

1. Vypočtete povrch (plášť) rotačního tělesa:

a) Katenoidu (vznikne rotací křivky $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, kde $a > 0$, $x \in \langle 0, a \rangle$, kolem osy x).

Předpokládaný výsledek: $\pi a^2 \left(1 + \frac{\operatorname{sh} 2}{2}\right)$

b) Elipsoidu, který vznikne rotací elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kolem osy x .

Předpokládaný výsledek: $2\pi ab \left(\cos \left(\arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)$

2. Dokažte, že $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$ je pro $s > 1$ konvergentní a pro $s \leq 1$ divergentní.

3. Užitím předchozího pravidla a srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci nebo divergenci integrálů:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{x^3 + c^3}$, kde $c > 0$, b) $\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{x^2 + c^2}$, c) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \, dx}{x^2 + \sqrt{x} + 1}$.

4. Vypočtete nevlastní integrály vlivem meze (současně ověřte, zda nemají singulární body i uvnitř integračního intervalu – šlo by o kombinaci vlivů meze a funkce):

a) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$, b) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \, dx}{(1+x)^2}$, c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(9+4x)^2}$, d) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-3x} \, dx$.

5. Vypočtete nevlastní integrály vlivem funkce (ověřte, zda nemají singulární body i uvnitř integračního intervalu):

a) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$, b) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$, c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, d) $\int_0^1 x \ln x \, dx$, e) $\int_0^1 \ln x \, dx$.

Dobrovolná úloha K:

Pro která k konverguje integrál $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$, kde $a < b$.