t^2 - t^2) \cdot 1 = t^2 \neq 0$$

nejde o řešení DR

$$y' = \frac{y^2}{ty - t^2} \cdot \frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2}{\left(\frac{y}{t}\right) - 1}$$

Substituce:

$$z = \frac{y}{t}$$

$$zt = y$$

$$y' = z' t + z$$

Dosadíme:

$$z't + z = \frac{z^2}{z-1} \quad , \quad z't = \frac{z^2}{z-1} - z$$

$$z't = \frac{z^2 - z^2 + z}{z-1} \quad , \quad z't = \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{dz}{dt} t = \frac{z}{z-1} \quad | : t, : \frac{z}{z-1} \cdot dt$$

$$\frac{z-1}{z} dz = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{z-1}{z} dz = \int \frac{dt}{t}$$

$$e^{(z - \ln|z|)} = e^{(\ln|t| + \ln C_1)}, \quad C_1 > 0$$

$$\frac{e^z}{|z|} = C_1 \cdot |t|, \quad \frac{e^z}{z} = C_2 t, \quad C_2 \neq 0$$

$$\text{Dosadíme: } \frac{e^{\frac{y}{t}}}{\frac{y}{t}} = C_2 t, \quad y = C_3 e^{\frac{y}{t}}, \quad C_3 \neq 0$$

$$\boxed{y = C e^{\frac{y}{t}}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$t \neq 0$ již máme ↑
 $z \neq 0$ jde o řešení?

$$z \equiv 0: \quad L = 0 \cdot t = 0 \quad L = P$$

$$P = \frac{0}{0-1} = 0$$

Ano, $z \equiv 0$ je řeš. DR.

$\Rightarrow y \equiv 0$ je řeš. DR.

↓ $C=0$

□

Úloha 3.2. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $t dy - y dt = y dy$.

Řešení.

$$t dy - y dt = y dy, \quad (t-y) dy = y dt \quad | : dt$$

$$(t-y) \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t-y} \quad \begin{array}{l} y \neq t \\ y=t \text{ není řešením DR} \end{array}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}} \quad \text{Substitution: } z = \frac{y}{t} \\ y' = z't + z$$

$$z't + z = \frac{z}{1-z}, \quad z't = \frac{z}{1-z} - z, \quad z't = \frac{z - z + z^2}{1-z}$$

$$z't = \frac{z^2}{1-z} \quad | : t, : \frac{z^2}{1-z} \quad \begin{array}{l} t \neq 0 \text{ automaticky} \\ z^2 \neq 0, z \neq 0 \\ y \equiv 0 \text{ je řeš. DR} \end{array}$$

$$\int \frac{1-z}{z^2} dz = \int \frac{dt}{t}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln|z| = \ln|t| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\left(\frac{1}{z} + \ln|z| \right) = (-\ln|t| + \ln C_2), \quad C_2 > 0$$

$$|z| \cdot e^{\frac{1}{z}} = C_2 \cdot \frac{1}{|t|}, \quad z \cdot e^{\frac{1}{z}} = C_3 \cdot \frac{1}{t}, \quad C_3 \neq 0$$

zpětné dosazení:

$$\frac{y}{t} \cdot e^{\frac{t}{y}} = C_3 \cdot \frac{1}{t} \quad | \cdot t (\neq 0), \quad y \cdot e^{\frac{t}{y}} = C_3 \quad | : e^{\frac{t}{y}} (\neq 0)$$

$$y = C_3 \cdot e^{\frac{t}{y}}$$

$$\boxed{y = C \cdot e^{\frac{t}{y}}, C \in \mathbb{R}}$$

□