

[Pro řešení diferenciálních rovnic jsou v hranaté závorce uvedeny výsledky.]

1. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice:

a) $y''' = y''^3$ $\left[3y = (C_1 - 2t)^{\frac{3}{2}} + C_2 t + C_3 \right],$

b) $ay''' = y'',$ kde $a > 0$ $\left[y = C_1 e^{\frac{t}{a}} + C_2 t + C_3 \right].$

2. Najděte obecné řešení lineární diferenciální rovnice:

$$y' + 2y = t^2 + 2t. \quad \left[y = C e^{-2t} + \frac{1}{4}(2t^2 + 2t - 1) \right]$$

3. Najděte obecné řešení Bernoulliovy diferenciální rovnice:

a) $y' + \frac{y}{t+1} = -\frac{1}{2}(t+1)^3 y^3,$ $\left[\frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}(t+1)^4 + C(t+1)^2 \right]$

b) $y' + \frac{2y}{t} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 t}.$ $\left[y^{-\frac{1}{2}} = \frac{C + \ln \cos t}{t} + \operatorname{tg} t \right]$

4. K dané soustavě čar určete ortogonální trajektorie:

$$y^2 = 4(t - a). \quad \left[y = C e^{-\frac{t}{2}} \right]$$

Oba systémy čar též znázorněte graficky.

5. Je dána soustava křivek $y = a - t - \ln(2t - 1)$. Najděte oba systémy izogonálních trajektorií, které protínají křivky zadaného systému pod úhlem $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

$$\left[y = t^2 + C, \quad y = \ln \frac{C}{\sqrt{t}} \right]$$

6. Najděte obecné řešení diferenciální rovnice $(ty' + 3y)^2 = 7t$.
(Návod: Nejprve řešte kvadratickou rovnici.)

$$\left[y = \frac{C}{t^3} \pm \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{7}} \right]$$