

Metody integrace pro funkce jedné proměnné 3

Jiří Fišer

KMA, PŘF UP Olomouc

LS10

Užití Eulerových vzorců pro výpočet některých integrálů

Pro komplexní funkci $w(x)$ reálné proměnné x se derivace a integrál definují stejně jako pro reálné funkce s tím, že imaginární jednotka i se chová jako konstanta.

Je-li $a \neq 0$ komplexní číslo, je např.

$$(e^{ax})' = a e^{ax}, \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

Elementární funkce e^z , $\cos z$, $\sin z$ se definují i pro komplexní proměnnou z ; jejich vzájemný vztah je vyjádřen **Eulerovými vzorci**, podle nichž je

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}).$$

Těchto vzorců lze využít pro výpočet některých integrálů.

Užití Eulerových vzorců pro výpočet některých integrálů

Úloha

Vypočtete $I = \int \sin^4 x \, dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{(2i)^4} (e^{ix} - e^{-ix})^4 \, dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \, dx = \dots = \\ &= \frac{1}{32} \frac{1}{2i} (e^{4ix} - e^{-4ix}) - \frac{1}{4} \frac{1}{2i} (e^{2ix} - e^{-2ix}) + \frac{3}{8}x + C = \\ &= \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + C. \end{aligned}$$

Užití Eulerových vzorců pro výpočet některých integrálů

Úloha

Vypočtěte (užitím Eulerových vzorců) $I = \int e^x \cos x \, dx$.

Řešení.

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos x \, dx = \int e^x \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \, dx = \frac{1}{2} \int (e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} + \frac{1}{1-i} e^{(1-i)x} \right) + C = \dots = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C. \end{aligned}$$

(Srovnej s výsledkem dle vzorce pro I_c .)



Riemannův určitý integrál

Jiří Fišer

KMA, PŘF UP Olomouc

LS10

Definice Riemannova integrálu

Riemannův integrál lze definovat v podstatě dvojím způsobem:

- užitím (Cauchyových) integrálních součtů nebo
- pomocí dolních a horních integrálů.

Základní podmínky

- Uvažujeme funkci f omezenou na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $a < b$.
- *Dělení intervalu* (označíme D) — každá konečná posloupnost bodů $x_0, x_1, \dots, x_n$ (zvaných *dělicí*), kde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.
- *Element dělení* $\Delta_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle$, $i = 1, \dots, n$, jeho délka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
- *Norma dělení* $\nu(D) = \max \Delta x_i$, stručné označení ν .

Dolní a horní integrál

Dolní a horní integrální součet — DEFINICE

- Mějme funkci f omezenou na $\langle a, b \rangle$ a libovolné dělení D .
- Pro $x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ definujeme:

$$m_i = \inf f(x), \quad M_i = \sup f(x)$$

- ▶ dolní integrální součet příslušný f a D :

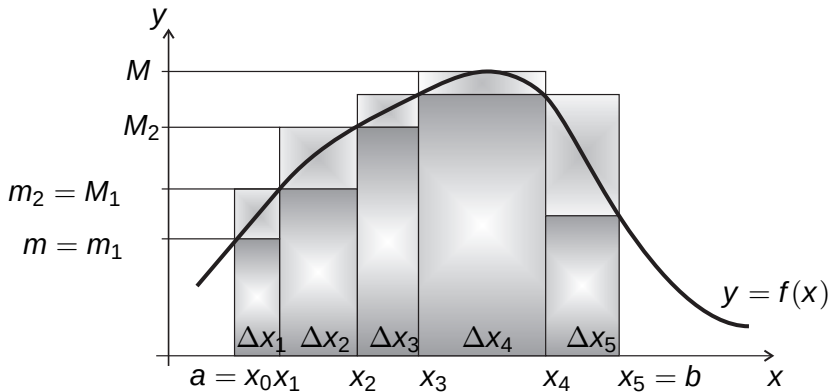
$$s(f, D) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

- ▶ horní integrální součet příslušný f a D :

$$S(f, D) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Dolní a horní integrál

Dolní a horní integrální součet — OBRÁZEK



Obrázek:

Dolní a horní integrál

Dolní a horní integrální součet — VLASTNOSTI

- (1) $\forall D_1, D_2; \quad s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$
- (2) Množina všech dolních integrálních součtů je (shora) omezená, množina všech horních integrálních součtů je (zdola) omezená: Jestliže pro $x \in \langle a, b \rangle$ označíme $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$, platí

$$m(b - a) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq M(b - a).$$

Proto existuje supremum množiny všech dolních a infimum množiny všech horních integrálních součtů.

Dolní a horní integrál

DEFINICE

Definice

Číslo

$$I_*f = \sup_D s(f, D) \quad (I^*f = \inf_D S(f, D))$$

nazýváme dolní (horní) Riemannův integrál.

Zřejmě platí $s(f, D) \leq I_*f \leq I^*f \leq S(f, D)$.

