

Cvičení č. 19b z KMA-MMAN2

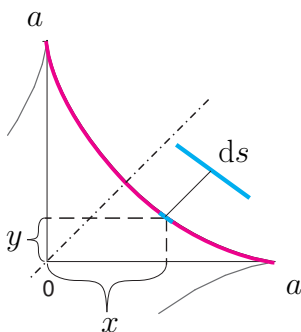
1. dubna 2010

1 Aplikace určitého integrálu v geometrii

1.1 Vzorce pro obsah a délku

	Obsah	Délka křivky
Explicitně	$\int_a^b f(x) \, dx$	$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \, dx$
Parametricky	$\left \int_{\alpha}^{\beta} y \, dx \right = \left \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) \, dt \right $	$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \, dt$
Polárně	$\frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \, d\varphi$	$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} \, d\varphi$

2 Těžiště oblouku



Nahrazení tělesa hmotným bodem o stejné hmotnosti umístěným v těžišti
 $\Rightarrow$ stejné statické momenty vůči osám.

Hmotnost křivky $m = \sigma s$, při jednotkové měrné hmotnosti: $\sigma = 1 \Rightarrow m = s$.

Těžiště: $T[x_T; y_T]$.

$$\begin{aligned} \text{Těleso:} \quad m &= s \\ M_x &= \int_{\alpha}^{\beta} x \, ds, \\ M_y &= \int_{\alpha}^{\beta} y \, ds. \end{aligned}$$

$$\text{Hmotný bod:} \quad M_x = my_T \Rightarrow y_T = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} x \, ds}{\int_{\alpha}^{\beta} ds},$$

$$M_y = mx_T \Rightarrow x_T = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} y \, ds}{\int_{\alpha}^{\beta} ds}.$$

Úloha 2.1. *Určete těžiště jednoho oblouku asteroidy.*

Řešení. Z dřívějšíka víme, že délka (a tedy i hmotnost při jednotkové délkové hustotě) jednoho oblouku asteroidy je

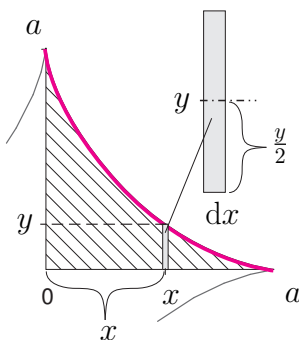
$$m = s = \frac{3}{2}a.$$

Vzhledem k tomu, že uvažovaný oblouk asteroidy leží v prvním kvadrantu a je symetrický vzhledem k ose prvního a třetího kvadrantu (viz obrázek), tak jeho těžiště leží na této ose, takže $y_T = x_T$.

$$\begin{aligned} y_T = x_T &= \frac{M_x}{m} = \frac{\int_0^{\pi/2} y \, ds}{s} = \frac{\int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \sin t \cos t \, dt}{\frac{3}{2}a} \\ &= 2a \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t \, dt = 2a \left[\frac{\sin^5 t}{5} \right]_0^{\pi/2} = 2a \left(\frac{1}{5} - 0 \right) = \frac{2}{5}a. \end{aligned}$$

Těžiště prvního oblouku asteroidy tedy leží v bodě $T = \left[\frac{2}{5}a; \frac{2}{5}a \right]$. □

3 Těžiště plochy



Nyní uvažujme jeden element desky, který má šířku $\Delta x (= dx)$.
 Statický moment tohoto elementu vzhledem k ose x je

$$dM_x = (y dx) \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2}y$$

(hmotnost elementu násobená ramenem síly), podobně

$$dM_y = (y dx) \cdot \sigma \cdot x.$$

Statický moment celé (homogenní) desky vzhledem k osám je

$$M_x = \frac{1}{2}\sigma \int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \sigma \int_a^b xy dx.$$

Těžiště $T[x_T, y_T]$ rovinné desky je bod, který má vzhledem k souřadnicovým osám stejný statický moment jako celá deska, pokud za jeho hmotnost považujeme hmotnost m celé desky.

