

Pokud je řada zadána několika prvními členy, určete a_n ; pokud je řada zadána n -tým členem, запиšte několik jejích členů pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

1. Určete součet řady:

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \dots$, b) $3 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8} - \dots$.

2. Rozhodněte, zda dané řady splňují nutnou podmínku konvergence:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \dots$, b) $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{6} + \dots$.

3. Užitím vhodného srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

a) $\sum \frac{1}{\sqrt{9n^4 + 4n^2 + 1}}$, b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2 + 9}}$,

c) $\sum \frac{(n-1)^n}{n^{n+1}}$, d) $\sum \frac{|\sin n|}{2^n}$.

4. Užitím vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

a) $\frac{4}{2} + \frac{9}{4} + \frac{16}{8} + \frac{25}{16} + \dots$, b) $\frac{2!}{10} + \frac{3!}{10^2} + \frac{4!}{10^3} + \dots$,

c) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{9}{2 \cdot 4} + \frac{27}{3 \cdot 8} + \frac{81}{4 \cdot 16} + \dots$, d) $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots$,

e) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{11 \cdot 11} + \frac{1}{16 \cdot 15} + \dots$, f) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)}$.

5. Určete, pro která $a > 0$ konverguje řada:

a) $\frac{a}{1 \cdot 3} + \frac{a^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{a^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{a^4}{4 \cdot 3^4} + \dots$, b) $\sum \left(\frac{na}{n+1} \right)^n$.

Řešení:

1a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} \right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, **1b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \right) = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

2a) ne, **2b)** ano.

3a) K, **3b)** D, **3c)** D, **3d)** K.

4a) K (limitní podílové), **4b)** D (limitní podílové), **4c)** D (limitní odmocninové),

4d) K (limitní podílové), **4e)** K (limitní Raabeovo), **4f)** D (integrální).

5a) K pro $a \in (0; 3)$ (limitní odmocninové), **5b)** K pro $a \in (0; 1)$ (limitní odmocninové).

Pokud je řada zadána několika prvními členy, určete a_n ; pokud je řada zadána n -tým členem, запиšte několik jejích členů pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

1. Určete součet řady:

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \dots$, b) $3 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8} - \dots$.

2. Rozhodněte, zda dané řady splňují nutnou podmínku konvergence:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \dots$, b) $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{6} + \dots$.

3. Užitím vhodného srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

a) $\sum \frac{1}{\sqrt{9n^4 + 4n^2 + 1}}$, b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2 + 9}}$,

c) $\sum \frac{(n-1)^n}{n^{n+1}}$, d) $\sum \frac{|\sin n|}{2^n}$.

4. Užitím vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

a) $\frac{4}{2} + \frac{9}{4} + \frac{16}{8} + \frac{25}{16} + \dots$, b) $\frac{2!}{10} + \frac{3!}{10^2} + \frac{4!}{10^3} + \dots$,

c) $\frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{9}{2 \cdot 4} + \frac{27}{3 \cdot 8} + \frac{81}{4 \cdot 16} + \dots$, d) $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots$,

e) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{11 \cdot 11} + \frac{1}{16 \cdot 15} + \dots$, f) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)}$.

5. Určete, pro která $a > 0$ konverguje řada:

a) $\frac{a}{1 \cdot 3} + \frac{a^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{a^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{a^4}{4 \cdot 3^4} + \dots$, b) $\sum \left(\frac{na}{n+1} \right)^n$.

Řešení:

1a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} \right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, **1b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \right) = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

2a) ne, **2b)** ano.

3a) K, **3b)** D, **3c)** D, **3d)** K.

4a) K (limitní podílové), **4b)** D (limitní podílové), **4c)** D (limitní odmocninové),

4d) K (limitní podílové), **4e)** K (limitní Raabeovo), **4f)** K (integrální).

5a) K pro $a \in (0; 3)$ (limitní odmocninové), **5b)** K pro $a \in (0; 1)$ (limitní odmocninové).