

Cvičení č. 20 z KMA-MMAN2

12. a 15. dubna 2010

Elementární metody řešení obyčejných DR

1 Substituce b) (homogenní)

Této rovnici se říká homogenní podle toho, že funkce F na pravé straně je tzv. *homogenní funkce*. Užijeme substituci $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = zt$, tedy $y' = z + tz'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice a po úpravě dostaneme rovnici

$$z't = F(z) - z,$$

v níž lze separovat proměnné. Ježto přitom tuto rovnici dělíme výrazem $F(z) - z$, musíme vyloučit jeho nulovou hodnotu a nakonec opět ověřit, zda z rovnosti nule nedostaneme další řešení dané rovnice. Nakonec se pak vracíme k původní proměnné.

Úloha 1.1. Řešte rovnici $2tyy' = y^2 - t^2$.

Řešení. Rovnici nejprve upravíme na tvar:

$$y' = \frac{y^2 - t^2}{2ty}$$

a po dělení čitatele i jmenovatele výrazem t dostaneme uvedený tvar rovnice, tedy

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{t}}.$$

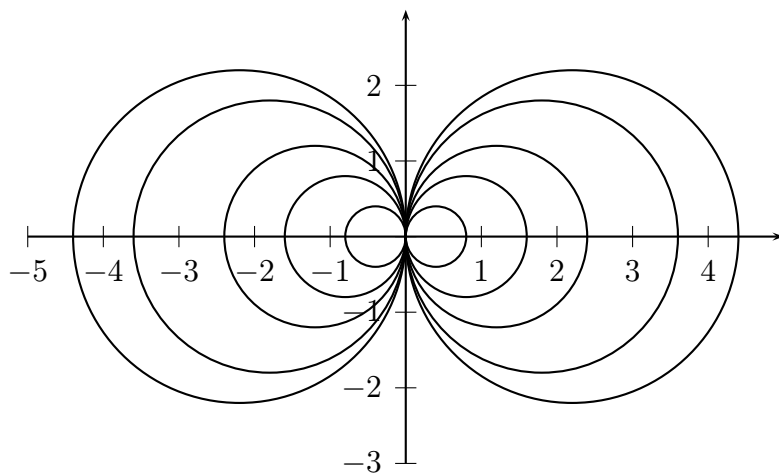
Nyní zvolíme novou neznámou funkci vztahem $z = \frac{y}{t}$, odkud $y = zt$, tedy $y' = z + tz'$. Po dosazení do dané diferenciální rovnice dostaneme $z + tz' = \frac{y^2 - 1}{2y}$, a po separaci proměnných máme

$$\frac{2z \, dz}{z^2 + 1} = -\frac{dt}{t}.$$

Po integrování a úpravách dostaneme integrál dané diferenciální rovnice ve tvaru

$$(t - C)^2 + y^2 = C^2.$$

Vidíme, že obecným řešením je jednoparametrická soustava kružnic se středem v $[C, 0]$ a s poloměrem $|C|$. $\square$



Obrázek 1: Jednoparametrická soustava kružnic se středem v $[C, 0]$ a s poloměrem $|C|$, daná rovnicí $(t - C)^2 + y^2 = C^2$.

Úloha 1.2. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $y^2 dt + (t^2 - ty) dy$.

Řešení.

$$y^2 dt + (t^2 - ty) dy = 0 \quad | : dt$$

$$y^2 + (t^2 - ty) \frac{dy}{dt} = 0$$

$$y' = \frac{-y^2}{t^2 - ty}$$

$$t^2 - ty \neq 0$$

$$t(t-y) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} t \neq 0 \\ y \neq t \end{matrix}$$

Je homogenní

Případ $y = t$:

$$t^2 + (t^2 - t^2) \cdot 1 = t^2 \neq 0$$

nejde o řešení DR

$$y' = \frac{y^2}{ty - t^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{t^2}}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{t}\right)^2}{\left(\frac{y}{t}\right) - 1}$$