Proto

$$mx_T = M_y, \quad my_T = M_x$$

a z toho (po zkrácení σ)

$$x_T = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}, \quad y_T = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}.$$

Pokud má deska tvar oblasti normální vzhledem k ose x , tj. je-li

$$a \leq x \leq b, \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

pak lze podobně odvodit vzorce pro souřadnice těžiště:

$$x_T = \frac{\int_a^b x(y_2 - y_1) dx}{\int_a^b (y_2 - y_1) dx}, \quad y_T = \frac{\int_a^b \frac{(y_2 + y_1)}{2} (y_2 - y_1) dx}{\int_a^b (y_2 - y_1) dx}.$$

Úloha 3.1. *Určete těžiště „prvního kvadrantu“ asteroidy*

Řešení. Z dřívějšíka víme, že plocha (a tedy i hmotnost při jednotkové plošné hustotě) prvního kvadrantu asteroidy je

$$m = P = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

A opět ze symetrie

$$\begin{aligned} x_T = y_T = \frac{M_x}{m} &= \frac{\left| \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi^2(t) \varphi'(t) dt \right|}{P} = \frac{\left| \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t 3a \cos^2 t (-\sin t) dt \right|}{\frac{3}{8}\pi a^2} = \\ &= \frac{\left| \frac{3}{2} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt \right|}{\frac{3}{8}\pi a^2} = \frac{4a}{\pi} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2)^3 \cos^2 t \sin t dt \right| = \\ &= \left[\begin{array}{l} \cos t = z \\ -\sin t dt = dz \\ t = 0 \Rightarrow z = 1 \\ t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{přehození} \\ \text{znaménka} \\ \text{a mezí} \end{array} \right] = \frac{4a}{\pi} \left| \int_0^1 (1 - z^2)^3 z^2 dz \right| = \\ &= \frac{4a}{\pi} \left| \int_0^1 ((1 - 3z^2 + 3z^4 - z^6)z^2) dz \right| = \frac{4a}{\pi} \left| \int_0^1 (z^2 - 3z^4 + 3z^6 - z^8) dz \right| = \\ &= \frac{4a}{\pi} \left| \left[\frac{z^3}{3} - \frac{3z^5}{5} + \frac{3z^7}{7} - \frac{z^9}{9} \right]_0^1 \right| = \frac{4a}{\pi} \left| \frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right| = \frac{4a}{\pi} \left| \frac{16}{315} \right| = \frac{64}{315} \frac{a}{\pi}. \end{aligned}$$

□

4 Nevlastní integrály

4.1 Nevlastní integrál vlivem meze

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \int_a^K f(x) dx \quad \text{označíme} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

Definice dává návod i pro jeho výpočet.

Úloha 4.1. *Vypočtěte $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.*

$$\text{Řešení. } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_1^K \frac{dx}{x^2} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_{x=1}^K = \lim_{K \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{K} \right) = 1.$$

Zadaný integrál konverguje. □

Úloha 4.2. Vypočtěte $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Řešení. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_1^K \frac{dx}{x} = \lim_{K \rightarrow +\infty} [\ln x]_{x=1}^K = \lim_{K \rightarrow +\infty} (\ln K - \ln 1) = +\infty$. Zadaný integrál diverguje. $\square$

Rozšíření definice:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{jako} \quad \lim_{H \rightarrow -\infty} \int_H^b f(x) dx$$

a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad \text{jako} \quad \lim_{\substack{H \rightarrow -\infty \\ K \rightarrow +\infty}} \int_H^K f(x) dx \quad (\text{jde o dvojnou limitu}).$$

Výpočet této dvojné limity lze převést na výpočet dvou jednoduchých limit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx.$$

Úloha 4.3. Vypočtěte $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{H \rightarrow -\infty} [\arctg x]_{x=H}^0 + \lim_{K \rightarrow +\infty} [\arctg x]_{x=0}^K = \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi. \end{aligned}$$

$\square$

Úloha 4.4. Vypočtěte $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \\ &= \lim_{H \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{x=H}^0 + \lim_{K \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{x=0}^K = \\ &= 0 - (+\infty) + (+\infty) - 0, \end{aligned}$$

limita neexistuje, tedy daný integrál je divergentní. $\square$

Hlavní hodnota nevlastního integrálu $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx := \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K f(x) \, dx$$

(tj. místo dvojný limity jde o limitu jednoduchou, kde $H = -K$). (*konvergence ve smyslu hlavní hodnoty*.)

Úloha 4.5. Vypočtěte $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{1+x^2}$.

Řešení.