Dolní a horní integrál

ÚLOHA

Úloha

Najděte dolní i horní integrál Dirichletovy funkce na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Řešení.

Máme

$$s(\chi, D) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0, \quad l_* \chi = 0,$$

$$S(\chi, D) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = 1, \quad l^* \chi = 1.$$



Dolní a horní integrál

Dolní a horní integrální součet — RIEMANNŮV INTEGRÁL

Definice

Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b \rangle$. Říkáme, že funkce f je na $\langle a, b \rangle$ Riemannovsky integrovatelná, $f \in R(\langle a, b \rangle)$, právě když

$$I_* f = I^* f.$$

Společnou hodnotu $I f$ dolního a horního integrálu nazveme Riemannův integrál funkce f na $\langle a, b \rangle$ a píšeme

$$I f = \int_a^b f(x) dx.$$

- $\langle a, b \rangle$ je obor integrace,
- čísla a, b dolní resp. horní mez integrace,
- x integrační proměnná.

- Geometrický význam dolního součtu – obsah mnohoúhelníku vepsaného do základního obrazce.
- Geometrický význam horního součtu – obsah mnohoúhelníku, do něž je základní obrazec vepsán.
- Geometrickým významem Riemannova integrálu – obsah (míra) základního obrazce.

Dá se dokázat, že do množiny $R(\langle a, b \rangle)$ patří tyto třídy funkcí:

- třída všech funkcí *spojitých* na $\langle a, b \rangle$,
- třída všech funkcí *spojitých po částech* na $\langle a, b \rangle$,
- třída všech funkcí *monotónních a omezených* na $\langle a, b \rangle$.

V množině $R(\langle a, b \rangle)$ však existují i funkce, které nesplňují žádnou z uvedených podmínek. Jestliže se funkce g liší od funkce $f \in R(\langle a, b \rangle)$ v konečném počtu bodů a nabývá v nich konečných hodnot, pak i $g \in R(\langle a, b \rangle)$ a oba integrály jsou si rovny.

Věta (Newtonův vzorec)

Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b \rangle$ a má tu (zobecněnou) primitivní funkci F . Pak platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_{x=a}^b = F(b) - F(a).$$

Newtonův vzorec je základní metodou výpočtu Riemannova integrálu.

Riemannův Integrál

Newtonův vzorec — ÚLOHY

Úloha

Vypočtěte $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$.

Řešení.

$$I = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2.$$



Úloha

Vypočtěte $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Řešení.

Nejprve určíme primitivní funkci: $\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = (\text{substitucí}) = -\frac{1}{\ln x} + C$.

Pak $I = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_e^{e^2} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2}$. □

Základní vlastnosti určitého integrálu

VLASTNOSTI ZÁVISLÉ NA INTEGROVANÉ FUNKCI

Věta (lineární vlastnosti)

(1) *Je-li $f \in R(\langle a, b \rangle)$, $k \in \mathbb{R}$, pak $kf \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí*

$$\int_a^b kf(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx.$$

(2) *Je-li $f, g \in R(\langle a, b \rangle)$, pak $(f + g) \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

Princip důkazu.

Použijí se vlastnosti integrálních součtů. □

Základní vlastnosti určitého integrálu

VLASTNOSTI ZÁVISLÉ NA INTEGROVANÉ FUNKCI

Věta (vlastnosti vyjádřené nerovnostmi)

Nechť $f, g \in R(\langle a, b \rangle)$.

(3) Je-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b \rangle$, pak $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(4) Je-li $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, b \rangle$, pak $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

(5) $|f(x)| \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Princip důkazu.

(3) plyne z definice, (4) ze (3) a (5) ze (4), neboť $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.



Základní vlastnosti určitého integrálu

VLASTNOSTI ZÁVISLÉ NA INTERVALU INTEGROVÁNÍ

Věta (aditivita integrálu)

Nechť $a < c < b$. Pak $f \in R(\langle a, b \rangle)$, právě když $f \in R(\langle a, c \rangle) \wedge f \in R(\langle c, b \rangle)$. Přitom platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Princip důkazu.

Plyne z vlastností integrálních součtů, když bod c vezmeme za dělicí bod. □

Tuto vlastnost lze rozšířit na konečný počet bodů

$a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x) dx.$$

Základní vlastnosti určitého integrálu

Vlastnosti závislé na intervalu integrování — ÚLOHA

Úloha

Vypočtěte $I = \int_0^3 |x - 2| \, dx$.

Řešení.

$$I = \int_0^2 (2 - x) \, dx + \int_2^3 = \dots$$



Základní vlastnosti určitého integrálu

Vlastnosti závislé na intervalu integrování — ROZŠÍŘENÍ DEFINICE RIEMANNOVA INTEGRÁLU PRO PŘÍPAD, ŽE $a \geq b$:

Pro $a = b$ definujeme $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Pro $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Pak pro *libovolné* uspořádání bodů a, b, c platí

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, pokud je funkce f integrovatelná v nejširším intervalu určeném body a, b, c .