Substituce:

$$z = \frac{y}{t}$$

$$zt = y$$

$$y' = z't + z$$

Dosadíme:

$$z't + z = \frac{z^2}{z-1} \quad , \quad z't = \frac{z^2}{z-1} - z$$

$$z't = \frac{z^2 - z^2 + z}{z-1} \quad , \quad z't = \frac{z}{z-1}$$

$$\frac{dz}{dt} t = \frac{z}{z-1} \quad | : t, : \frac{z}{z-1} \cdot dt$$

$$\frac{z-1}{z} dz = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{z-1}{z} dz = \int \frac{dt}{t}$$

$$e^{(z - \ln|z|)} = (\ln|t| + \ln C_1), \quad C_1 > 0$$

$$\frac{e^z}{|z|} = C_1 \cdot |t|, \quad \frac{e^z}{z} = C_2 t, \quad C_2 \neq 0$$

$$\text{Dosadíme: } \frac{e^{\frac{y}{t}}}{\frac{y}{t}} = C_2 t, \quad y = C_3 e^{\frac{y}{t}}, \quad C_3 \neq 0$$

$$\boxed{y = C e^{\frac{y}{t}}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$t \neq 0$ již máme ↑
 $z \neq 0$ Jde o řešení?

$$z \equiv 0: L = 0 \cdot t = 0 \quad L = P$$

Ano, $z \equiv 0$ je řeš. DR.

↓ $C=0$

□

Úloha 1.3. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $t dy - y dt = y dy$.

Řešení.

$$t dy - y dt = y dy, \quad (t-y) dy = y dt \quad | : dt$$

$$(t-y) \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t-y} \quad \begin{array}{l} y \neq t \\ y=t \text{ není řešením DR} \end{array}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}}$$

Substitution: $z = \frac{y}{t}$
 $y' = z't + z$

$$z't + z = \frac{z}{1-z}, \quad z't = \frac{z}{1-z} - z, \quad z't = \frac{z - z + z^2}{1-z}$$

$$z't = \frac{z^2}{1-z} \quad | : t, : \frac{z^2}{1-z}$$

$t \neq 0$ automaticky

$z^2 \neq 0, z \neq 0$

$y \equiv 0$ je řeš. DR

$$\int \frac{1-z}{z^2} dz = \int \frac{dt}{t}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln|z| = \ln|t| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\left(\frac{1}{z} + \ln|z| \right) = (-\ln|t| + \ln C_2), \quad C_2 > 0$$

$$|z| \cdot e^{\frac{1}{z}} = C_2 \cdot \frac{1}{|t|}, \quad z \cdot e^{\frac{1}{z}} = C_3 \cdot \frac{1}{t}, \quad C_3 \neq 0$$

zpětné dosazení:

$$\frac{y}{t} \cdot e^{\frac{t}{y}} = C_3 \cdot \frac{1}{t} \quad | \cdot t (\neq 0), \quad y \cdot e^{\frac{t}{y}} = C_3 \quad | : e^{\frac{t}{y}} (\neq 0)$$

$$y = C_3 \cdot e^{\frac{t}{y}}$$

$$\boxed{y = C \cdot e^{\frac{t}{y}}, C \in \mathbb{R}}$$

□

Úloha 1.4. Nalezněte (obecné) řešení diferenciální rovnice $t dy - y dt = y dy$.

Řešení.

$$t dy - y dt = y dy, \quad (t-y) dy = y dt \quad | : dt$$

$$(t-y) \frac{dy}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{t-y} \quad \begin{array}{l} y \neq t \\ y=t \text{ není řešením DR} \end{array}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\frac{y}{t}}{1 - \frac{y}{t}}$$

Substitution: $z = \frac{y}{t}$
 $y' = z't + z$

$$z't + z = \frac{z}{1-z}, \quad z't = \frac{z}{1-z} - z, \quad z't = \frac{z - z + z^2}{1-z}$$

$$z't = \frac{z^2}{1-z} \quad | : t, : \frac{z^2}{1-z}$$

$t \neq 0$ automaticky

$z^2 \neq 0, z \neq 0$

$y \equiv 0$ je řeš. DR

$$\int \frac{1-z}{z^2} dz = \int \frac{dt}{t}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln|z| = \ln|t| + \ln C_1, \quad C_1 > 0$$

$$\left(\frac{1}{z} + \ln|z| \right) = (-\ln|t| + \ln C_2), \quad C_2 > 0$$

$$|z| \cdot e^{\frac{1}{z}} = C_2 \cdot \frac{1}{|t|}, \quad z \cdot e^{\frac{1}{z}} = C_3 \cdot \frac{1}{t}, \quad C_3 \neq 0$$

zpětné dosazení:

$$\frac{y}{t} \cdot e^{\frac{t}{y}} = C_3 \cdot \frac{1}{t} \quad | \cdot t (\neq 0), \quad y \cdot e^{\frac{t}{y}} = C_3 \quad | : e^{\frac{t}{y}} (\neq 0)$$

$$y = C_3 \cdot e^{\frac{y}{t}}$$

$$\boxed{y = C \cdot e^{\frac{y}{t}}, C \in \mathbb{R}}$$

□

c) Rovnice typu $y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y + \gamma_1}{\alpha_2 t + \beta_2 y + \gamma_2}\right)$

Ve zvláštním případě, pokud determinant $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$ nebo $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 0$, lze rovnici řešit separací proměnných s případnou předchozí substitucí pro rovnici homogenní.