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \, dx}{1+x^2} &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_{-K}^K \frac{x \, dx}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{K \rightarrow +\infty} \left(\ln(1+K^2) - \ln(1+(-K)^2) \right) = \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+K^2}{1+K^2} = 0. \end{aligned}$$

V úloze 4.4 jsme viděli, že zadaný integrál (dvojná limita) diverguje, ale nyní jsme zjistili, že ve smyslu hlavní hodnoty konverguje. $\square$

4.2 Nevlastní integrál vlivem funkce

$$\lim_{s \rightarrow b^-} \int_a^s f(x) \, dx \quad \text{označíme} \quad \int_a^b f(x) \, dx$$

Je třeba dát pozor na to, že ze zápisu integrálu nemusí být hned patrné, zda jde o určitý integrál Riemannův nebo integrál nevlastní.

Úloha 4.6. Vypočtěte $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Řešení. Funkce není omezená v pravém okolí počátku, tj. bod 0 je singulární, je však integrace schopná na každém intervalu $\langle s, 1 \rangle$, kde $s \in (0, 1)$.

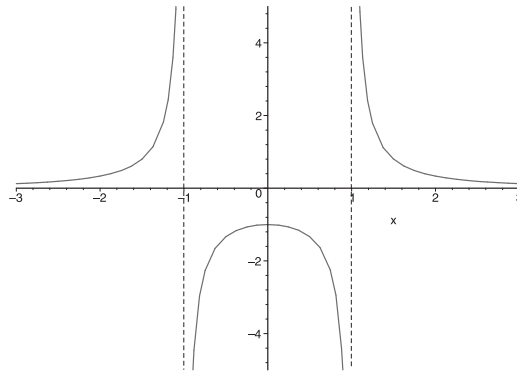
$$I = \lim_{s \rightarrow 0^+} \int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{s \rightarrow 0^+} [2\sqrt{x}]_{x=s}^1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{s}) = 2.$$

$\square$

Případ singulárního bodu (nebo více singulárních bodů) uvnitř intervalu integrace:

Je-li na daném intervalu integrace více singulárních bodů, rozdělíme tento interval na podintervaly tak, aby na každém z nich byl singulární bod nejvýše jeden (jako krajní bod), a vyšetřujeme integrály z dané funkce na jednotlivých podintervalech. Jsou-li všechny tyto integrály konvergentní, pak je konvergentní i výchozí integrál a je roven součtu komponent.

Úloha 4.7. Vypočtěte $I = \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$.



Řešení. Nejprve si nachystáme primitivní funkci:

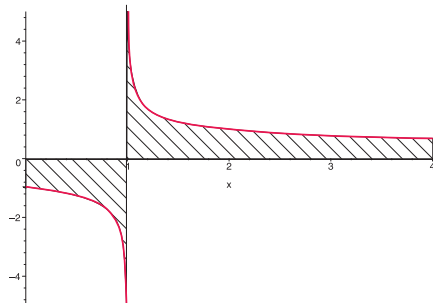
$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right) + C.$$

Singulární body: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, takže integraci rozdělíme na čtyři intervaly:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2 - 1} = \int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x^2 - 1} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 1} + \int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1^-} \int_{-3}^s \frac{dx}{x^2 - 1} + \lim_{s \rightarrow -1^+} \int_s^0 \frac{dx}{x^2 - 1} + \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_0^s \frac{dx}{x^2 - 1} + \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^3 \frac{dx}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{s \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right) \right]_{-3}^s + \lim_{s \rightarrow -1^+} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right) \right]_s^0 + \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right) \right]_0^s + \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{2} \left(\ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| \right) \right]_s^3 = \\ &= +\infty - \infty - \infty + \infty = \text{nedefinováno.} \end{aligned}$$

□

Úloha 4.8. Vypočítejte obsah části roviny ohraničené přímkami $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ a grafem $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.



Řešení. Daná funkce není omezená na okolí bodu 1, ve kterém není definována. Při výpočtu plochy budeme tedy muset vypočítat nevlastní integrál vlivem funkce. Vzhledem k tomu, že singulární bod je uvnitř intervalu integrace, rozdělíme jej na dva:

$$\begin{aligned}
 P &= \left| \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \right| + \left| \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \right| = \\
 &= \left| \lim_{s \rightarrow 1^-} \int_0^s \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \right| + \left| \lim_{s \rightarrow 1^+} \int_s^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \right| = \\
 &= \left| \lim_{s \rightarrow 1^-} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} \right]_0^s \right| + \left| \lim_{s \rightarrow 1^+} \left[\frac{3}{2} \sqrt[3]{(x-1)^2} \right]_s^4 \right| = \\
 &= \left| \lim_{s \rightarrow 1^-} \left(\frac{3}{2} (\sqrt[3]{(s-1)^2} - 1) \right) \right| + \left| \lim_{s \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{2} (\sqrt[3]{(4-1)^2} - \sqrt[3]{(s-1)^2}) \right) \right| = \\
 &= \left| \frac{3}{2} (-1) \right| + \left| \frac{3}{2} (\sqrt[3]{(3)^2}) \right| = \frac{3}{2} (1 + \sqrt[3]{(3)^2}) [j^2].
 \end{aligned}$$

