

Pokud je řada zadána několika prvními členy, určete a_n ; pokud je řada zadána n -tým členem, zapište několik jejích členů pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

1. Rozhodněte o konvergenci alternující řady:

a) $\frac{11}{3} - \frac{12}{5} + \frac{13}{7} - \frac{14}{9} + \dots$, b) $1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \dots$.

2. Rozhodněte o absolutní (neabsolutní) konvergenci řady:

a) $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, b) $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, c) $\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{\sqrt{n}}$, d) $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln n}$,
e) $\sum (-1)^{n-1} \frac{n^2}{2^n}$, f) $\sum (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n^2}$, kde $x \in \mathbb{R}$.

3. Rozhodněte o konvergenci řady, případně určete její součet:

$$\frac{3}{4} - \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 - \left(\frac{4}{5}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^5 - \dots$$

4. Dokažte, že na danou řadu nelze použít Leibnizovo kritérium konvergence:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \dots$$

5. Jestliže členy řady: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ přerovnáme tak, že do přerovnané řady dáváme střídavě p členů kladných a q členů záporných, pak přerovnaná řada má součet $S = \ln 2 \sqrt{\frac{p}{q}}$. Zadanou řadu přerovnejte tak, aby se její součet zdvojnásobil (vypište 15 členů této řady).

6. Pomocí násobení geometrických řad nalezněte řady se součtem

a) $\frac{1}{1+2x+x^2}$, b) $\frac{1}{1-5x+6x^2}$, c) $\frac{1}{(1+x)^3}$.

Řešení:

1a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} \right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, 1b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \right) = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$.

2a) ne, 2b) ano. 3a) K, 3b) D, 3c) D, 3d) K.

4a) K (limitní podílové), 4b) D (limitní podílové), 4c) D (limitní odmocninové),

4d) K (limitní podílové), 4e) K (limitní Raabeovo), 4f) K (integrální).

5a) K pro $a \in (0; 3)$ (limitní odmocninové), 5b) K pro $a \in (0; 1)$ (limitní odmocninové).

6a) $\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot n \cdot x^{n-1}$, $x \in (-1; 1)$,

6b) $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (3^n \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 2^2 + \dots + 3^2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^n) \cdot x^{n-1}$, $x \in (-\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$,

6c) $\left(\frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{1+x} \right) \cdot \frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot x^{n-1}$, $x \in (-1; 1)$.