Úloha 1.5 ($\Delta = 0$). *Řešte:* $(t + y + 1) dt + (2t + 2y - 1) dy = 0$.

Řešení. Upravíme:

$$(t + y + 1) dt + (2t + 2y - 1) dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-t - y - 1}{2t + 2y - 1}.$$

Vidíme, že

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Jde tedy o speciální případ, ve kterém volíme lineární substituci:

$$z = t + y, \quad z' = 1 + y', \quad y' = z' - 1,$$

a tedy

$$\frac{dz}{dt} - 1 = -\frac{-z - 1}{2z - 1},$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{-z - 1}{2z - 1} + 1,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{-z - 1 + 2z - 1}{2z - 1},$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{z - 2}{2z - 1},$$

což už je tvar vhodný k separaci. . .

□

Úloha 1.6 ($\gamma_1 = \gamma_2 = 0$). *Řešte:* $y' = \frac{3t - y}{t + y}$.

Řešení. Vidíme, že speciální případ $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ vede na homogenní rovnici:

$$y' = \frac{3t - y}{t + y} \cdot \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}, \quad y' = \frac{3 - \frac{y}{t}}{1 + \frac{y}{t}}.$$

Provedeme tedy substituci $z = \frac{y}{t}, \dots$ □

Je-li $\Delta \neq 0$ a též $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$, provedeme substituci, při níž transformujeme jak neznámou funkci y , tak nezávisle proměnnou t :

$$\begin{aligned} y &= z + r \\ t &= \tau + s. \end{aligned}$$

Koeficienty r, s volíme tak, abychom pro neznámou funkci $z(\tau)$ dostali rovnici homogenní, tj. aby se vynuly absolutní členy v čitateli i ve jmenovateli uvedeného zlomku. Z transformačních rovnic plyne $dy = dz, dt = d\tau$ (tedy $\frac{dz}{d\tau} = \frac{dy}{dt}$) a daná rovnice přejde na tvar rovnice homogenní:

$$y' = f\left(\frac{\alpha_1 t + \beta_1 y}{\alpha_2 t + \beta_2 y}\right),$$

pokud položíme

$$\begin{aligned} \alpha_1 s + \beta_1 r + \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_2 s + \beta_2 r + \gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ježto determinant této soustavy $\Delta \neq 0$, existuje řešení r, s .

Úloha 1.7. Řešte rovnici $y' = \frac{5t - 2y - 1}{2t - y + 1}$.

Řešení. Nejprve řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 5s - 2r - 1 &= 0, \\ 2s - r + 1 &= 0, \end{aligned}$$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = -1 \neq 0$; je $r = 7, s = 3$. Substituce $y = z + 7, t = \tau + 3$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{5\tau - 2z}{2\tau - z} \quad \text{neboli} \quad z' = \frac{5 - 2\frac{z}{\tau}}{2 - \frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\frac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\tau$. Z toho $z' = u + u'\tau$, takže

$$u + u'\tau = \frac{5 - 2u}{2 - u}, \quad \text{odkud} \quad u'\tau = \frac{u^2 - 4u + 5}{2 - u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{2-u}{u^2-4u+5}du = \frac{d\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u-4}{u^2-4u+5}du = -2\frac{d\tau}{\tau}.$$

Po integraci máme

$$\ln(u^2-4u+5) = -2\ln|\tau| + \ln C_1, \quad \text{kde } C_1 > 0,$$

tedy

$$u^2-4u+5 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \frac{z}{\tau}$, $z = y-7$, $\tau = t-3$, je $u = \frac{y-7}{t-3}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit funkcí danou implicitně:

$$\left(\frac{y-7}{t-3}\right)^2 - 4\frac{y-7}{t-3} + 5 = \frac{C}{(t-3)^2}, \quad \text{kde } C \neq 0.$$

□

Úloha 1.8. Řešte rovnici $y' = \frac{2t-y+1}{t-2y+1}$.