□

4.3 Vlastnosti nevlastních integrálů

Oba druhy nevlastních integrálů lze formálně sloučit do vyjádření: $\int_a^A f(x) dx$, kde A je (jediný) singulární bod: buď $A = +\infty$ nebo $A \in \mathbb{R}$, $A > a$, přičemž funkce f není omezená v levém okolí bodu A .

Věta 4.9 (lineární vlastnosti). Jsou-li integrály $\int_a^A f(x) dx$, $\int_a^A g(x) dx$ konvergentní a $c \in \mathbb{R}$ je libovolné číslo, pak

(1) $\int_a^A [f(x)+g(x)] dx$ konverguje a je roven součtu integrálů obou komponent,

(2) $\int_a^A cf(x) dx$ konverguje a rovná se $c \int_a^A f(x) dx$.

I některé další vlastnosti Riemannova integrálu se přenášejí na integrály nevlastní. Například $\forall p \in \langle a, A \rangle$ platí pro konvergentní integrál

$$\int_a^A f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^A f(x) dx.$$

4.4 Kriteria konvergence nevlastních integrálů

Věta 4.10 (srovnávací kritérium). *Nechť $0 \leq f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, A \rangle$, kde $a < A \leq +\infty$, funkce f, g jsou integrace schopné na každém intervalu $\langle a, s \rangle$, kde $s \in (a, A)$, A je (jediný) singulární bod. Pak*

(1) z konvergence $\int_a^A g(x) dx$ plyne konvergence $\int_a^A f(x) dx$

(2) z divergence $\int_a^A f(x) dx$ plyne divergence $\int_a^A g(x) dx$.

Z definice konvergence plyne:

Věta 4.11. $\forall c \in \langle a, A \rangle$ platí, že integrály $\int_a^A f(x) dx$ a $\int_c^A f(x) dx$ současně konvergují nebo divergují.

Při použití srovnávacího kritéria proto není třeba uvažovat celý interval $\langle a, A \rangle$, ale nerovnost mezi funkcemi stačí dokázat jen na jeho části $\langle c, A \rangle$.

Věta 4.12 (o absolutní hodnotě integrálu). *Jestliže konverguje $\int_a^A |f(x)| dx$, pak konverguje i $\int_a^A f(x) dx$ a platí $\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq \int_a^A |f(x)| dx$.*

Úloha 4.13. *Zajímá nás konvergence integrálu $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}$.*

Řešení. Jelikož $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ je konvergentní a platí $|\sin x| \leq 1$, tj. též $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, je také zadaný integrál konvergentní. $\square$

Úloha 4.14. *Zajímá nás konvergence integrálu $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.*

Řešení. Použijeme srovnávací kritérium, porovnávat budeme náš nevlastní integrál z funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ s nevlastním integrálem z funkce $g(x) = \frac{1}{x}$. Jelikož potřebujeme srovnávat nezáporné funkce, využijeme ještě větu 4.11, která nám umožní omezit se na interval $\langle e, +\infty \rangle$ kde již platí:

$$0 \leq g(x) \leq f(x), \quad \text{konkrétně} \quad 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x},$$

a tedy

$$0 \leq \int_e^{+\infty} g(x) \, dx \leq \int_e^{+\infty} f(x) \, dx.$$

$$\begin{aligned} \int_e^{+\infty} g(x) \, dx &= \lim_{K \rightarrow +\infty} \int_e^K \frac{dx}{x} = \lim_{K \rightarrow +\infty} [\ln |x|]_e^K = \\ &= \lim_{K \rightarrow +\infty} (\ln K - \ln e) = +\infty, \end{aligned}$$

a tak podle srovnávacího kritéria 4.10 i $\int_e^{+\infty} f(x) \, dx$ diverguje a podle věty 4.11 diverguje i původní $\int_1^{+\infty} f(x) \, dx$.

□