

Pokud je řada zadána několika prvními členy, určete a_n ; pokud je řada zadána n -tým členem, zapíšte několik jejích členů pro $n = 1, 2, 3, \dots$.

1. Užitím rozkladu zlomků vypočtete součet řady

$$\text{a)} \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \dots, \quad \text{b)} \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \dots.$$

2. Užitím geometrických řad určete, pro která x konverguje daná řada, a vypočtete její součet:

$$\text{a)} \sum \left(\frac{x}{1+x} \right)^n, \quad \text{b)} \sum \left(3 - \frac{1}{x-2} \right)^n, \quad \text{c)} \sum \frac{1}{(1+x)^n}, \quad \text{d)} \sum \frac{(x-2)^n}{2^{n-1}}.$$

3. Určete součet řady:

$$\text{a)} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{27} + \dots, \quad \text{b)} 3 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8} - \dots.$$

4. Rozhodněte, zda dané řady splňují nutnou podmínku konvergence:

$$\text{a)} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{4}} + \frac{4}{\sqrt{5}} + \dots, \quad \text{b)} \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{6} + \dots.$$

5. Užitím vhodného srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

$$\text{a)} \sum \frac{1}{\sqrt{9n^4 + 4n^2 + 1}}, \quad \text{b)} \sum \frac{1}{\sqrt{n^2 + 9}}, \quad \text{c)} \sum \frac{(n-1)^n}{n^{n+1}}, \quad \text{d)} \sum \frac{|\sin n|}{2^n}.$$

6. Užitím vhodného kritéria rozhodněte o konvergenci nebo divergenci řady:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{4}{2} + \frac{9}{4} + \frac{16}{8} + \frac{25}{16} + \dots, & \text{b)} & \frac{2!}{10} + \frac{3!}{10^2} + \frac{4!}{10^3} + \dots, \\ \text{c)} & \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{9}{2 \cdot 4} + \frac{27}{3 \cdot 8} + \frac{81}{4 \cdot 16} + \dots, & \text{d)} & \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots, \\ \text{e)} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{11 \cdot 11} + \frac{1}{16 \cdot 15} + \dots, & \text{f)} & \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot (\ln \ln n)}. \end{aligned}$$

7. Určete, pro která $a > 0$ konverguje řada:

$$\text{a)} \frac{a}{1 \cdot 3} + \frac{a^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{a^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{a^4}{4 \cdot 3^4} + \dots, \quad \text{b)} \sum \left(\frac{na}{n+1} \right)^n.$$

Řešení:

$$\text{1a)} \frac{3}{2}, \text{ 1b)} \frac{1}{4}, \text{ 2a)} [x \in (-\frac{1}{2}; +\infty), s(x) = x], \text{ 2b)} [x \in (\frac{9}{4}; \frac{5}{2}), s(x) = \frac{7-3x}{2x-5}],$$

$$\text{2c)} [x \in (-\infty; -2) \cup (0; \infty), s(x) = \frac{1}{x}], \text{ 2d)} [x \in (0; 4), s(x) = \frac{4-2x}{x-4}]$$

$$\text{3a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} \right) = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}, \text{ 3b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n-1}} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \right) = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}.$$

4a) ne, **4b)** ano. **5a)** K, **5b)** D, **5c)** D, **3d)** K.

6a) K (limitní podílové), **6b)** D (limitní podílové), **6c)** D (limitní odmocninové),

6d) K (limitní podílové), **6e)** K (limitní Raabeovo), **6f)** D (integrální).

7a) K pro $a \in (0; 3)$ (limitní odmocninové), **7b)** K pro $a \in (0; 1)$ (limitní odmocninové).