Řešení. Nejprve řešíme soustavu

$$\begin{aligned} 2s-r+1 &= 0, \\ s-2r+1 &= 0, \end{aligned}$$

jejíž determinant soustavy je $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$; je $r = \frac{1}{3}$, $s = -\frac{1}{3}$.

Substituce $y = z + \frac{1}{3}$, $t = \tau - \frac{1}{3}$ transformuje rovnici na tvar

$$z' = \frac{2\tau-z}{\tau-2z} \quad \text{neboli} \quad z' = \frac{2-\frac{z}{\tau}}{1-2\frac{z}{\tau}}$$

rovnice homogenní. Položíme nyní $\frac{z}{\tau} = u(\tau)$, tj. $z = u\tau$. Z toho $z' = u + u'\tau$, takže

$$u + u'\tau = \frac{2-u}{1-2u}, \quad \text{odkud} \quad u'\tau = 2\frac{u^2-u+1}{1-2u}.$$

Po separaci proměnných máme

$$\frac{1-2u}{u^2-u+1}du = 2\frac{d\tau}{\tau},$$

nebo též

$$\frac{2u-1}{u^2-u+1}du = -2\frac{d\tau}{\tau},$$

Po integraci máme

$$\ln(u^2 - u + 1) = -2 \ln |\tau| + \ln C, \quad \text{kde } C > 0,$$

tedy

$$u^2 - u + 1 = \frac{C}{\tau^2}.$$

Jelikož $u = \frac{z}{\tau}$, $z = y - \frac{1}{3}$, $\tau = t + \frac{1}{3}$, je $u = \frac{y - \frac{1}{3}}{t + \frac{1}{3}}$, takže obecné řešení dané diferenciální rovnice lze vyjádřit funkcí danou implicitně:

$$\left(\frac{y - \frac{1}{3}}{t + \frac{1}{3}}\right)^2 - \frac{y - \frac{1}{3}}{t + \frac{1}{3}} + 1 = \frac{C}{(t + \frac{1}{3})^2}, \quad \text{kde } C > 0.$$

□

2 Snížení řádu diferenciální rovnice

Úloha 2.1. Řešte $y'' = \frac{y'}{x}$.

Řešení. Substitute:

$$z = y', \quad z' = y'' \quad z' = \frac{z}{x}.$$

Separace proměnných ($z \equiv 0$ je řešením):

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}, \quad \ln |z| = \ln |x|, \quad z = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substituce:

$$y' = Cx, \quad y = \frac{C}{2}x^2 + C_1, \quad C, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Řešení ($C_2 = \frac{C}{2}$):

$$y = C_1 + C_2x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Úloha 2.2. Řešte počáteční úlohu:

$$y''' = e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 0.$$

Řešení. Substitute:

$$z = y'', \quad z' = y''', \quad z' = e^{2x}, \quad z = \frac{1}{2} e^{2x} + C_4, \quad C_4 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substitute:

$$y'' = \frac{1}{2} e^{2x} + C_4.$$

Substitute:

$$z = y', \quad z' = y'', \quad z' = \frac{1}{2} e^{2x} + C_4, \quad z = \frac{1}{4} e^{2x} + C_4 x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Zpětná substitute:

$$y' = \frac{1}{4} e^{2x} + C_4 x + C_2, \quad y = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{C_4}{2} x^2 + C_2 x + C_3, \quad C_3 \in \mathbb{R}.$$

Obecné řešení ($C_1 = \frac{C_4}{2}$):

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Počáteční podmínky:

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad y' = \frac{1}{4} e^{2x} + 2C_1 x + C_2, \quad y'' = \frac{1}{2} e^{2x} + 2C_1.$$

$$\begin{array}{lcl} y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & -1 \\ y''(0) & = & 0 \end{array} \left| \begin{array}{lcl} \frac{1}{8} e^0 + C_1 0 + C_2 0 + C_3 & = & 1 \\ \frac{1}{4} e^0 + 2C_1 0 + C_2 & = & -1 \\ \frac{1}{2} e^0 + 2C_1 & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{lcl} \frac{1}{8} + C_3 & = & 1 \\ \frac{1}{4} + C_2 & = & -1 \\ \frac{1}{2} + 2C_1 & = & 0 \end{array}$$

Tudíž:

$$C_1 = -\frac{1}{4}, \quad C_2 = -\frac{5}{4}, \quad C_3 = \frac{7}{8}.$$

Partikulární řešení:

$$y = \frac{1}{8} e^{2x} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{5}{4} x + \frac{7}{8}.$$

□